Clase Auxiliar: Variable Compleja

Michal Kowalczyk & Emilio Vilches

13 de Octubre de 2008

P1. Sea Ω un dominio acotado y $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua, no constante y holomorfa en Ω. Muestre que el máximo de $|f|$ se alcanza en $\partial\Omega$.

P2. Sean f y g funciones analíticas, en un dominio acotado Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Suponga además que f y g coinciden en $\partial\Omega$. Pruebe que $f = g$ sobre Ω.

P3. Sea f una función analítica, no constante en un dominio acotado Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Suponga además que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Mostrar que $|f(z)|$ alcanza su mínimo valor en $\partial\Omega$.

P4. Sea Ω un dominio acotado y $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua, no constante y holomorfa en Ω. Demuestre que si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial\Omega$ entonces existe un $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$.

P5. Sea $\Omega = \{x + iy\colon |y| < \frac{\pi}{2}\}$ y suponga que f es una función continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω que satisface $|f(z)| \leq 1$ para $z \in \partial\Omega$. Suponga además que existen constantes $0 < \alpha < 1$, $A > 0$ tales que

$$|f(x+iy)| \leq \exp\left(Ae^{\alpha|x|}\right) \quad \forall x+iy \in \Omega \tag{1}$$

Demuestre que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$. Muestre mediante un ejemplo que la conclusion es falsa si f satisface (1) con $\alpha = 1$.
Indicación: Para $\alpha < \beta < 1$ y $\epsilon > 0$ defina $h_\epsilon(z) = \exp(-\epsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z}))$ y aplique el principio del máximo a fh_ϵ en un rectángulo conveniente.

P6. *Desigualdad de Jensen*
Sea $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, f una función holomorfa sobre D_R y continua sobre $\overline{D}_R$, y suponga que $f(0) \neq 0$. Sean $\{z_1, \cdots, z_N\}$ los ceros de f en D_R, contados de acuerdo a su multiplicidad y ordenados de modo que

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots, \leq |z_N|$$

denotaremos $\|f\|_R = \sup\limits_{z \in \overline{D}_R} |f(z)|$.

a) Muestre que

$$|f(0)| \leq \frac{\|f\|_R}{R^N}|z_1 \cdots z_N|$$

Indicación: Sea $g(z) = \prod\limits_{n=1}^{N} \frac{R(z_n - z)}{R^2 - \overline{z}_n z}$ y considere $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$.

b) Sea $v(r)$ el numero de ceros de f en $\overline{D}_R$,y $0 < \alpha_0 < |z_1|$ muestre que

$$\sum_{n=1}^{N} \log(R/|z_n|) = \sum_{n=1}^{N} \int_{|z_n|}^{R} \frac{dx}{x} = \int_{\alpha_0}^{R} \frac{v(x)}{x} dx$$

c) Demuestre la *Desigualdad de Jensen*, esto es,

$$\int_0^R \frac{v(x)}{x} dx \leq \log\left(\frac{\|f\|_R}{|f(0)|}\right)$$

P7. Sea f una función analítica sobre $D = \{|z| < 1\}$, continua sobre $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq 1\}$ y suponga que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$. Suponga además que $f(1/2) = f(i/2) = 0$. Probar que $|f(0)| \leq 1/4$. Usando la función $g(z) = \varphi_{1/2}\varphi_{i/2}$ donde $\varphi_\alpha = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$ muestre que esta cota es óptima.