MATERIAL ADICIONAL MA48D

Fecha / Date: 3-10-08

P1 [DESCOMPOSICIÓN POLAR DE UN OPERADOR LC]

Sea $\mathcal{H}$ un esp. de Hilbert complejo y $T \in LC(\mathcal{H})$

(i) Pruebe que si $A \in LC(\mathcal{H})$ es positivo, entonces es autoadjunto.

(ii) Para $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continua y acotada, note que es posible definir $f(A)$ como se vio en clases (aproximando por polinomios). Entonces si $f(x) = \sqrt{x}$ pruebe que $f(A)$ es LC y positivo. Denotaremos por $\sqrt{A} = f(A)$

(iii) Defina $P = \sqrt{T^*T}$. Pruebe que $Ker(P) = Ker(T)$ y que $\overline{Im P} = Ker(T)^\perp$

(iv) Pruebe que existe un único $U \in LC(\mathcal{H})$ tal que:

- Para todo $x \in (Ker T)^\perp$ $\|Ux\| = \|x\|$
- Para todo $x \in Ker(T)$ $Ux = 0$
- $T = UP$

(v) Pruebe que U^*U es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $(Ker T)^\perp$

Sol.:

(i) Sabemos que $\forall x \in \mathcal{H}$ $\langle Ax, x \rangle \geq 0$

$$\Rightarrow \overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle x, Ax \rangle, \text{ pero } \overset{\in \mathbb{R}}{\overline{\langle Ax, x \rangle}} = \langle Ax, x \rangle = \langle x, A^*x \rangle$$

$$\therefore \langle x, (A - A^*)x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Consideremos entonces $L = A - A^*$ que satisface $\langle Lx, x \rangle = 0$ $\forall x \in \mathcal{H}$

$$\Rightarrow \langle L(x+y), x+y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \to (1) \ \langle Lx, y \rangle + \langle y, Lx \rangle = 0$$

$$y \rightsquigarrow iy \Rightarrow -i\langle Lx, y \rangle + i\langle Ly, x \rangle = 0$$

$$\Rightarrow (2) \ \langle Lx, y \rangle - \langle Ly, x \rangle = 0$$

Juntando (1) y (2): $\langle Lx, y \rangle = 0$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$

$$\therefore \forall x \in \mathcal{H} \quad Lx \perp \mathcal{H} \quad \text{ie} \quad Lx = 0$$

$$\therefore \boxed{L \equiv 0 \quad \text{ie} \quad A = A^*} //$$

(ii) Como A es positivo, $\sigma(A) \subseteq [0, +\infty)$, por lo que la observación es cierta. Ahora debemos probar que si $A \geq 0$, entonces $\sqrt{A} \geq 0$ y $\sqrt{A} \in LC(\mathcal{H})$.

- $\sqrt{A}$ es LC por el teo. de cátedras.
- Recordemos que $\sigma(\sqrt{A}) = \sqrt{\cdot} \circ (\sigma(A)) \subseteq [0, +\infty)$; así que como su espectro es positivo, el operador es positivo

(iii) Notar que $T^*T \geq 0$, por lo que P está bien definido.

Por (i). P es a.a., con lo cual:

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle x, P^2x \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \|Tx\|^2$$

$$\therefore \boxed{\|Px\| = \|Tx\|}$$

con lo cual $Ker(P) = Ker(T)$

También:

$$\overline{Im(P)} = (Ker P^*)^\perp = (Ker P)^\perp = (Ker(T))^\perp //$$

(iv) Definamos en principio $U : \text{Im}(P) \to H$ por: $Ux = Tz$ con z tq $Pz = x$

Notar que está bien definida, pues si existen z_1, z_2 tq $Pz_1 = Pz_2$

$$\Rightarrow z_1 - z_2 \in \text{Ker}(P) = \text{Ker}(T)$$

$$\therefore \boxed{Tz_1 = Tz_2}$$

Además U es una isometría, en efecto:

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle Tz, Tz \rangle = \langle z, T^*Tz \rangle = \langle z, P^2 z \rangle = \langle Pz, Pz \rangle = \|x\|^2$$

Como tiene cota de continuidad 1, se extiende por densidad a $\overline{\text{Im}P}$ y trivialmente se sigue cumpliendo:

$$\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in \overline{\text{Im}(P)}$$

Ahora podemos "prolongar por 0" esta aplicación, es decir:
si $z \in \mathcal{H}$ $z = x + y$ con $x \in \overline{\text{Im}P}$, $y \in \text{Ker}(T)$ (recordar que $\text{Ker}(T) \oplus \overline{\text{Im}P} = \mathcal{H}$)

$$Uz = Ux$$

Claramente $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es LC, pues $\overset{\text{nueva}}{U} = \overset{\text{antigua}}{U} \circ \Pi$, donde Π es la proyección sobre $\overline{\text{Im}(P)}$. Trivialmente satisface las 2 primeras propiedades, así que veamos la última:

- Sea $z \in \mathcal{H}$ y $x = Pz \in \text{Im}(P)$

$$\Rightarrow Ux = Tz \Rightarrow UPz = Tz$$

$$\therefore \boxed{UP = T}$$

(v) Sean $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \text{Ker}(T)$:

$$\langle U^*Ux, y \rangle = \langle Ux, \overset{0}{\cancel{Uy}} \rangle = 0$$

$$\therefore \text{Im}(U^*U) \subseteq (\text{Ker}(T))^\perp$$

Ahora, como $T = UP \Rightarrow T^* = PU^*$ $\quad \therefore \overset{P^2}{\overset{\|}{TT^*}} = PU^*UP$

$$P[I - U^*U]P = 0$$

$$\therefore \text{Si } x \in \text{Im}(P), \quad P[I - U^*U]x = 0$$

$$\therefore x - U^*Ux \in \text{Ker}(P) = \text{Ker}(T)$$

Pero $x \in \text{Im}P \subseteq \text{Ker}(T)^\perp$ y $U^*Ux \in \text{Ker}(T)^\perp$

$$\therefore x - U^*Ux \in \text{Ker}(T)^\perp \cap \text{Ker}(T) = \{0\}$$

ie: $\boxed{x = U^*Ux \quad \forall x \in \overline{\text{Im}P}}$

$$\therefore (U^*U)\big|_{\overline{\text{Im}(P)}} = I_{\overline{\text{Im}(P)}}$$

Además $\text{Ker}(T) \oplus \overline{\text{Im}(P)} = \mathcal{H}$, y para $x \in \text{Ker}(T)$ $Ux = 0$

$$\therefore U^*Ux = 0$$

Luego, U^*U es la proy. ortogonal sobre $\overline{\text{Im}(P)} = \text{Ker}(T)^\perp$ ▨

Fecha / Date:

Así, hemos probado lo sgte.:

Teo. [Descomposición Polar]

Sea $\mathcal{H}$ Hilbert complejo y $T \in LC(\mathcal{H})$. Entonces existen una isometría parcial $U \in LC(\mathcal{H})$ y $P \in LC(\mathcal{H})$ operador positivo tales que:

$$T = UP$$

Más aún, U es la proyección ortogonal sobre $Ker(T)^{\perp}$ y $P = \sqrt{T^*T}$ y esta descomposición es única.

Si denotamos por $|T| = P$, entonces: $T = U|T|$ y se observa la similitud con:

$$z = e^{i\theta}|z|$$

P2 (i) Pruebe que si T es normal ($TT^* = T^*T$), entonces $UP = PU$

Hint: Notar que un operador conmuta con P^2 ssi conmuta con P.

(ii) Ejemplo: Encuentre la descomposición polar de $T: L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ (μ medida sobre $(X, \mathcal{F})$) definido por:

$$Tf = a \cdot f \quad \forall f \in L^2(\mu) \qquad \text{con } a \in L^{\infty}(\mu)$$

Sol.:

(i) Teníamos que: $TT^* = UPPU^* = UP^2U^*$ y $T^*T = P^2$

$$\Rightarrow UP^2U^* = P^2 \Rightarrow \boxed{UP^2U^*U = P^2U} \ (*)$$

Entonces, como U^*U es la proy. sobre $(Ker T)^{\perp} = (Ker P)^{\perp}$

$I - U^*U$ es la proy. sobre $Ker(P)$

$$\therefore P(I - U^*U) = 0$$

$$\Rightarrow P = PU^*U$$

$$\therefore (*) \quad UP \cdot P = P^2U$$

Luego U conmuta con P^2 y usando el Hint:

U conmuta con P

Obs.: El hint es claro pues si f es continua y acotada sobre $\sigma(P)$, tomando polinomios tq $p_M \xrightarrow{unif} f$:

$$\forall T \in LC \qquad TP = PT \Leftrightarrow T p_M(P) = p_M(P) T$$

$$\Leftrightarrow T \lim_{M \to \infty} p_M(P) = \lim p_M(P) \cdot T \quad / \text{límite en } \|\cdot\|_{LC}$$

$$\Leftrightarrow T \cdot f(P) = f(P) \cdot T$$

(ii) Trivialmente $T^*f = \bar{a} \cdot f \quad \therefore \quad T^*Tf = |a|^2 \cdot f$ (en particular T normal) y por simple testeo $\sqrt{T^*T} f = |a| \cdot f$ (*) ($\sqrt{P}$ es el único tal que $\sqrt{P}^2 = P$ con $\sqrt{P} \geq 0$).

Finalmente $Ker(T) = \{ f \in L^2(\mu) \mid a(t) \cdot f(t) = 0 \text{ ctp } t \in X \}$

$$a(t) \cdot f(t) = 0 \Leftrightarrow f\big|_{\{a(t) \neq 0\}} = 0 \quad \text{ctp}$$

Notas / Notes:

$$(*) \Rightarrow Pf = |a| \cdot f \quad \forall f \in L^2(\mu)$$

Fecha / Date:

Más aun, $f = f_1 + f_2$ con $\overset{\in Ker(T)}{f_1 = \mathbb{1}_{\{a=0\}}\cdot f}$ $\overset{\in Ker(T)^\perp}{f_2 = \mathbb{1}_{\{a\neq 0\}}\cdot f}$
es la descomposición ortogonal.

Entonces $Uf_1 = 0$ y $f_2 = Pg$ con $g = \mathbb{1}_{\{a\neq 0\}}\cdot \frac{1}{|a|}\cdot f$

$\Rightarrow Uf = Uf_2 = UPg = Tg = \mathbb{1}_{\{a\neq 0\}}\, a\cdot |a|^{-1} f$

$\therefore$ $Pf = |a| f$ y $Uf = \mathbb{1}_{\{a\neq 0\}} \frac{a}{|a|} f$

☒

Notas / Notes: