Clase Auxiliar: Variable Compleja

Michael Kowalczyc & Emilio Vilches

18 de Noviembre de 2008

P1. Sea Ω un abierto y $\{f_n\}$ una sucesion de funciones holomorfas en Ω tal que $f(z) = \prod f_n(z)$ converge uniformemente en compactos de Ω.

a) Mostrar que
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z) \prod_{n\neq k} f_n(z)$$
converge uniformemente en compactos en Ω y es igual a f'.

b) Suponga que f no es identicamente nula en Ω y sea K un compacto contenido en Ω tal que $f(z) \neq 0 \ \forall z \in K$. Mostrar que
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$
y la convergencia es uniforme en K.

P2. Definamos $\Phi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$. Pruebe lo siguiente:

a) Φ es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en $0, -1, \cdots$ y residuos $\operatorname{Res}(\Phi; n) = -1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $\Phi(1) = -\gamma$ (la constante de Euler).

c) $\Phi'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$.

d) $\Phi(1+z) - \Phi(z) = z^{-1}$.

e) $\Phi(1-z) - \Phi(z) = \pi \cot(\pi z)$.

P3. Sea $f(z) = \Phi(z) + \Phi(z+\frac{1}{2}) - 2\Phi(2z)$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \cdots\}$. pruebe que f es constante y deduzca que
$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = e^{az+b}\Gamma(2z)$$
encuentre a y b y pruebe la fórmula de dupicación de Legendre
$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2z-1}\Gamma(2z)$$

P4. Pruebe la fórmula de Gauss
$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

P5. Teorema de Bohr-Mollerup.
Sea f una función definida sobre $(0, +\infty)$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. Supongamos que f satisface las siguientes propiedades:

a) $\log f(x)$ es una función convexa.

b) $f(x+1) = f(x)\ \forall x$.

c) $f(1) = 1$.

entonces $f(x) = \Gamma(x)\ \forall x$.
Pruebe el teorema, para ello siga los siguientes pasos:

a) Muestre que $f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Muestre que si $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función es convexa entonces

   1) Si $a \leq x < u < y \leq b$ entonces $\frac{g(u)-g(x)}{u-x} \leq \frac{g(y)-g(x)}{y-x}$

   2) Si $a \leq x < u < y \leq b$ entonces $\frac{g(u)-g(x)}{u-x} \leq \frac{g(y)-g(u)}{y-u}$

c) Muestre que si $0 < x \leq 1$ y $n \geq 2$, entonces

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{(n-1)-n} \leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n)-n} \leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1)-n}$$

y deduzca que

$$\frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}[\frac{x+n}{n}]$$

d) Muestre que $\Gamma(x) = f(x)$ para $0 < x \leq 1$ y concluya.