Clase Auxiliar: Variable Compleja

Michal Kowalczyk & Emilio Vilches

06 de Octubre de 2008

P1. Sea f una función entera tal que $|f(z)| \leq Me^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostrar que $|f(0)| \leq M$ y que si $n > 0$ entonces

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq M \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

P2. Sea U un abierto simplemente conexo. Sea f analítica sobre U y suponga que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Mostrar que existe una función analítica g sobre U tal que $g^2 = f$.

P3. Pruebe que existe una función analítica f definida en $D(0, r)$ que satisface:

$$f^2(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

P4. Sea f continua en $\mathbb{C}$ y analítica en $\{z \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$. Pruebe que f es analítica en todo $\mathbb{C}$.

P5. Sea f holomorfa en $H = \{z \in\mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ y continua sobre el eje real. Suponga que $f(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}$ y que f es acotada en $\overline{H}$. Pruebe que $f = c \in [-1, 1]$.
Indicación: considere

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \overline{H} \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in \overline{H}^c \end{cases}$$

P6. Considere

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

a) Muestre que $f(z)$ es analítica si $\mathrm{Re}(z) > 1$.

b) Muestre que $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^z}$ si $\mathrm{Re}(z) > 1$

P7. Sea $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n!z}$.

a) Demuestre que f es analítica en $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

b) Demuestre que f no puede ser extendida analíticamente a una región Ω que contenga estrictamente a $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

P8. Sea $a > 0$. Mostrar que cada una de las siguientes series representan funciones holomorfas:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-an^2 z}$ para $\mathrm{Re}(z) > 0$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-anz}}{(a+n)^2}$ para $\mathrm{Re}(z) > 0$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^z}$ para $\mathrm{Re}(z) > 1$.

P9. Considere la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad z \in D(z_0, R), \quad R > 0$$

a) Muestre que si $0 < r < R$ entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

b) Usando la parte anterior pruebe el principio del módulo máximo, esto es:
Teorema: Sea Ω un dominio acotado, $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{\Omega}$ y analítica en Ω. Sea $M = \max\{|f(z)| \mid z \in \partial\Omega\}$. Entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es cierta:

1)
$$|f(z)| < M \quad \forall z \in \Omega$$

2)
$$|f(z)| = M \quad \forall z \in \Omega$$

Al igual que en el caso de las funciones armónicas del teorema anterior se desprende lo siguiente: Si Ω es un dominio acotado, $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{\Omega}$, analítica en Ω y que alcanza su máximo en Ω, entonces f es constante.

P10. ***Lema de Schwartz*** Sea $D = \{|z| < 1\}$ y $f\colon D \to D$ una función analítica tal que $f(0) = 0$.

a) Pruebe que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D$ y $|f'(0)| \leq 1$.

b) Si para algún $z_0 \neq 0$ se tiene que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $f(z) = \alpha z$.

P11. Automorfismos del disco unitario.
Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| < 1$ y sea $\varphi_\alpha = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$. Denotaremos por D el disco unitario.

a) Pruebe que φ_α es analítica y sobreyectiva sobre D.

b) Muestre que $\varphi_\alpha \circ \varphi_{-\alpha}(z) = z$.

c) Pruebe que $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$, $\varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$ y $\varphi'_\alpha(\alpha) = (1 - |\alpha|^2)^{-1}$.

d) Sea $f\colon D \to D$ analítica, sean $|a|, |\alpha| < 1$ y suponga que $f(a) = \alpha$. Sea $g = \varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_{-a}$. Muestre que $|g'(0)| \leq 1$ y que $g'(0) = \frac{1-|a|^2}{1-|\alpha|^2} f'(a)$.

e) Si $f\colon D \to D$ es una función analítica, biyectiva y con inversa analítica tal que $f(a) = 0$. Probar entonces que existe un complejo α con $|\alpha| = 1$ tal que $f = \alpha\varphi_a$.

Se puede probar que la hipótesis de que la inversa sea analítica se puede omitir, así todo lo anterior muestra que las únicas funciones analíticas del disco unitario en si mismo son las funciones φ_α.

P12. Sea $f\colon D \to \mathbb{C}$ analítica, con $D = \{|z| < 1\}$. Suponga que $|f(z)| < 1$ en D y que $f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2}) = 0$. Pruebe que $|f(0)| \leq \frac{1}{4}$ y demuestre que esta cota es óptima.

P13. Sea $f\colon D \to D$ una función analítica del disco unitario en si mismo. Probar que para todo $z \in D$ se tiene
$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

P14. El propósito de este ejercicio es demostrar que si h es entera, $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $|h(z)| \leq e^{|z|^n}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $h(z) = e^{p(z)}$ con p un polinomio de grado menor o igual a n.

a) Demuestre que si f es analítica en $D = \{|z| < 1\}$, $f(0) = 0$ y f satisface $\mathrm{Re}(f(z)) \leq A$ para todo $z \in D$ con $A > 0$, entonces
$$|f(z)| \leq \tfrac{2Ar}{1-r} \quad \text{sí} \quad |z| = r$$
Indicación: Considere la función $g(z) = \frac{f(z)}{f(z)-2A}$.

b) Suponga que g es entera y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$\mathrm{Re}(z) \leq |z|^m \quad \text{para} \quad |z| > 1.$$
Demuestre que g es un polinomio de grado menor o igual a m.
Indicación: Suponga inicialmente que $g(0) = 0$. Use (*a*) para demostrar que $|g(z)| \leq 2R^m$ si $|z| = \frac{R}{2}$, y concluya que g es un polinomio de grado $\leq m$. Pruebe el caso general considerando $g(z) - g(0)$.

c) Pruebe que si h es entera y $h(z) \neq 0$ para todo z, entonces $h(z) = e^{g(z)}$ donde $g(z)$ es una primitiva de $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

d) Concluya que si h es entera $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $|h(z)| \leq e^{|z|^n}$ entonces $h(z) = e^{p(z)}$ con p un polinomio de grado menor o igual a n.

P15. Los numeros de Fibonacci están definidos como

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1 \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

Muestre que los c_n son los coeficientes de Taylor de una función racional y determine una expresión cerrada para dicha función.

P16. Encuentre el desarrollo en serie de Laurent de $\frac{1}{z(1-z)}$ en los anillos:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-1| < 1\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z|\}$.

P17. Determine las series de Laurent de las siguientes funciones en los dominios indicados:

a) $\frac{e^{z^2}-1}{z^4}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) $\frac{4}{4z-z^2}$ en $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z-3i| < 5\}$.

P18. Mostrar que el desarrollo de Laurent de la función $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ con respecto al origen es de la forma

$$\tfrac{1}{z} - \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \tfrac{B_k}{(2k)!} z^{2k-1}$$

donde los numeros B_k son conocidos como los números de Bernoulli, todos positivos.

P19. Sea $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$ en $|z| > 1$, $f(2) > 0$. Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de f en $1 < |z| < \infty$.

P20. Suponga que f es analítica en el semiplano superior y que f es periódica de periodo 1.

a) Mostrar que f tiene una expansión de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n z}$$

donde

$$c_n = \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n(x+iy)} dx$$

para cualquier valor de $y > 0$.

b) Suponga además que existe $y_0 > 0$ tal que $f(z) = f(x+iy)$ es acotada en el dominio $y \geq y_0$. pruebe que $c_n = 0$ para $n < 0$.

P21. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Mostrar que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, donde

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\lambda \cos t} \cos nt dt \quad \text{si} \quad n \geq 0.$$

b) Mostrar que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(z^n + \frac{(-1)^n}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, donde

$$b_n = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(nt - \lambda\sin t)dt \quad \text{si} \quad n \geq 0.$$

P22. Sea $f(z) = \text{cotan}(\pi z)$ en $\text{Im}(z) > 0$ muestre que

$$f(z) = -i\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k z}\right) \quad \text{si} \quad \text{Im}(z) > 0$$