P2) Un operador $S:D(S)\subset\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ simét. y densa^{te} def. se dice acotado inferiormente (o semiacotado) si:

$$\langle Sx,x\rangle \geq \alpha\|x\|^2 \qquad x\in D(S)$$

Para algún $\alpha\in\mathbb{R}$. Caso particular: S positivo si $\alpha=0$
A continuación probaremos que todo operador semiacotado, posee una extensión autoadjunta:

Teo. [Friedrichs 1934, Von Neumann 1932]

$\boxed{\text{Todo op. semiacotado } S \text{ posee una extensión a.a. con la misma cota inferior de } S.}$

Demo.: Supongamos primero $\alpha=1$. Entonces la forma sesquilineal

$\langle x,y\rangle_S=\langle Sx,y\rangle$ es un pdcto interno tq: $\|x\|_S\geq\|x\|$

para todo $x\in D(S)$. En consecuencia la inyección:

$$i:(D(S),\|\cdot\|_S)\longrightarrow(\mathcal{H},\|\cdot\|)$$

se puede extender por continuidad a $J:\mathcal{H}_S=\overline{D(S)}^{\|\cdot\|_S}\longrightarrow\mathcal{H}$ con $\|J\|\leq 1$.

Afirmación: $\langle x,y\rangle_S=\langle Sx,Jy\rangle \qquad x\in D(S),\ y\in\mathcal{H}_S$

Ya sabemos que se cumple en $y\in D(S)$. Sea $(y_n)_n\subseteq D(S)$ $y_n\longrightarrow y\in\mathcal{H}_S$

$$\langle Sx,Jy\rangle=\lim\langle Sx,Jy_n\rangle=\lim\langle x,y_n\rangle_S=\langle x,y\rangle_S$$

Sea ahora $y\in\mathcal{H}_S$ tq $Jy\in D(S^*)$. Escogiendo una secuencia $y_n\in D(S)$ $y_n\longrightarrow y$:

$$\langle S^*Jy,Jy\rangle=\lim\langle S^*Jy,Jy_n\rangle=\lim\langle Jy,Sy_n\rangle \quad (*)$$
$$=\lim\langle y,y_n\rangle_S=\|y\|_S^2\geq\|Jy\|^2$$

Con lo cual se concluye que J es inyectiva, de manera que $\mathcal{H}_S$ puede ser considerado un subespacio de $\mathcal{H}$. Además:

$$T=S^*|_{J(\mathcal{H}_S)\cap D(S^*)}$$

Resulta ser simétrico (usar $(*)$ $\langle S^*Jy,Jx\rangle$ + conjugación $\langle Jy,S^*Jx\rangle$) y semiacotado en $\mathcal{H}$ con $\alpha=1$. Más aún, como $J(\mathcal{H}_S)\supseteq D(S)$ y $D(S^*)\supseteq D(S)$

$$S\subseteq T\subseteq S^*$$

Sea $J^*:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}_S$ la adjunta de J. Entonces JJ^* es positivo y acotado sobre $\mathcal{H}$ y para cada $x\in\mathcal{H}$, $y\in D(S)$ tendremos que:

$$\langle \underbrace{Sy}_{\in D(S)},J\underbrace{J^*x}_{\in\mathcal{H}_S}\rangle\overset{Af.}{=}\langle y,\underbrace{J^*x}_{\in\mathcal{H}_S}\rangle_S=\langle Jy,x\rangle=\langle y,x\rangle$$

Lo que muestra que $JJ^*x\in D(S^*)$ (hace continua a $l_{JJ^*x}(y)$)

y $S^*JJ^*x=x$.

También se observa que $JJ^*x \in D(T)$ y $TJJ^* = I$
Luego $T \supseteq (JJ^*)^{-1}$ y como JJ^* es autoadjunta, entonces $(JJ^*)^{-1}$ es autoadjunta.

En particular, $(JJ^*)^{-1}$ es simétrico maximal (+), y como T es simétrico, se tiene que

$$T = (JJ^*)^{-1}$$

Lo que implica $T = T^*$

Para el caso general, consideramos α la mayor cota inferior para S, entonces $S + (1-\alpha)I$ está densamente definido y es simétrico además

$$S + (1-\alpha)I \geq I$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \langle (S+(1-\alpha)I)x, x \rangle &= \langle Sx, x \rangle + (1-\alpha)\|x\|^2 \\ &\geq \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

Entonces, existe $T_0 \geq I$ autoadjunto que extiende $S+(1-\alpha)I$, luego $T = T_0 + (\alpha - 1)I$ es una extensión autoadjunta de S con

$$T \geq \alpha I$$

■

(+) Un op. $S: D_S \to H$ se dice maximal simétrico si S es simétrico y $\forall T$ simétrico tq $S \subset T$, $S = T$.

Notar que todo op. autoadjunto S es maximal simétrico. En efecto: Si T simét. es tq $S \subseteq T \Rightarrow T^* \subseteq S^*$

$$\Rightarrow \underbrace{S \subseteq T \subseteq T^* \subseteq S^*}_{=} \qquad \therefore S = T$$

Ejemplo:

1) $\Delta : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ $\qquad \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$

$$\langle \Delta f, f \rangle = \int_\Omega \Delta f \cdot \bar{f} = \cancel{\int_{\partial\Omega} f \cdot \nabla \bar{f} \cdot n\, ds}^{\,0} - \int_\Omega |\nabla f|^2 dx = -\|\nabla f\|_2 \leq 0$$

$\Rightarrow -\Delta$ es simétrico y positivo

Por el Teo. de Friedrichs existe una extensión autoadj. y positiva de $-\Delta$. El espacio energético será un espacio de Sobolev $(H_0^1(\Omega))$

2) $A : D(A) \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ $\qquad Au(x) = -[p(x)u'(x)]' + q(x)u(x)$

con $p(x) \geq 0$, $q(x) \geq q_0 > 0$ $\quad p, p', q'$ continuas

$$D(A) = \{ u \in \mathcal{C}^2(0,1) \mid u(0) = 0,\ u'(1) + h u(1) = 0 \}$$

con $h \geq 0$