Transformaciones de Möbius.

Definición: $f\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ se dice transformación de Möbius si

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son tales que $ab - bc \neq 0$. Denotaremos además por $\mathfrak{M}$ el conjunto de todas las transformaciones de Möbius.
Ejemplos

(1) $f(z) = z + a$ (traslación).

(2) $f(z) = e^{i\theta} z$ (rotación).

(3) $f(z) = \lambda z$, $\lambda \geq 0$ (dilatación).

(4) $f(z) = \frac{1}{z}$ (inversión).

P1. Muestre que si $f \in \mathfrak{M}$ entonces f es una composición de $(1) - (4)$ y biyectiva.

P2. Muestre que $(\mathfrak{M}, \circ)$ es un grupo no abeliano.

P3. Muestre que si $f \in \mathfrak{M}$, distinta de la identidad, entonces f tiene a lo mas 2 puntos fijos.
Definición: Si $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ son distintos, se define la razón cruzada como

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}$$

P4. Si $\varphi(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$, muestre que $\varphi \in \mathfrak{M}$ y que φ aplica z_1, z_2, z_3 en $0, 1, \infty$.

P5. Muestre que si la ecuación $[w, a, b, c, d] = [z, z_1, z_2, z_3]$ puede resolverse de la forma $w = \varphi(z)$, entonces φ aplica z_1, z_2, z_3 en a, b, c.

P6. Si $\varphi \in \mathfrak{M}$, demuestre que, para todo $z \in \mathbb{C}$

$$[\varphi(z), \varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)] = [z, z_1, z_2, z_3].$$

P7. Muestre que $\varphi \in \mathfrak{M}$, entonces φ transforma circulos o rectas en circulos o rectas.

P8. Muestre que $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ es real si y sólo si los cuatro puntos están en una misma circunferencia o recta.
Definición: Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto al circulo (o recta) C que pasa por z_1, z_2, z_3 si $[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}$.

P9. Si C es el circulo unitario, encuentre una relación geométrica entre z y z^*, haga lo mismo si C es una recta.

P10. Suponga que z y z^* son simétricos respecto a C. Demuestre que $\varphi(z)$ y $\varphi(z^*)$ son simétricos respecto a $\varphi(C)$, para toda $\varphi \in \mathfrak{M}$.

P11. Diremos que dos funciones de Möbius φ y φ_1 son *conjugadas* si existe una tercera (ψ) tal que $\varphi_1 = \psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi$. Pruebe que toda φ de Möbius con un único punto fijo es conjugada con la función $z \mapsto z + 1$. Pruebe que si φ tiene dos puntos fijos distintos, entonces es conjugada con la función $z \mapsto \alpha z$, con α complejo. ¿Qué se puede decir sobre α dado φ?.

P12. Sea α un número complejo. Demuestre que para toda $\varphi \in \mathfrak{M}$ que tiene a α como su único punto fijo le corresponde un β tal que

$$\frac{1}{\varphi(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \beta.$$

Sea G_α el conjunto de todas estas φ, más la transformación identidad. Demuestre que G_α es un subgrupo de $\mathfrak{M}$ isomorfo al grupo aditivo de todos los numeros complejos.

P13. Sean α y β números complejos distintos, y sea $G_{\alpha,\beta}$ el conjunto de todas las $\phi \in \mathfrak{M}$ que tienen a α y β como puntos fijos. Demuestre que toda $\phi \in G_{\alpha,\beta}$ es un subgrupo de $\mathfrak{M}$ isomorfo al grupo multiplicativo de todos los números complejos distintos de cero.

P14. Construya una transformación de Möbius f tal que

a) f transforma 0 en 1, 1 en 0 e 2 en ∞.

b) f transforma $\{|z-i|=1\}$ en $\{w\colon (1+i)w+(1-i)\overline{w}=0\}$.

c) f transforma $\mathbb{R}\cup\infty$ en $\{|z|=1\}$ y deja fijo el punto -1.

d) f trasforma $\{|z|<1\}$ en $\mathrm{Im}w>0$ y $f(0)=1+2i$.

e) f transforma $\{|z|=1\}$ en si mismo y $\{|z-\frac{1}{4}|\}$ en $\{|z|=r\}$ para algún $r<1$.

P15. Sea $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc=1$ y $H=\{\mathrm{Im}z>0\}$. Muestre que $f(H)=H$ si sólo si a,b,c y d son reales.