Control 1 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.
Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1 (40 %). Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio topológico y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre X, esto es, $\mathcal{R}$ refleja, simétrica y transitiva. Denotemos por $[x]$ la clase de equivalencia de x, es decir

$$[x] = \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Se denota $X/\mathcal{R}$ el conjunto de las clases de equivalencia. Sea $\nu : X \to X/\mathcal{R}$ la aplicación canónica definida por $\nu(x) = [x]$.

(a) (1 pto.) Muestre que la familia

$$\mathcal{O}_{\mathcal{R}} = \left\{A \in \mathcal{P}(X/\mathcal{R}) \mid \nu^{-1}(A) \in \mathcal{O}\right\}$$

es una topología sobre $X/\mathcal{R}$.

El espacio topológico $(X/\mathcal{R}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$ se llama *espacio topológico cuociente* del espacio X por la relación $\mathcal{R}$.

(b) (1 pto.) Pruebe que la aplicación $\nu : (X, \mathcal{O}) \to (X/\mathcal{R}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$ es continua.

(c) (1 pto.) Muestre que $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ es la topología más fina sobre $X/\mathcal{R}$ que hace continua a ν.

(d) (1 pto.) Pruebe que si $(X/\mathcal{R}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$ es separado, entonces para cualquier $x \in X$ el conjunto $[x]$, mirado como subconjunto de X, es cerrado.

(e) (2 ptos.) Considere $X = \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$ y $\mathcal{O}$ la topología inducida en X por la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathcal{R}$ la relación definida por

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff \begin{cases} x + x' = 0 \text{ e } y = y' \neq 0 \\ \text{o bien } (x, y) = (x', y'). \end{cases}$$

1. Pruebe que $(X, \mathcal{O})$ es separado usando que $\mathbb{R}^2$ lo es.
2. Describa $X/\mathcal{R}$ por extensión y pruebe que las clases de equivalencia son conjuntos cerrados en $(X, \mathcal{O})$.
3. Pruebe que $[(-1, 0)]$ y $[(1, 0)]$, como elementos de $(X/\mathcal{R}, \mathcal{O}_{\mathcal{R}})$, no se pueden separar, es decir, no existen U, V vecindades disjuntas de $[(-1, 0)]$ y $[(1, 0)]$ respectivamente.

Observe que este ejemplo nos muestra que la recíproca de la parte (d) no es cierta, aún bajo la hipótesis extra que el espacio $(X, \mathcal{O})$ sea separado.

Problema 2 (20 %). Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio topológico.

(a) (2 ptos.) Sea $A \subset X$ un subconjunto de X. Demuestre que A es denso en X (i.e. $\bar{A} = X$) si y sólo si $\forall U$ abierto no vacío de X, $U \cap A \neq \emptyset$.

(b) (2 ptos.) Demuestre que si X tiene una base numerable $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, entonces X es separable. *Indicación:* $\forall i \in \mathbb{N}$, elija un punto $x_i \in B_i$ y tome $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$.

(c) (2 ptos.) Sea $(Y, \mathcal{T})$ otro espacio topológico y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva.

1. Pruebe que si $A \subset X$ es denso en X, entonces $f(A)$ es denso en Y. *Indicación:* use (a).
2. Deduzca de 1. que si $(X, \mathcal{O})$ es separable, entonces también lo es $(Y, \mathcal{T})$.

Problema 3 (40 %). Considere las familias de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\, [a,b) \times [c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \leq b, c \leq d\} \\ \mathcal{O} &= \{\, \bigcup_{i \in I} B_i \mid I \text{ es un conjunto, } B_i \in \mathcal{B} \ \forall i \in I\}. \end{aligned}$$

(a) (1 pto.) Mostrar que $\mathcal{O}$ es una topología. Observe que $\mathcal{B}$ es una base de abiertos para $\mathcal{O}$.

(b) (1 pto.) Mostrar que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ es separable.

(c) (1 pto.) Sea $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que $\mathcal{O}$ es más fina que $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$.

(d) (1 pto.) Mostrar que la aplicación siguiente es continua:

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}}) \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y, \end{array}$$

donde $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ es la topología usual de $\mathbb{R}$. Deduzca que el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$. Deduzca, usando (c), que D es también un cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$. *Indicación:* para ver la continuidad de f puede hacerlo gráficamente.

(e) (1 pto.) Demuestre que $\mathcal{O}_D$, la topología inducida por $\mathcal{O}$ sobre D, es la topología discreta, i.e., $\mathcal{O}_D = \mathcal{P}(D)$.

(f) (1 pto.) Muestre que $(D, \mathcal{O}_D)$ **no** es separable.

Así, se ha probado que un subespacio de un espacio separable E **no** necesariamente es separable. Sin embargo, cuando E es además un espacio *métrico*, entonces todo subespacio será separable.

Tiempo: 4hr. 30min. Buena suerte.