Auxiliar N°1

Geotecnia Minera

(MI46B)

“Fuerzas y tensiones”

La mecánica de sólidos asume un comportamiento ideal de los materiales: homogéneo, continuo, isótropo, lineal y elástico. Las rocas, a diferencia de los materiales artificiales como el acero o el hormigón, presentan “defectos” estructurales debido a la variación en la composición mineralógica, orientación de minerales, porosidad y microfisuración, grado de alteración, etc. Los macizos rocosos, además, contienen discontinuidades de muy diverso tipo y zonas meteorizadas o tectonizadas. En ambos casos estas características se reflejan en unas propiedades físicas y mecánicas heterogéneas, discontinuas y anisótropas, que gobiernan la respuesta mecánica del medio rocoso frente a la actuación de las fuerzas.

La aplicación de nuevas fuerzas, o la modificación de la magnitud o distribución de las preexistentes, da lugar a cambios en el estado mecánico de los sistemas rocosos, produciéndose una serie de efectos internos, como desplazamientos, deformaciones y modificación del estado tensional o de esfuerzos. En los ensayos de laboratorio se aplican fuerzas para producir la ruptura del material y conocer así sus propiedades resistentes y deformacionales.

El **estado mecánico** de un sistema está caracterízalo por:

— La posición de cada una de sus partes, definida por sus coordenadas.
— Las fuerzas que actúan entre y sobre las partes del sistema.
— La velocidad con que las partes cambian de posición.

La diferencia entre dos estados mecánicos, por tanto, quedará definida por los desplazamientos, las deformaciones y los cambios en el estado tensional o de esfuerzos.

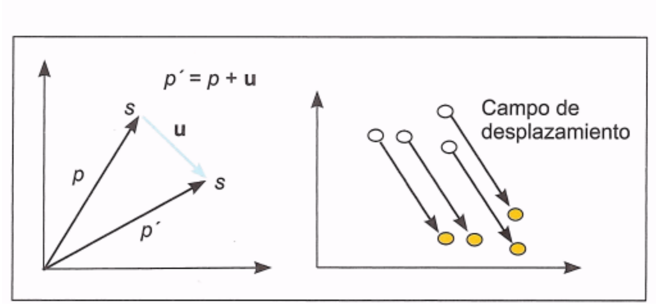


Figure 1:Vector de desplazamiento y campo de desplazamientos.

El desplazamiento, *u*, es el cambio de posición de una partícula *s*, y queda definido por un vector $u = p' — p$. El campo de desplazamientos en un sistema será homogéneo si los vectores de desplazamiento de cada partícula son iguales en magnitud y dirección (Figura 1).

La deformación, ε, indica la variación de longitud o espacio entre dos partículas en dos estados mecánicos distintos, y se puede expresar como la relación entre la variación de longitud y la longitud inicial entre las partículas:

$$\varepsilon = \frac{(l_i - l_f)}{l_i}.$$

Este parámetro es adimensional y compara situaciones en dos estados mecánicos diferentes.

El estado tensional de un sistema es consecuencia de las fuerzas actuando sobre él. Al variar las fuerzas, por tanto, varía el estado de tensiones asociado a los planos considerados.

Las fuerzas son las primeras responsables del estado y comportamiento mecánico de un sistema. Sobre un cuerpo rocoso actúan dos tipos de fuerzas (Figura 2): la fuerza gravitatoria o volumétrica, F = mg y las fuerzas superficiales, que son ejercidas sobre el cuerpo por los materiales que lo rodean, y actúan sobre las superficies de contacto

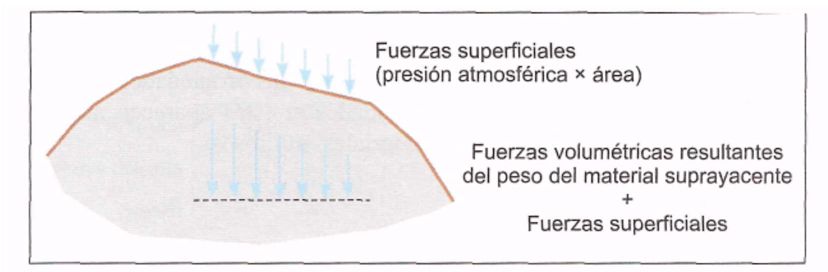


Figure 2: Fuerzas actuando sobre un cuerpo rocoso.

entre partes adyacentes del sistema rocoso, y se transmiten a cualquier punto del interior del cuerpo; un ejemplo de estas últimas son las fuerzas tectónicas que se ejercen sobre las rocas. Ambas fuerzas, volumétricas y superficiales, están íntimamente relacionadas entre sí, estando las segundas condicionadas por la distribución y variación espacial de las primeras.

Las fuerzas superficiales se clasifican en compresivas (positivas) y distensivas o traccionales (negativas), representadas respectivamente por vectores apuntando hacia dentro o hacia fuera del punto de aplicación. La fuerza es una cantidad vector, representada por su magnitud, dirección y sentido de aplicación.

Si se considera un plano sobre el que actúa una fuerza, ésta puede tener cualquier dirección con respecto al plano; si es perpendicular al mismo recibe el nombre de fuerza normal, y si es paralela fuerza tangencial, de corte o de cizalla. La primera puede ser compresiva o distensiva, mientras que la segunda no. Para las fuerzas tangenciales es necesario definir un convenio de signos: positivas si el vector de fuerza y su vector asociado sobre la otra cara del plano tienen el sentido contrario a las agujas del reloj, y negativas en caso contrario (Figura 3).

El efecto de una fuerza depende del área total sobre la que se aplica, por lo que trabajar con fuerzas no es adecuado para conocer su influencia sobre el comportamiento de la roca. Si la fuerza total es referida al área *A* del plano sobre el que actúa, se expresa como tensión o esfuerzo, parámetro independiente del área de aplicación: $\sigma = F/A$. Ambos términos se emplean indistintamente en este capítulo.

La fuerza se mide en unidades del sistema SI o CGS, como newton (N), dina, kilopondio (kp), toneladas fuerza (t); las unidades del esfuerzo son el kp/cm^2, kN/m^2 o kPa, MN/m^2 o MPa, etc.

El **esfuerzo** se define como la reacción interna de un cuerpo a la aplicación de una fuerza o conjunto de fuerzas, y es una cantidad que no se puede medir directamente, ya que el parámetro físico que se mide es la fuerza. Si la fuerza actúa uniformemente en una superficie, el esfuerzo o tensión indica la intensidad de

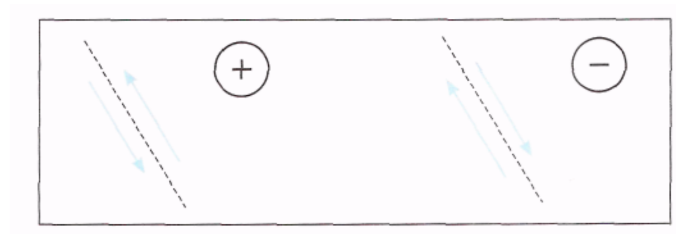
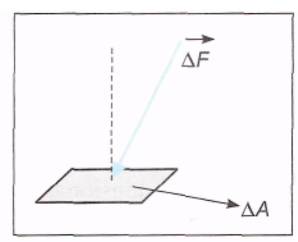


Figure 3: Convenio de signos para las fuerzas tangenciales.

las fuerzas que actúan sobre el plano. Por tanto, a diferencia de las fuerzas, carece de sentido hablar de esfuerzo actuando sobre un punto.

El esfuerzo no varía en función del área considerada siempre que las fuerzas se distribuyan uniformemente sobre la superficie. Si las fuerzas no se distribuyen uniformemente, el esfuerzo variará para diferentes áreas del plano. Si se considera un área infinitesimal ΔA en el interior de un cuerpo rocoso en equilibrio, la magnitud del esfuerzo resultante sobre el área será:

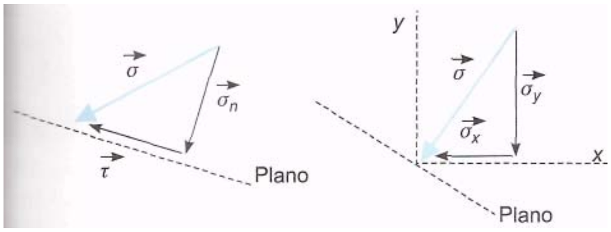
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$



Como la fuerza es una cantidad vector, la expresión anterior se puede escribir como la ecuación de un vector:

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA}$$

El esfuerzo es también una cantidad vector, al ser el producto de un vector, ΔF, por un escalar, $1/\Delta A$. La notación *a* representa la magnitud y dirección del vector. La notación $\vec{\sigma}$ ó $|\vec{\sigma}|$ representa sólo la magnitud, es el escalar de $\vec{\sigma}$. Los vectores de esfuerzo se pueden sumar vectorialmente si están referidos al mismo plano.



:

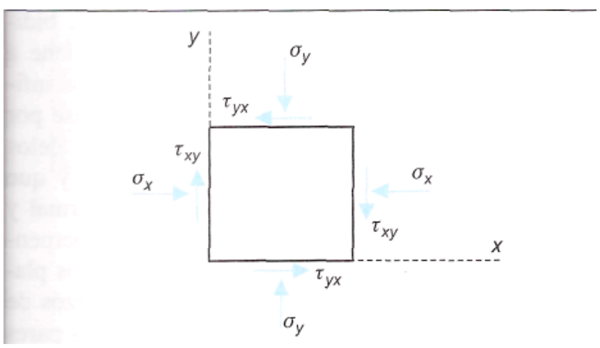
Figure 4: Esfuerzos sobre un plano.

El **esfuerzo sobre un plano** queda completamente representado por el vector de esfuerzo, con magnitud igual a la relación entre la fuerza y el área y dirección paralela a la dirección de la fuerza que actúa sobre el plano (Figura 4). Al igual que las fuerzas, los esfuerzos compresivos son positivos, y los distensivos o fracciónales son negativos.

El esfuerzo, como cualquier otro vector, puede ser descompuesto en sus componentes normal y tangencial, $\vec{\sigma}_n$ y $\vec{\tau}$, referidas a cualquier plano, dependiendo estas componentes de la orientación del plano elegido. De igual modo el esfuerzo puede ser descompuesto en dos componentes, $\vec{\sigma}_x$ y $\vec{\sigma}_y$, paralelas a los ejes de un sistema de coordenadas ortogonales *x*, *y*.

Tensiones sobre un plano

El estado de esfuerzos o tensiones en un punto queda definido por las fuerzas por unidad de área referidas a dos planos perpendiculares *x*, *y*, a través del punto.



Si se asume un material continuo y homogéneo sometido a un campo de fuerzas uniforme y se considera un cuadrado de área infinitesimal en reposo, los esfuerzos resultantes sobre las caras del cuadrado o, lo que es lo mismo, las fuerzas por unidad de área ejercidas por el material circundante sobre las caras del cuadrado, deben estar en equilibrio.

• CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS NORMAL Y TANGENCIAL ACTUANDO SOBRE UN PLANO

Si se establecen las ecuaciones del equilibrio para la Figura 5 en función de los esfuerzos normal y tangencial, $\vec{\sigma}_n$ y $\vec{\tau}$, actuando sobre el plano *AB*, se tiene:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau = (\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

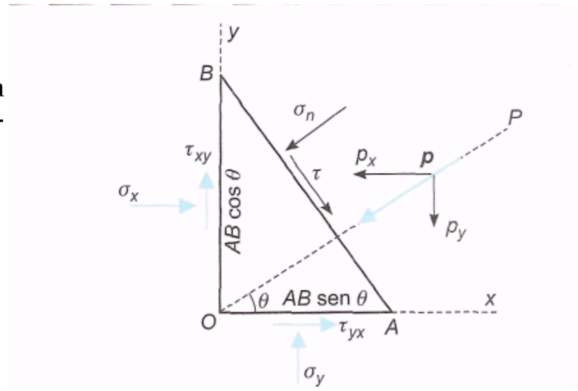


Figure 5

Las expresiones anteriores dan los valores de los esfuerzos normal y tangencial sobre cualquier plano que pase por *O*.

• CÁLCULO DE LAS COMPONENTES $\vec{\sigma}_n$ Y $\vec{\tau}$ A PARTIR DE σ_1, Y σ_3

Conocida la magnitud y dirección de las tensiones principales σ_1 y σ_3 se pueden calcular los esfuerzos normal y tangencial para cualquier plano

$$\sigma_n A = \sigma_1 \cos\theta A \cos\theta + \sigma_3 \operatorname{sen}\theta A \operatorname{sen}\theta =$$
$$= \sigma_1 A \cos^2\theta + \sigma_3 A \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\tau A = \sigma_1 \operatorname{sen}\theta A \cos\theta - \sigma_3 \cos\theta A \operatorname{sen}\theta$$

dada su orientación. Para dos dimensiones, el

Por relaciones trigonométricas:

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{sen} 2\theta$$

equilibrio de fuerzas para el plano de la Figura 6 se establece:

Estas ecuaciones proporcionan una descripción completa del estado de esfuerzos sobre un plano conocido el ángulo θ y los esfuerzos principales. El máximo esfuerzo tangencial es (σ_1 — σ_3)/2, y ocurre sobre secciones a 45° de los planos principales. Los máximos esfuerzos normales y los máximos esfuerzos tangenciales se ejercen sobre secciones a 45° una de otra.

• CÍRCULO DE MOHR

Las ecuaciones recién vistas corresponden a un círculo. Esta representación gráfica del estado de esfuerzos en un punto recibe el nombre de círculo de Mohr (Figura 7). Las intersecciones del círculo con el eje σ_n son los esfuezos principales σ_1, y σ_3. El radio del círculo

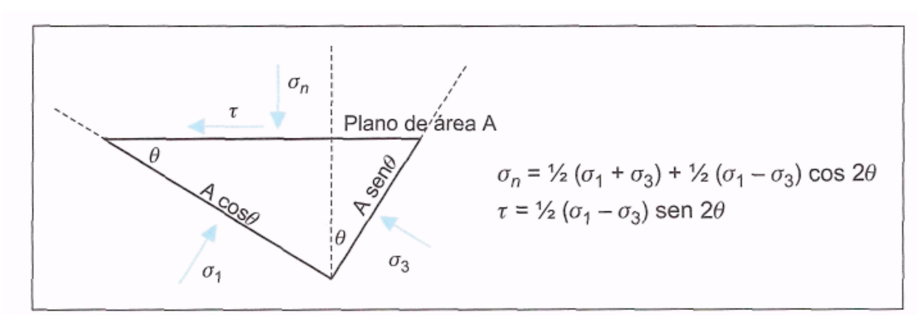


Figure 6

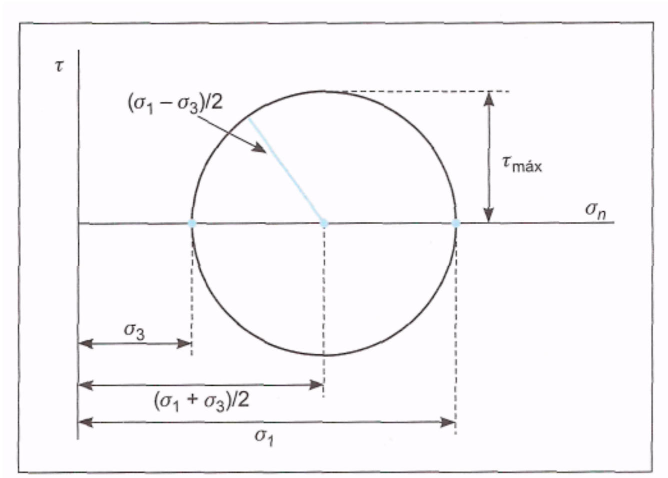


Figure 7:Tensiones tangencial y normal actuando sobre un plano

representa el máximo valor del esfuerzo tangencial $\vec{\tau}$. Cualquier punto del círculo representa el estado de esfuerzos sobre un plano cuya normal forma un ángulo θ con la dirección del esfuerzo principal mayor (σ_1 . A partir del dibujo, dados los esfuerzos σ_1 , y σ_3 se pueden calcular gráficamente los valores de σ_n y τ para cualquier plano; igualmente a partir de σ_n y τ puede obtenerse la magnitud y dirección de los esfuerzos principales (Figura 8).

El círculo de Mohr permite representar diferentes estados de esfuerzos, como se indica en la Figura 9.

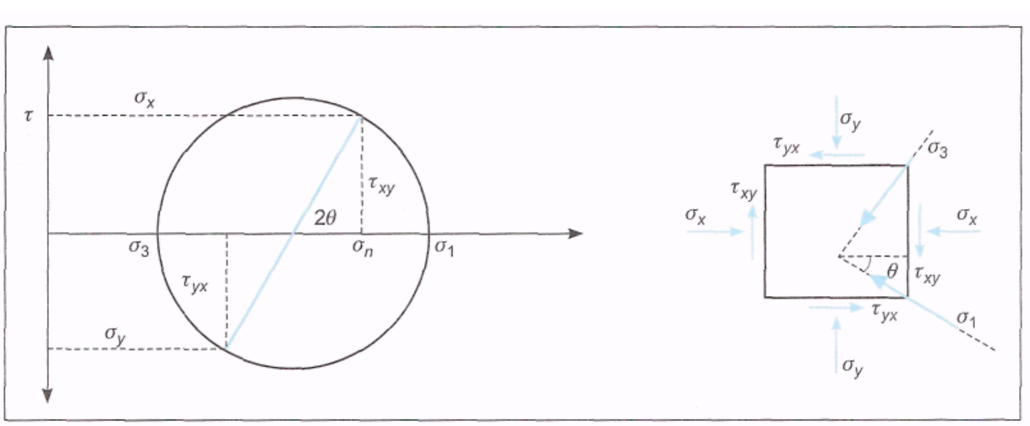


Figure 8:Representación gráfica mediante el círculo de Mohr de los esfuerzos actuando sobre el plano vertical de la figura de la derecha.

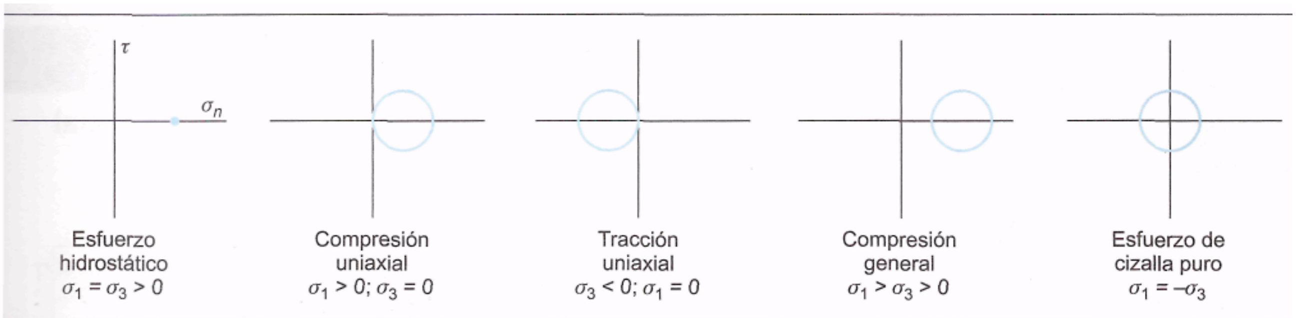
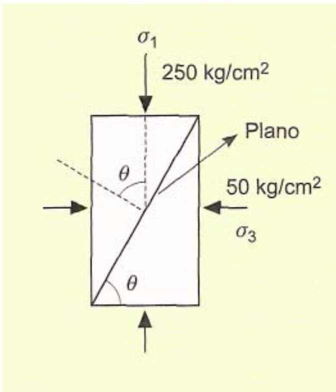
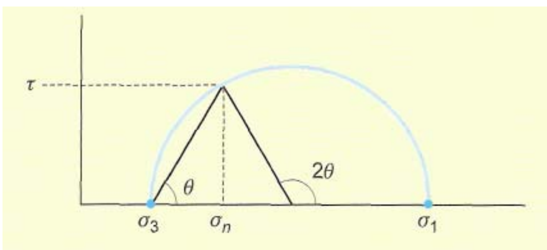


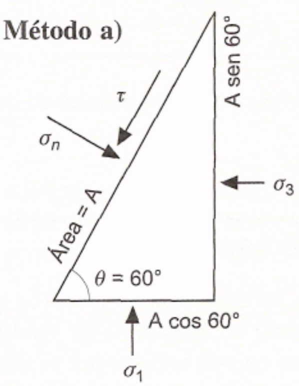
Figure 9: Círculos de Mohr para distintos estados de esfuerzos

Métodos gráficos y analíticos para el cálculo de las tensiones tangencial y normal sobre un plano





Método a)



$$\sigma_n = \sigma_3 \operatorname{sen}^2 \theta + \sigma_1 \cos^2 \theta$$
$$\sigma_n = 50 \operatorname{sen}^2 60 + 250 \cos^2 60$$
$$\sigma_n = 37{,}5 + 62{,}5 = 100 \text{ kg/cm}^2$$
$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$
$$\tau = 250 \operatorname{sen} 60 \cos 60 - 50 \operatorname{sen} 60 \cos 60$$
$$\tau = 108{,}25 - 21{,}65 = 86{,}6 \text{ kg/cm}^2$$

Método b)

Construcción gráfica del círculo de Mohr y medida directa:

$$\sigma_n = 100 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{y} \quad \tau = 86{,}6 \text{ kg/cm}^2$$

Método c)

A partir de las expresiones:

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta = 100 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{sen} 2\theta = 86{,}6 \text{ kg/cm}^2$$