Clase Auxiliar: Variable Compleja

Michal Kowalczyk & Emilio Vilches

06 de Octubre de 2008

P1. Sea U un abierto simplemente conexo. Sea f analítica sobre U y suponga que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Mostrar que existe una función analítica g sobre U tal que $g^2 = f$.

P2. Pruebe que existe una función analítica f definida en $D(0,r)$ que satisface:

$$f^2(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

P3. Sea f continua en $\mathbb{C}$ y analítica en $\{z \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$. Pruebe que f es analítica en todo $\mathbb{C}$.

P4. Considere

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

a) Muestre que $f(z)$ es analítica si $\mathrm{Re}(z) > 1$.

b) Muestre que $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^z}$ si $\mathrm{Re}(z) > 1$

P5. Sea $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n!z}$.

a) Demuestre que f es analítica en $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

b) Demuestre que f no puede ser extendida analíticamente a una región Ω que contenga estrictamente a $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

P6. Sea $a > 0$. Mostrar que cada una de las siguientes series representan funciones holomorfas:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-an^2 z}$ para $\mathrm{Re}(z) > 0$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-anz}}{(a+n)^2}$ para $\mathrm{Re}(z) > 0$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^z}$ para $\mathrm{Re}(z) > 1$.

P7. Considere la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad z \in D(z_0, R), \quad R > 0$$

a) Muestre que si $0 < r < R$ entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

b) Usando la parte anterior pruebe el principio del módulo máximo, esto es:
Teorema: Sea Ω un dominio acotado, $f\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua en $\bar{\Omega}$ y analítica en Ω. Sea $M = \max\{|f(z)| \mid z \in \partial\Omega\}$. Entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es cierta:

1)

$$|f(z)| < M \quad \forall z \in \Omega$$

2)

$$|f(z)| = M \quad \forall z \in \Omega$$

Al igual que en el caso de las funciones armónicas del teorema anterior se desprende lo siguiente: Si Ω es un dominio acotado, $f\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua en $\bar{\Omega}$, analítica en Ω y que alcanza su máximo en Ω, entonces f es constante.

P8. ***Lema de Schwartz*** Sea $D = \{|z| < 1\}$ y $f\colon D \to D$ una función analítica tal que $f(0) = 0$.

a) Pruebe que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D$ y $|f'(0)| \leq 1$.

b) Si para algún $z_0 \neq 0$ se tiene que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $f(z) = \alpha z$.

P9. Los numeros de Fibonacci están definidos como

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1 \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

Muestre que los c_n son los coeficientes de Taylor de una función racional y determine una expresión cerrada para dicha función.

P10. Encuentre el desarrollo en serie de Laurent de $\frac{1}{z(1-z)}$ en los anillos:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-1| < 1\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z|\}$.

P11. Determine las series de Laurent de las siguientes funciones en los dominios indicados:

a) $\frac{e^{z^2}-1}{z^4}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) $\frac{4}{4z-z^2}$ en $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z-3i| < 5\}$.

P12. Suponga que f es analítica en el semiplano superior y que f es periódica de periodo 1.

a) Mostrar que f tiene una expansión de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n z}$$

donde

$$c_n = \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n(x+iy)} dx$$

para cualquier valor de $y > 0$.

b) Suponga además que existe $y_0 > 0$ tal que $f(z) = f(x+iy)$ es acotada en el dominio $y \geq y_0$. pruebe que $c_n = 0$ para $n < 0$.

P13. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Mostrar que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\lambda \cos t} \cos nt dt \quad \text{si} \quad n \geq 0.$$

b) Mostrar que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(z^n + \frac{(-1)^n}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, donde

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - \lambda \sin t) dt \quad \text{si} \quad n \geq 0.$$