Control 2 MA38B Primavera 2008

1. Sea (X,d) espacio métrico y $A \subset X, A \neq \emptyset$. Pruebe las siguientes equivalencias

$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad d(x,A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_n)_n, x_n \in A; x_n \to x$$

2. Sea (E,d) espacio métrico y sean $A \subset E$ compacto, $B \subset E$ cerrado tales que $dist(A,B) = 0$. Demuestre que

$$A \cap B \neq \emptyset$$

Dé un contraejemplo en caso que A sólo sea cerrado.

3. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de partes conexas con la siguiente propiedad

$$\forall i, j \in I \quad \exists k \in I \quad \text{ tal que } \quad C_i \cup C_j \subset C_k$$

Pruebe que $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo.
Indicación *Recuerde que un espacio topológico A es conexo ssi las únicas funciones $f : A \to \mathbb{Z}$ continuas son las constantes.*

4. Sean $S_n = [(0,0)\ ,\ (1, 1/n)] \subset \mathbb{R}^2$, $n \geq 1$ y S_0 un intervalo cualquiera contenido en $[0,1] \times \{0\}$ (ver figura)
   (a) Demuestre que $S = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} S_n$ es conexo.
   (b) Demuestre que $S' = S \setminus \{(0,0)\}$ no es conexo. Encuentre sus componentes conexas.

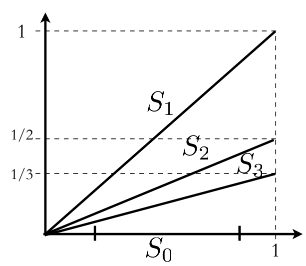

Figura 1: Conjuntos S_n

5. Considere la función $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por la relación

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

y sea

$$\Gamma \equiv \text{grafo}(f) \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

   a) Pruebe que Γ es conexo.
   b) Pruebe que no es conexo por caminos.

6. Considere en $\mathbb{R}$ la métrica:

$$d(x,y) = |\operatorname{arc\,tg}(x) - \operatorname{arc\,tg}(y)|$$

Pruebe que $\mathbb{R}$ es incompleto con esta métrica, i.e., que existen sucesiones de Cauchy que no convergen (exhiba un ejemplo).

7. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Pruebe que X posee un subconjunto $A \subset X$ que es denso y numerable.

8. Sea $\mathcal{C}$ el espacio de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Considere en $\mathcal{C}$ las dos métricas siguientes:

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \\ d_\infty(f,g) &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|\,. \end{aligned}$$

   a. Pruebe que $d_1(f,g) \leq d_\infty(f,g)$ $\forall f, g \in \mathcal{C}$. Concluya que la topología engendrada por d_∞ es estrictamente más fina que la engendrada por d_1.
   b. Encuentre una sucesión convergente según d_1 pero que no converja según d_∞.
   c. Pruebe que $(\mathcal{C}, d_1)$ no es completo, es decir, encuentre una sucesión de Cauchy que no converja en $\mathcal{C}$.

9.* Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : (X,d) \to (X,d)$ una función que preserva la métrica (i.e. $d(x,y) = d(f(x), f(y))$).

   (a) Pruebe que f es inyectiva y continua.
   (b) Pruebe que $f(X)$ es cerrado.
   (c) Concluya que $f(X) = X$. Razone por contradicción suponiendo que existe $x \in X \setminus f(X)$ y estudie la sucesión $x_{n+1} = f^n(x),\ x_1 = x$.

10.* Sea (E, d) un espacio métrico completo y sea $\Omega \subset E$ un abierto en E $(\Omega \neq \emptyset, \Omega \neq E)$. Para todo $x, y \in \Omega$ se define:

$$\delta(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,\Omega^c)} - \frac{1}{d(y,\Omega^c)} \right|$$

   (a) Pruebe que δ es métrica en Ω.
   Indicación *Comience probando que* $\forall x \in \Omega, \quad 0 < d(x,\Omega^c) < \infty$.
   (b) Fije $x \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Pruebe que existe $\eta > 0$ tal que

$$B_d(x,\varepsilon) \supset B_\delta(x,\eta)$$

   (c) Fije $x \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Pruebe que existe $\eta > 0$ tal que

$$B_\delta(x,\varepsilon) \supset B_d(x,\eta)$$

   Indicación *Denote* $\alpha = d(x,\Omega^c) > 0$. *Pruebe que es posible escoger* η *suficientemente pequeño (explicite una cota superior para* η*) de modo que*

$$\left| \frac{1}{d(x,\Omega^c)} - \frac{1}{d(y,\Omega^c)} \right| < \varepsilon/2$$

   (d) Concluya que (Ω, δ) es espacio métrico completo.

11.* Como es usual, el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ considérelo dotado de su topología natural (trazas de abiertos en $\mathbb{R}$)

   a. Demuestre que todo compacto en $\mathbb{Q}$ es compacto en $\mathbb{R}$.
   b. Demuestre que si K es un compacto en $\mathbb{R}$ de interior no vacío ($\mathring{K} \neq \emptyset$), entonces K no es compacto en $\mathbb{Q}$.
   c. Pruebe que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.
   d. Dé un ejemplo de dos conjuntos que no sean localmente compactos, pero que su unión sí lo sea.
   Encuentre también un ejemplo de un conjunto localmente compacto cuyo complemento no lo sea.
   Indicación *Analice la topología de* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *y utilice lo aprendido en el ejercicio anterior.*

Los problemas con asterisco tienen doble ponderación. Elija y responda solo dos de estos.
Tiempo: 5:00 hrs