# Examen Recuperativo MA 36A-1, 2005/Primavera, M. Kowalczyk

**1.** Demuestre la siguiente versión del Teorema de Liouville: Sea $f$ una función entera tal que para cierto entero $k \geq 0$ se tiene

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

con $A, B$ constantes. Entonces $f$ es un polinomio de grado $n \leq k$. *Indicación: Principio de inducción matemática.*

**2.** Sean $f$ y $g$ funciones analíticas regulares en un dominio compacto $\Omega$. Demuestre que $|f(z)| + |g(z)|$ alcanza su valor máximo en $\partial\Omega$. *Indicación: Sea $z_0 \in \Omega$ un punto arbitrario. Considere $f(z)e^{i\alpha} + g(z)e^{i\beta}$ donde $\alpha = -arg\, f(z_0)$, $\beta = -arg\, g(z_0)$. Usando la fórmula integral de Cauchy demuestre que $z_0$ no puede ser el punto de máximo local de $|f(z)| + |g(z)|$.*

**3.** Demuestre que

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} zt}{t}\, dt$$

es una función entera.

(a) usando el Teorema de Morera.

(b) calculando la expansión de $f$ en series de Taylor.

**4.** Encuentre el número de ceros de

(a) $f(z) = 3e^z - z$;

(b) $g(z) = \frac{1}{3}e^z - z$; en $D(0,1)$.

**5.** Encuentre una funcion armónica $u$ en $\operatorname{Im} z > 0$ tal que

$$\lim_{y \to 0} u(x,y) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \pi, & x < 0. \end{cases}$$

# Control 3 MA 36A-1, 2005/Primavera, M. Kowalczyk

**1.** Sea $f$ una función analítica regular en $D(0,1)$. Demuestre que si $|f(z)| \leq A$ en $D^+(0,1) = D(0,1) \cap \{\mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ y $|f(z)| \leq B$ en $D^-(0,1)$ entonces $|f(0)| \leq \sqrt{AB}$. *Indicación: Considere* $g(z) = f(z)f(-z)$.

**2.** Clasifique las singularidades de

$$f(z) = \frac{\exp\left(1/z^2\right)}{z-2}.$$

Luego, encuentre la expansión de $f$ en serie de Laurent en torno de $z = 0$. Finalmente, encuentre los residuos de $f$ en sus singularidades.

**3.** Sea $f$ una función analitica y regular en $D(0,1)$. Sea $z_0 \neq 0$ el único cero de $f$ en $D(0,1)$, $|z_0| < 1$. Demuestre que si $m > 0$ es entero entonces se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^m \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = k z_0^m$$

donde $k$ es la multiplicidad de $z_0$ como el cero de $f$. *Indicación: Use la expansion de Taylor de* $z^m$ *en torno de* $z = z_0$.

**4.** Encuentre la descomposición en producto infinito de $\cos(\pi z)$.

**5.** Encuentre una función armónica en $D(0,1)$ tal que el valor de la frontera este dado por $u(x,y) = x^2$.