SIMETRÍA Y OPERADOR ADJUNTO (EN ESPACIOS DE HILBERT)

Sea $S: D_S \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineal con $\overline{D_S} = \mathcal{H}$. Consideramos el subespacio de $\mathcal{H}$:

$$\boxed{D_{S^*} = \{y \mid l_y : D_S \to \mathbb{C} \text{ es continuo}\}} \quad \text{con } l_y(x) = \langle Sx, y\rangle$$

Como $\overline{D_S} = \mathcal{H}$, para todo $y \in D_{S^*}$, l_y se puede extender a todo $\mathcal{H}$ preservando la continuidad. Entonces por Riesz, existe un único $z = S^*(y)$ tq:

$$\underset{\substack{\parallel \\ \langle Sx, y\rangle}}{l_y(x)} = \langle x, S^*(y)\rangle$$

$S^*: D_{S^*} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ resulta ser lineal y cerrada (verificarlo!)
A este operador se le llama la <u>ADJUNTA DE S</u> y satisface:

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle \quad \forall x \in D_S \;\; \forall y \in D_{S^*}$$

Def.:
- S se dirá AUTOADJUNTA si $S = S^*$
- S se dirá SIMÉTRICA si $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \quad \forall x, y \in D_S$

Quisiéramos decir que estas 2 propiedades son equivalentes, sin embargo ésto no es cierto por los dominios (no siempre $D_S = D_{S^*}$).

Def.: S se dirá MAXIMAL SIMÉTRICA si S es simétrica y $\forall T$ simétrica tal que $S \subset T$, entonces $S = T$.

Veamos algo sencillo:

<u>Proposición</u>: [S autoadjunto $\Rightarrow$ S maximal simétrico]

<u>Demo.</u>: Claramente S simétrica ($D_S = D_{S^*}$). Sea entonces T simétrica tal que $S \subset T$. Entonces $T^* \subset S^*$ (verificarlo!)

$$\Rightarrow \; S \subset T \subset T^* \subset S^*$$

$=$ (la veremos a continuación)

$$\therefore \; S = T \qquad \blacksquare$$

<u>Proposición</u>: [S simétrica, entonces $S \subset S^*$]

<u>Demo.</u>: Como S simétrica: $\quad l_y(x) = \langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \quad \forall x, y \in D_S$

$\therefore \; \|l_y\|_* \leq \|Sy\|$ luego $y \in D_{S^*}$

Es decir: $D_S \subset D_{S^*}$

Además: $\forall x, y \in D_S$ $\quad \underset{\substack{\parallel \\ \langle x, S^*y\rangle}}{\langle Sx, y\rangle} = \langle x, Sy\rangle$

$$\Rightarrow \langle x, Sy - S^*y\rangle = 0 \quad \forall x \in D_S \qquad / \text{tomando adh } \overline{D_S} = \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow Sy = S^*y$$

$$\therefore \; S \subset S^* \quad //$$

Más aún, son equivalentes (probarlo)

<u>Teorema</u>: [S simétrica sii $S \subset S^*$]

A continuación les dejo un ejemplo que muestra la importancia del dominio para una aplicación, ya sea para la simetría o calcular la adjunta.

P1) Recordamos primero que:

f abs. continua $\Rightarrow$ f es derivable c.t.p.

Considere $\mathcal{H}=L^2(0,1)$ complejo y los subespacios densos:

$$\left.\begin{aligned} D_{T_1} &= \{f \mid f \text{ abs. continua en } [0,1] \text{ con } f' \in \mathcal{H}\} \\ D_{T_2} &= D_{T_1} \cap \{f \mid f(0)=f(1)\} \\ D_{T_3} &= D_{T_1} \cap \{f \mid f(0)=0=f(1)\} \end{aligned}\right\} D_{T_3} \subsetneq D_{T_2} \subsetneq D_{T_1}$$

Y se definen $T_k : D_{T_k} \subseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ como $T_k f = i f'$ $f \in D_{T_k}$

Pruebe que:

a) T_1 no es simétrica, pero T_2 y T_3 sí

b) $T_1^* = T_3$, $T_2^* = T_2$, $T_3^* = T_1$

Sol.:

a) T_2 es simétrica: $\langle T_2 x, y\rangle = \langle x, T_2 y\rangle$ $\forall x,y \in D_{T_2}$

Sean $x,y \in D_{T_2}$

$$\langle T_2 x, y\rangle = \int_0^1 i x'(t)\,\overline{y(t)}\,dt = i\left[\cancel{x(1)\overline{y(1)}} - \cancel{x(0)\overline{y(0)}} - \int_0^1 x(t)\,\overline{y'(t)}\,dt\right]$$

$$= \int_0^1 x(t)\,\overline{i y'(t)}\,dt = \langle x, T_2 y\rangle$$

El mismo argumento sirve para T_3.

T_1 no es simétrica: para ésto basta escoger $x,y \in D_{T_1}$ tq $x(1)\overline{y(1)} - x(0)\overline{y(0)} \neq 0$

b) Sean $m+k=4$ $\quad \begin{array}{c|ccc} m & 1 & 2 & 3 \\ k & 3 & 2 & 1 \end{array}$

Sup. ahora que $g \in D_{T_k^*}$ y $\phi = T_k^* g$ $\quad \Phi(t) = \int_0^t \phi(s)\,ds \Rightarrow \phi = \Phi'$

Si $f \in D_{T_k}$, tendremos:

$$\langle T_k f, g\rangle = \int_0^1 i f' \bar{g}\,dt$$

$$\overset{\shortparallel}{\langle f, T_k^* g\rangle} = \int_0^1 f\, \overline{T_k^* g}\,dt = \int_0^1 f(t)\overline{\phi(t)}\,dt = \int_0^1 f(t)\overline{\Phi'(t)}\,dt = f(1)\overline{\Phi(1)} - 0 - \int_0^1 f'(t)\overline{\Phi(t)}\,dt$$

$$\therefore \boxed{\int_0^1 i f' \bar{g}\,dt = f(1)\overline{\Phi(1)} - \int_0^1 f' \overline{\Phi}\,dt}$$

Ahora, si $k=1$ o 2 D_k contiene las ctes. no nulas, por lo que tomando $f \equiv c \neq 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = c \cdot \overline{\Phi(1)} - 0 \Longrightarrow \overline{\Phi(1)} = 0 \quad (*)$$

Para $k=3$, se cumple que $f(1)=0$, por lo tanto para $k=1,2,3$ vale lo sgte.:

$$\boxed{\int_0^1 i f' \bar{g}\,dt = -\int_0^1 f' \overline{\Phi}\,dt}$$

$$\Rightarrow i \int_0^1 f'(\overline{g} - i\overline{\Phi(t)})\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 f'(\overline{g(t) + i\Phi(t)})\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 i f'(\overline{\Phi(t) - i g(t)})\, dt = 0$$

$$\therefore \langle T_k f, \Phi - ig \rangle = 0 \quad \forall f \in D_{T_k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi - ig \in R(T_k)^{\perp} \quad \forall g \in D_{T_k^*}}$$

<u>k=1</u>] Tomando integrales de fcs en L^2 se obtiene que $R(T_1) = L^2 = \mathcal{H} \Rightarrow R(T_1)^{\perp} = \{0\}$

$$\therefore \Phi = i \cdot g$$

Recordemos además que $\Phi(0) = 0$ y $\Phi(1) = 0 \Rightarrow \Phi \in D_{T_3}$

$$\Rightarrow g \in D_{T_3}$$

$$\therefore D_{T_1^*} \subseteq D_{T_3} \quad (*)$$

Por otra parte, si $g \in D_{T_1^*}$

$$T_1^* g = \phi = \Phi' = i \cdot g' \overset{(*)}{=} T_3 g$$

$$\therefore T_1^* \subseteq T_3$$

La otra inclusión es breve: Si $f \in D_{T_1}$ y $g \in D_{T_3}$

$$\langle T_1 f, g \rangle = i\left[f(1)\cancel{g(1)}^{0} - f(0)\cancel{g(0)}^{0} - \int_0^1 f \cdot \overline{g'(t)}\, dt\right] = \int_0^1 f \cdot \overline{ig'}\, dt$$

$$= \langle f, T_3 g \rangle$$

$\therefore$ Todo elem. de D_{T_3} satisface la ecc. de la adjunta y: $T_3 \subseteq T_1^*$, pues

$\ell_g(f) = \langle T_1 f, g \rangle = \int_0^1 i f' \cdot \overline{g}\, dt$

Notar que $\forall g \in D_{T_3}$ $\ell_g(f)$ es contínua $|\ell_g(f)| \leq \|f\| \cdot \|T_3 g\|$

$$\therefore \boxed{T_1^* = T_3}$$

Ahora caractericemos para $k=2$ y 3 al espacio $R(T_k)^{\perp}$

Sea $h \in R(T_k)$, entonces $\exists f$ abs cont. $f(0)=f(1)$ tq $h = if'$

$$\Rightarrow i\int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 h(t)dt$$

$$i\int_0^1 f'(t)dt = i[f(1)-f(0)] = 0$$

$$\therefore R(T_k) = \{u \in L^2(0,1) \mid \int_0^1 u(t)dt = 0\} \cong L^2(0,1)/\cancel{\mathbb{R}}$$

opto. $\langle 1 \rangle$

$\underline{R(T_k)^{\perp}}$ $h \in L^2 = R(T_k) \oplus R(T_k)^{\perp}$

$$\text{Sea } \tilde{h} = h - \underbrace{\int_0^1 h(t)dt}_{\bar{h}} \Rightarrow \int_0^1 \tilde{h}(t)dt = 0$$

$$\Rightarrow h = \underset{R(T_k)}{\tilde{h}} + \bar{h}$$

~~Por Teo de la proyección~~

Falta ver que la descomposición es única:

Supongamos $h = \tilde{h}_1 + \bar{h}_1 = \tilde{h}_2 + \bar{h}_2$

Reducimos al caso $0 = \tilde{h}(t) + \int_0^1 h(t)dt$

$\Rightarrow \tilde{h}$ es cte $c.t.p. = c$, pero $\int_0^1 \tilde{h}(t) = 0$

$\Rightarrow c = 0$ y $\tilde{h}(t) = 0$

$\Rightarrow h = 0$ ie $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2$

En definitiva. $\boxed{R(T_k)^{\perp} = \langle \{1\} \rangle}$

Luego si $L^2 = R(T_k) \oplus \langle 1 \rangle$

$$\Phi - ig = \text{cte} \Rightarrow g = \frac{\Phi + C}{i} = -i\Phi + \tilde{C}$$

$\underline{k=3}$ g es abs. continua y $g' = -i\phi = -iT_3^* g \in L^2 \Rightarrow g \in D_{T_1}$

$$\therefore D_{T_3^*} \subseteq D_{T_1}$$

Además: $T_3^* g = \phi = (ig + \tilde{C})' = ig' = T_1 g$

$$\therefore \boxed{T_3^* \subseteq T_1}$$

Además, repitiendo las justificaciones de antes se ve que $T_1 \subseteq T_3^*$

$$\therefore \boxed{T_3^* = T_1}$$

$\underline{K=2}$ Ya sabemos que $D_{T_2} \subseteq D_{T_2^*}$. Falta ver la otra inclusión.

$$L^2 = R(T_2) \oplus \langle 1 \rangle \quad y \quad g = -i\Phi + \tilde{C}$$

Tb sabemos que g es a.c. y $\dot{g} \in L^2$. Falta ver que $g(0) = g(1)$

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt = \int_0^1 -i \cdot \phi(t) dt = -i \cdot \Phi(1) = 0 \text{ por } (*)$$

$$\therefore D_{T_2^*} \subseteq D_{T_2}$$

y como T_2 simétrica $\quad T_2^* = T_2$ ■

Moralejas:

- No toda aplicación simétrica es autoadjunta (T_3)
- La adjunta puede ser una extensión (T_3) o restricción (T_1) de la aplicación.
- T_2 es una extensión a.a. de T_3 (simétrica)
- T_1 es una extensión de T_2 (a.a) que no es siquiera simétrica
- T_3 (simétrica) posee una adjunta (T_1) que no es simétrica