Trabajo Dirigido # 1

Problema 1.

(a) Sea $(E, \mathcal{O})$ un espacio localmente compacto. Dado $w \notin E$, consideramos los conjuntos $E' = E \cup \{w\}$, y $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup \{\mathcal{C}_{E'} K, K$ compacto de $E\}$. Muestre que $(E', \mathcal{O}')$ es un espacio topológico en el cual $(E, \mathcal{O})$ es un subespacio.

(b) Muestre que E' es separado.

(c) Sea $(U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de E', muestre que existe un indice i_0 tal que $U_{i_0} = E \setminus K \cup \{w\}$ donde K es un compacto de E. Deduzca que E' es compacto.

(d) Pruebe que si E no es compacto entonces $\overline{E}^{\mathcal{O}'} = E'$. Deduzca el *teorema de Alexandroff*: todo espacio localmente compacto E está inmerso en un espacio compacto E'.

(e) ¿Cómo queda $\mathbb{R}$ al *compactificarlo*?, considere $w = +\infty$.

Problema 2.

Sea (X, d) un espacio métrico y (x_n) sucesión convergente a $x_0 \in X$. Pruebe que $C = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es compacto.

Problema 3.

Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Dado $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X, decimos que $\lambda > 0$ es un *número de Lebesgue para* $\mathcal{U}$ si para cualquier $x \in X$ existe un $i \in I$ tal que $B(x, \lambda) \subset U_i$, es decir, si toda bola de radio λ está contenida en algún U_i. Pruebe que todo recubrimiento abierto de X posee un número de Lebesgue.

Problema 4.

Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado y no vacío de X. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ definda como:

$$f(x) = \text{ínf}\{d(x, y) | y \in C\}$$

Pruebe que f es continua y que $f(x) = 0 \iff x \in C$

Problema 5.

Sea (X, δ) espacio métrico con diámetro de $X < \infty$, y sea $E = \{A \subset X | A \neq \phi \wedge A$ es cerrado en $X\}$. Defina

$$\rho(A, B) = \sup_{x \in A} \delta(x, B)$$

y

$$d(A, B) = \text{máx}(\rho(A, B), \rho(B, A)) \quad \forall A, B \in E$$

Muestre que d es métrica sobre E. Verifique que la función

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & (X, \delta) & \longrightarrow & (E, d) \\ & x & \longmapsto & \{x\} \end{array}$$

es una isometría.