$\Rightarrow$ T no puede ser contin...

Veamos que T es cerrado, ie, que su grafo es cerrado.

Sea $f_n \to f$ en X y $T(f_n) \to y$ en Y

pdq $Tf = y$, ie, $T(f_n) \to T(f)$, con $f_n \to f$

$$\|Tf_n - Tf\|_{\ell_1} = \sum_i i \| f_n(i) - f(i) \|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|Tf_n - Tf\|_{\ell_1} = \lim_{n\to\infty} \sum_i i |f_n(i) - f(i)| = \lim_{n\to\infty} \int x|f_n(x) - f(x)| d\mu(x)$$

Como $|f_n(i) - f(i)| \leq \sum_i |f_n(i) - f(i)| \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$

$\Rightarrow f_n \to f$ puntualmente. $\Rightarrow x f_n(x) \to x f(x)$ puntualmente

Además,

$x|f_n(x) - f(x)| \leq x|f_n(x)| + x|f(x)|$

Como $T(f_n)$ converge en $L^1(\mu)$, por el "recíproco" del T.C.D, se tiene que $\exists\, n_k$ subsucesión con $T(f_{n_k})$ dominada en $L^1(\mu)$ (digamos $|T(f_{n_k})(i)| \leq |g(i)|$).

Así, $\forall k$:

$x|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq |g(x)| + x|f(x)| \in L^1(\mu)$, pues $f \in X$

Por TCD, $\int x|f_{n_k}(x) - f(x)| d\mu(x) \longrightarrow 0$ con $k \to \infty$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|Tf_{n_k} - Tf\|_{\ell_1} = 0$, ie, $Tf_{n_k} \xrightarrow{\ell_1} Tf$

Pero Tf_n es convergente en ℓ_1 $\Rightarrow Tf = Y$ //

(c) T es claramente invertible. $(T: X \to Y)$

Sea $S = T^{-1}$ $(S: Y \to X)$.

Así, S es sobreyectiva.

Notar que $Sf(i) = \frac{1}{i} f(i)$

$\|Sf\|_{\ell_1} = \sum_i \frac{1}{i}|f(i)| \leq \sum_i |f(i)| = \|f\|_{\ell_1} \Rightarrow S$ es continua.

Y si S fuese abierta, $T^{-1}(U)$ sería abierto $\forall U$ abierto

$\Rightarrow$ T sería continua. Luego S no es abierta

P. Sea $Y = L^1(\mu) = \ell^1(\mathbb{R})$, con μ la medida cuenta puntos sobre $\mathbb{N}$. Sea $X = \{ f \in Y : \sum_{i=1}^{\infty} n f(n) < \infty \}$, equipado con la norma $L^1(\mu)$.

(a) X es un subespacio propio y denso de Y. Luego no es completo.

(b) Defina $T : X \to Y$ por $Tf(n) = nf(n)$. Entonces T es cerrado pero no continuo.

(c) Sea $S = T^{-1}$. Entonces $S : Y \to X$ es continuo y sobreyectivo y no abierto.

---

sol//

a) Sea $f(n) = 1/n^2 \Rightarrow f \in Y$, pero $f \notin X \Rightarrow X \subsetneq Y$

Ahora, dado $h \in Y$, tomar $h^{(N)} = \begin{cases} h(n) & , \text{si } n \leq N \\ 0 & , \text{si } n > N \end{cases}$

$\Rightarrow h^{(N)} \in X$, $\forall N$.

Además, $\|h^{(N)} - h\|_{\ell^1} = \sum_{i \geq N+1} |h(i)| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$, pues $h \in \ell^1$.

$\therefore h^{(N)} \xrightarrow[\ell^1]{} h \Rightarrow \overline{X} = Y$.

De lo anterior, X no es cerrado (pues $X \subsetneq \overline{X}$), y luego no puede ser completo.

b) Veamos que T no es continuo.

Tomemos, para $q \in (0,1)$, $f(n) = q^n$.

$\Rightarrow f \in Y \quad \left(\|f\|_{\ell^1} = \frac{q}{1-q} \right)$

$$\|Tf\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{\infty} n q^n = q \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} = q \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)' = q \left(\frac{1}{1-q} \right)'$$

$$= \frac{q}{(1-q)^2}$$

$\Rightarrow \frac{\|Tf\|}{\|f\|} = \frac{1}{1-q}$, y tomando $q \to 1$, $\frac{\|Tf\|}{\|f\|} \to \infty$