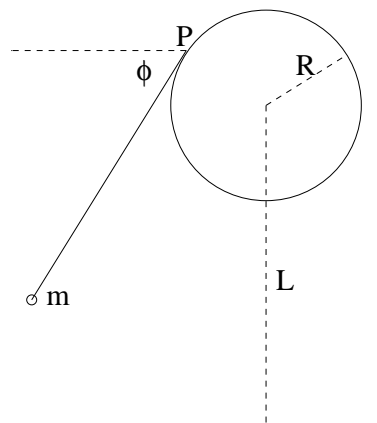


debe escribir con un vector general perpendicular a  $\hat{t}$ . Demuestre que la fuerza normal entonces es de la forma:  $\vec{N} = \hat{\phi} N_\phi + (\hat{k} \sin \theta - \hat{\rho} \cos \theta) N_n$ . Una vez que se tiene las fuerzas, la ecuación de movimiento (II ley de Newton) puede ser escrita y descompuesta en tres ecuaciones escalares. Hay que tomar en cuenta que la argolla solo se puede mover a lo largo de la varilla, es decir, siempre se debe satisfacer  $\rho(t) = z(t) \tan \theta$  (\*). En estas ecuaciones escalares aparecen las cantidades desconocidas  $N_n$  y  $N_\phi$ , pero si se usa (\*) se puede obtener una ecuación libre de estos coeficientes. Tal ecuación entonces se puede integrar y se obtiene  $z(t)$ . A partir de ahí el problema es muy sencillo.

- 2.8 Hay un hilo enrollado alrededor de un cilindro. El eje del cilindro es horizontal, su radio es  $R$  y la altura desde el suelo al eje es  $L$ . En el instante inicial está desenrollada una parte del hilo, de longitud  $D$ , la que se mantiene tirante y horizontal,  $\phi = 0$ . En esa punta del hilo hay un cuerpo de masa  $m$ . Este cuerpo se suelta desde el reposo y a medida que cae el hilo se va enrollando. **a)** Determine la tensión del hilo como función del ángulo  $\phi$ . **b)** Dé la forma de la aceleración y determine el radio de curvatura. Interprete.

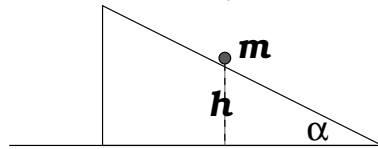


Indicación: Conviene tomar el origen en el eje del cilindro y escribir el vector posición del cuerpo como la suma de los vectores posición del punto P de tangencia del hilo ( $\vec{r}_P$  en la dirección  $\hat{\rho}$ ) y el vector que apunta en la dirección del hilo y que es tangente al cilindro, en la dirección  $\hat{\phi}$ .

- 2.9 Desde el punto de vista del momento angular estudie el péndulo cónico descrito en la sección 2.3.1. Haga su estudio en dos casos: (a) cuando el origen  $\mathcal{O}$  para definir el momento angular y el torque está al centro de la circunferencia que describe la partícula y (b) cuando  $\mathcal{O}$  se escoge en el punto en que el hilo se une al techo. En ambos casos escriba el vector posición de la masa  $m$  usando los vectores unitarios asociados a coordenadas cónica, obtenga la velocidad, calcule el momento angular y el torque y compruebe que (2.3.5) se satisface.
- 2.10 Un astronauta de masa  $m$  se aleja de su nave unido a ella por una cuerda, pero impulsado por sus propios cohetes. Debido a que se le acaba el combustible debe ser traído de vuelta recogiendo la cuerda. Esto se comienza a hacer cuando la cuerda está tirante, tiene una longitud extendida  $R_0$  desde la nave y la velocidad angular del astronauta, respecto a la nave, es  $\Omega_0$ . La cuerda comienza a ser recogida con rapidez constante  $v_0$ . Suponga que no hay complicación alguna en el momento de comenzar a recoger la cuerda. **a)** Encuentre la rapidez del astronauta en función de la distancia a la nave. **b)** Si se sabe que la cuerda soporta una tensión máxima  $27 m R_0 \Omega_0^2$  antes de cortarse, determine a qué distancia de la nave se encuentra el astronauta en el momento en que la cuerda se corta. Nota: la nave tiene masa tan grande que para todos los efectos de este problema puede tomarse como

un punto fijo.

- 2.11 Un péndulo plano de largo  $R$  y masa  $m$  es liberado desde su punto más bajo ( $\phi = 0$ ) con una velocidad angular  $\omega_0$ . No alcanza a llegar a la cúspide (altura  $2R$  medida desde el punto más bajo) porque cuando  $\phi$  toma el valor  $\phi_M$  el movimiento deja de ser circular. Obtenga una expresión para  $\cos \phi_M$  en función de  $m$ ,  $g$ ,  $\omega_0$  y  $R$ .
- 2.12 Sobre un plano horizontal está apoyada una cuña de masa  $M$  y sobre la cuña hay un



cuerpo de masa  $m$ .  $O$   $O'$  Despreciando todos los roces, determine el movimiento de este sistema si inicialmente ambos cuerpos están en reposo.

# Capítulo 3

## Fuerzas específicas y movimiento

### 3.1. Ley de Gravitación Universal

#### 3.1.1. La ley

La tercera ley de Kepler dice que el cubo de la distancia media,  $R$ , de un planeta dividida por el cuadrado de su período,  $T$ , es la misma constante para todos los planetas, es decir para cualquier planeta  $a$  el cociente

$$\frac{R_a^3}{T_a^2} = k$$

da un valor  $k$  que no depende del planeta. Kepler estableció que las órbitas son elipses. También estableció la ley (2.5.3) que sabemos que significa que el momento angular se conserva.

Kepler enunció sus dos primeras leyes en 1609, mientras que la tercera es de diez años después, 1619. Isaac Newton se basó en la tercera ley de Kepler para afirmar en 1666 que existe una fuerza de atracción gravitacional que es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia entre los dos cuerpos.

Esto último sugiere que la dinámica de los planetas está gobernada por una fuerza central. Si la fuerza es central de la forma  $f(r)\hat{r}$ , la única aceleración que sufren los planetas es la centrípeta, descrita en (1.4.12). ¿Qué forma tiene tal ley de fuerza?

Aun cuando los planetas se mueven en órbitas elípticas, éstas son muy poco excéntricas, es decir, son casi circunferenciales. La velocidad media del planeta  $a$  es prácticamente su velocidad real todo el tiempo, y se puede estimar dividiendo el camino recorrido en una órbita:  $2\pi R_a$  por el tiempo  $T_a$  que tarda, es decir,  $V_a = 2\pi R_a/T_a$ . Se sabe, ver (1.4.12), que la aceleración centrípeta  $a_c^{(a)}$  es de magnitud  $V_a^2/R_a$ ,

$$a_c^{(a)} = \frac{1}{R_a} \left( \frac{2\pi R_a}{T_a} \right)^2 = \frac{4\pi^2 R_a}{T_a^2} = \frac{4\pi^2}{R_a^2} \frac{R_a^3}{T_a^2} = \frac{4\pi^2 k}{R_a^2} \quad (3.1.1)$$

Con la última expresión a la derecha se ha podido escribir la aceleración centrípeta en

términos tan solo de la constante  $4\pi^2 k$  y de la distancia al centro de fuerza (distancia al sol). Por tanto, la magnitud de la fuerza sobre el planeta  $a$  tiene que estar dada por esta aceleración multiplicada por la masa del planeta y tiene que apuntar hacia el centro:

$$\vec{F}_a = -\frac{4\pi^2 k M_a}{R_a^2} \hat{r} \quad (3.1.2)$$

El planeta Júpiter tiene muchas lunas y ese sistema se comporta como un sistema solar autónomo. Cuando se estudió si la ley de Kepler (3.1.1) se cumplía para ese sistema se obtuvo que se cumple, pero la constante  $k$  que resulta es otra. Hoy sabemos, gracias a la ley de gravitación universal de Newton, que esa constante  $k$  es proporcional a la masa del objeto masivo que crea la fuerza central (el sol en un caso y Júpiter en el otro).

El argumento dado al comienzo, en torno a (3.1.1), tiene sentido tan solo si la órbita es circunferencial o muy próxima a serlo. Pero la conclusión de ese caso particular, ayuda a entender cómo se puede llegar a concebir la ley de validez universal que ahora se introduce.

La ley universal de gravitación enunciada por Newton dice que la fuerza de atracción que ejerce un punto material de masa  $m_A$  sobre un punto material de masa  $m_B$  es

$$\vec{F}_{\text{sobre B}} = -G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2} \hat{r} \quad (3.1.3)$$

donde  $\hat{r}$  es el vector unitario que apunta desde el centro  $A$  de fuerza hacia  $B$ .

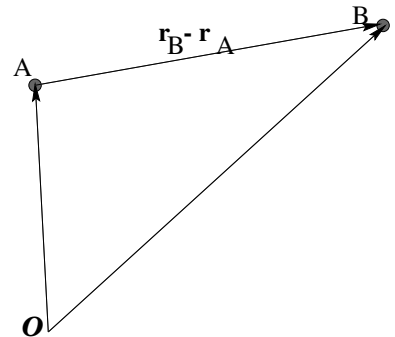
La constante universal de gravitación  $G$  vale

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{K}^2} \quad (3.1.4)$$

Esta misma ley se puede también escribir utilizando vectores posición  $\vec{r}_A$  y  $\vec{r}_B$  respecto a cualquier origen  $O$ . La fuerza sobre  $B$  debido a  $A$  es

$$\vec{F}_{BA} = -G \frac{m_A m_B}{\|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|^3} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad (3.1.5)$$

El movimiento que se deduce con esta fuerza, en particular el movimiento planetario, será discutido más adelante.



### 3.1.2. Aceleración de gravedad

De acuerdo a (3.1.3) la magnitud de la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa  $m$  es

$$F = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \quad (3.1.6)$$

donde  $M$  es la masa de la Tierra,  $R$  es su radio al nivel del mar y  $h$  es la altura sobre el nivel del mar que está el cuerpo de masa  $m$ . Siempre se identifica esta fuerza con el producto  $mg_h$ , por tanto, la aceleración de gravedad resulta valer

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \approx \frac{GM}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{2h}{R}} = \frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \quad (3.1.7)$$

que depende de la altura  $h$ . En el calculo anterior se ha supuesto que la altura  $h$  es mucho menor que el radio de la Tierra,  $h \ll R$ . El radio de la Tierra es  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$  lo que garantiza que la aproximación hecha es excelente aun si  $h$  es la altura del monte Everest ( $h_{\text{Everest}} \approx 8,8 \cdot 10^3 \text{ m}$ ).

Se llamará  $g_0$  a la aceleración de gravedad al nivel del mar. Puesto que la masa de la Tierra es  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$ , resulta

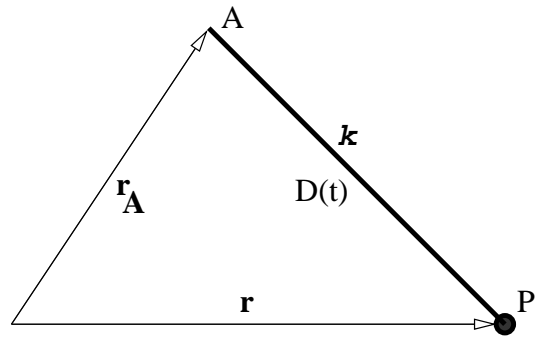
$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.1.8)$$

♣ Demuestre que la aceleración de gravedad en Santiago difiere en menos del 1 % de  $g_0$ .

## 3.2. Fuerza elástica ideal

### 3.2.1. Generalidades

El tipo de problemas que se va a abordar en esta sección tiene un grado de aplicabilidad que va mucho más allá de lo que podría aparentar. Superficialmente esta sección trata de una partícula de masa  $m$  en el extremo de un resorte cuyo otro extremo está fijo en un punto que se ha designado  $A$  en la figura adjunta. Lo que se estudia es cómo oscila este sistema pero los resultados que se obtiene son generalizables a todo tipo de sistemas elásticos.



La fuerza que ejerce un resorte ideal de *largo natural*  $D_0$  sobre un cuerpo  $P$  depende linealmente de la deformación (alargamiento o acortamiento) que sufre el resorte y es proporcional a la *constante elástica*  $k$  del resorte,

$$\vec{F}_e = -k (D(t) - D_0) \hat{r} \quad (3.2.1)$$

donde,  $D(t) = \|\vec{r} - \vec{r}_A\|$  es el largo actual del resorte y  $\hat{r}$  es el vector unitario en la dirección del resorte,

$$\hat{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_A}{\|\vec{r} - \vec{r}_A\|} \quad (3.2.2)$$

En particular si  $A$  es el origen, es decir  $\vec{r}_A = 0$ , y  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ . La diferencia  $D(t) - D_0$  se suele denominar la *deformación*.

Un resorte se dice duro si su constante  $k$  es grande y blando en el otro extremo.

La *ley de Hooke* se refiere a sistemas en los que, al ser sacados de su posición de reposo (o posición de equilibrio), aparece una fuerza que es proporcional a la deformación, tal como en (3.2.1). Esta ley es aplicada en los más variados contextos. Cuando una cuerda de guitarra es sacada de su posición de equilibrio (es *pulsada*) aparece una fuerza que, de alguna manera, puede ser asimilada a (3.2.1). Al deformar levemente cualquier cuerpo sólido aparece una fuerza elástica para restituirlo a su posición original. Como se verá, (3.2.1) conduce a una dinámica típicamente oscilante, aunque no siempre lo es.

Un sistema oscilante normalmente pierde energía y, si está libre de influencias que le mantengan sus oscilaciones, regresa al reposo. La ley que rige esta pérdida de energía se verá más adelante cuando se trate al *oscilador amortiguado*.

Otra variante de los osciladores se refiere al caso real en que el sistema no es sacado levemente de su posición de equilibrio, sino que se aleja bastante de ella. En tales casos es muy típico que la ley (3.2.1) deje de ser válida. Puede ocurrir que la ley sea más complicada, como es el caso del péndulo, (2.3.13) versus el péndulo de pequeñas oscilaciones descrito por la ecuación (2.3.14). También esto ocurre, por ejemplo, cuando el sistema ya no sufre una deformación elástica sino una deformación plástica. Plástica es la deformación que cambia la naturaleza del material, como es el caso de un resorte que es estirado más allá de un cierto límite y se deforma irreversiblemente.

### 3.2.2. Caso unidimensional sencillo

En el caso unidimensional, en que la partícula  $P$  en el extremo del resorte—cuyo otro extremo está en el origen— se mueve siempre con  $x(t) > 0$ , no es necesario usar vectores y la fuerza se puede escribir como  $F = -k(x - D_0)$  lo que conduce a la ecuación

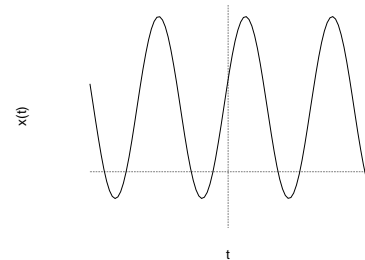
$$m\ddot{x}(t) = -k[x(t) - D_0] \quad (3.2.3)$$

Se puede comprobar que la ecuación anterior tiene como solución particular trivial  $x(t) = D_0$ . Ella corresponde al caso en que el oscilador está en reposo en una posición especial llamada *posición de equilibrio*. La solución general del problema se puede integrar fácilmente si se hace el cambio de función:  $x(t) = \bar{x}(t) + D_0$ , porque la ecuación queda

$$m\ddot{\bar{x}}(t) = -k\bar{x}(t) \quad (3.2.4)$$

Se define la *frecuencia angular característica* del sistema por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.2.5)$$



La frecuencia propiamente tal se denota  $\nu$  y se relaciona a  $\omega_0$  por  $\omega_0 = 2\pi\nu$ . El período de tales oscilaciones es  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}$ .

Se puede comprobar que la solución más general de la ecuación es  $\bar{x}(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$ . Volviendo a la función original  $x(t)$  esta solución es

$$x(t) = D_0 + A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.6)$$

Las constantes  $A$  y  $B$  dependen de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$  entonces la solución se convierte en

$$x(t) = D_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + (x_0 - D_0) \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.7)$$

(compruébelo).

♠ *Escriba la solución anterior en la forma*

$$x(t) = D_0 + C \sin(\omega_0 t + \gamma_0) \quad (3.2.8)$$

y encuentre la relación entre  $(C, \gamma_0)$  y  $(x_0, v_0)$ .

La función  $x(t)$  que ha quedado definida oscila en el tiempo en forma sinusoidal, tomando iguales valores en tiempos separados por un múltiplo entero de  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  ( $T$  es el período de la función  $x(t)$ ), ver la figura asociada a la solución de la ec. (3.2.4).

♠ *Demuestre, a partir de (3.2.6), que  $(x(t) - D_0)$  es una función cuyos valores máximo y mínimo son*

$$[x(t) - D_0]_{\max \min} = \pm \sqrt{A^2 + B^2} \quad (3.2.9)$$

Estos valores son la *amplitud* de las oscilaciones y describen cuánto se aleja la partícula oscilante de su posición de reposo.

La solución que se ha visto está caracterizada por una frecuencia  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Si el resorte es duro ( $k$  grande) la frecuencia es más grande, pero si se aumenta el valor de la masa la frecuencia baja.

Este comportamiento se puede apreciar de la siguiente forma. Un vehículo diseñado para acarrear grandes cargas tiene resortes (sus amortiguadores) muy duros, de tal modo que cuando va bien cargado las vibraciones que le provoca las irregularidades del camino se convierten en frecuencias bajas (*suaves* se diría en lenguaje coloquial), pero si ese mismo vehículo va vacío (masa chica) vibrará a alta frecuencia y se sentirá *áspero*.

En la notación de (3.2.6) la función  $x$  toma valores extremos cuando  $\dot{x} = 0$ , lo que ocurre en  $t = t_1$  si  $A \cos \omega_0 t_1 = B \sin \omega_0 t_1$  lo que ocurre si

$$\tan \omega_0 t_1 = \frac{A}{B} \quad (3.2.10)$$

Al reemplazar este valor en (3.2.7) se obtiene

$$x_{\pm} = D_0 \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2} + (x_0 - D_0)^2} \quad (3.2.11)$$

Con signo  $+$  se tiene el valor máximo de  $x$  y con el signo menos se tiene el valor mínimo. Esta expresión es equivalente a (3.2.9).

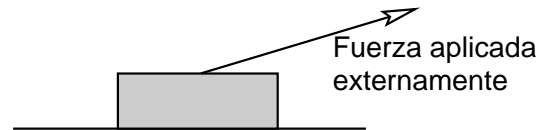
### 3.3. Fuerza de roce estático y dinámico

Ya se ha dicho que si dos cuerpos están en contacto, sobre cada uno de ellos actúa una fuerza llamada *de contacto*. Esta fuerza tiene una descomposición única en una componente perpendicular a la superficie tangente al contacto, que se denomina *normal*,  $\vec{N}$ , y una componente paralela al contacto, que es la *fuerza de roce*.

Si no hay *movimiento relativo* entre las dos superficies en contacto, la fuerza paralela al contacto que actúa sobre cada uno de los dos cuerpos se llama *fuerza de roce estático*,  $\vec{F}_{RE}$ , mientras que si hay movimiento relativo, se llama *fuerza de roce dinámico*,  $\vec{F}_{RD}$ .

#### 3.3.1. Roce estático

Al aplicar una fuerza  $\vec{F}$  sobre un cuerpo  $A$  apoyado en una superficie, puede ocurrir que  $A$  no se mueva. Esto se debe a que en la región de contacto entre  $A$  y la superficie aparece la fuerza, llamada *de roce estático*, que se opone al movimiento. Esta fuerza de roce estático anula la componente  $F_{\parallel}$  de la fuerza  $\vec{F}$  que es paralela al contacto. Si  $F_{\parallel}$  sobrepasa un cierto valor, el cuerpo ya no podrá permanecer en reposo. El valor máximo alcanzado por  $\vec{F}_{RE}$  obedece la siguiente ley, que depende del valor de la magnitud de la fuerza normal,  $\vec{N}$  presente en el contacto,



Al aplicar una fuerza externa sobre un cuerpo que está apoyado sobre una superficie puede ocurrir que este cuerpo no se mueva.

$$\|\vec{F}_{RE}\| \leq \mu_e \|\vec{N}\| \quad (3.3.1)$$

donde  $\vec{N}$  es la fuerza normal mencionada más arriba y  $\mu_e$  es el llamado *coeficiente de roce estático*. Este coeficiente depende de la naturaleza de los materiales en contacto y de la calidad, por ejemplo la rugosidad, de las superficies.

**EJEMPLO:** Las fuerzas sobre un vaso sobre una mesa inclinada son: su peso,  $m\vec{g}$ , que apunta vertical hacia abajo, la normal  $\vec{N}$  que apunta perpendicular a la mesa (dirección  $\hat{k}$ , ver figura) y la fuerza de roce estático,  $\vec{F}_{RE}$  que apunta en una dirección paralela a la mesa.



Puesto que el vaso está inmóvil la aceleración es nula y por tanto la fuerza total es cero, es decir,  $\vec{N} + \vec{F}_{RE} + m\vec{g} = 0$ . Las fuerzas se pueden escribir:

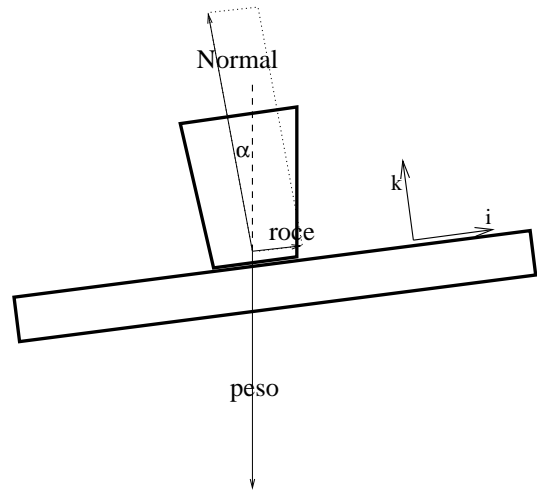
$$\vec{N} = N\hat{k} \quad (3.3.2)$$

$$m\vec{g} = -mg(\hat{k} \cos \alpha + \hat{i} \sin \alpha) \quad (3.3.3)$$

Puesto que estas dos fuerzas más la fuerza de roce deben sumar cero, y la fuerza de roce por definición no tiene componente en la dirección  $\hat{k}$ , necesariamente se cumple que la fuerza de roce es paralela a  $\hat{i}$  y

$$\vec{F}_{RE} = \hat{i} mg \sin \alpha \quad (3.3.4)$$

$$\vec{N} = \hat{k} mg \cos \alpha \quad (3.3.5)$$



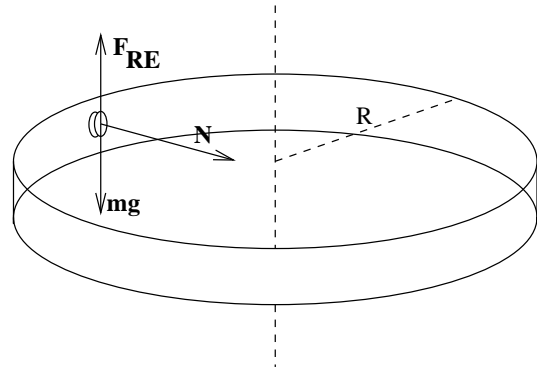
Un vaso en reposo sobre una mesa inclinada. La suma de la normal y el roce estático cancelan exactamente al peso.

Como se puede apreciar, la magnitud de la fuerza de roce estático queda determinada por el valor de otras fuerzas a través de la condición de que la suma total garantice (en este ejemplo) el reposo. La condición (3.3.1) implica que  $\tan \alpha \leq \mu_e$ . ◀

**EJEMPLO:** Una cinta como la que se muestra en la figura adjunta, tiene la forma del manto de un cilindro de eje vertical y de sección circular de radio  $R$ , y gira con velocidad angular uniforme  $\omega$ .

En el interior de la cinta está apoyado un cuerpo de masa  $m$  como lo muestra la figura adjunta. Si se conoce el coeficiente de roce estático entre este cuerpo y la cinta, se verá que se puede determinar el mínimo valor que debe tener  $\omega$  para que el cuerpo de masa  $m$  no caiga.

Usando coordenadas cilíndricas, la fuerza normal, que actúa sobre el cuerpo tiene que apuntar perpendicular a la superficie de la cinta:  $\vec{N} = -N\hat{\rho}$ , pero el valor del escalar  $N$  aun no se conoce. El peso es  $m\vec{g} = -mg\hat{k}$ . Se puede adivinar que la fuerza de roce  $\vec{F}_{RE}$  apunta en la dirección  $\hat{k}$ :  $\vec{F}_{RE} = F\hat{k}$ . Esta vez la suma de todas las fuerzas debe ser igual al producto de la masa por la aceleración del cuerpo que tiene movimiento circular con velocidad angular uniforme. Esta aceleración, de acuerdo a (1.2.4), en este caso es  $-R\omega^2\hat{\rho}$ . Todo esto conduce entonces a dos relaciones escalares:



Una cinta circular gira con velocidad angular uniforme  $\omega$  en torno a un eje vertical. En el interior de la cinta se mantiene fijo un objeto gracias al roce estático.

$$F = mg \quad \text{y} \quad N = mR\omega^2 \quad (3.3.6)$$

Pero la ley (3.3.1) de roce estático exige que  $F \leq \mu_e m R \omega^2$ , con lo que finalmente se obtiene que

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_e R}} \quad (3.3.7)$$

Si la velocidad angular tuviera un valor menor que éste, el cuerpo no podría tener roce estático y cae. ◀

♠ *Resuelva el problema de la cinta que aparece en el texto principal, pero esta vez la velocidad angular de la cinta no es uniforme sino que  $\omega = \Omega - \alpha_0 t$ . La velocidad angular inicial  $\Omega$  satisface la desigualdad (3.3.7).*

♠ *Sobre una superficie que corresponde al interior de un cono vertical con vértice abajo está apoyado un cuerpo de masa  $m$ . Cuerpo y superficie giran con velocidad angular  $\omega$  constante, en torno al eje vertical, sin que el cuerpo deslice. Encuentre las condiciones para que esto ocurra. Al analizar este problema debe cuidadosamente analizar diversos casos. Por ejemplo, se debe separar los casos en que  $(g \cos \theta - \rho \omega^2 \sin \theta)$  es positivo o negativo. Aquí  $\theta$  es el ángulo entre la vertical y una generatriz del cono,  $g$  es la aceleración de gravedad y  $\rho$  es la distancia entre el cuerpo y el eje de rotación.*

### 3.3.2. Roce dinámico

El roce dinámico existe cuando hay movimiento relativo entre las superficies en contacto. La fuerza de roce en este caso depende de la velocidad relativa entre el cuerpo que se estudia y la superficie con la que está en contacto:  $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{v}_s$ , donde  $\vec{v}$  es la velocidad del cuerpo y  $\vec{v}_s$  es la velocidad de la superficie. La ley de roce dinámico es

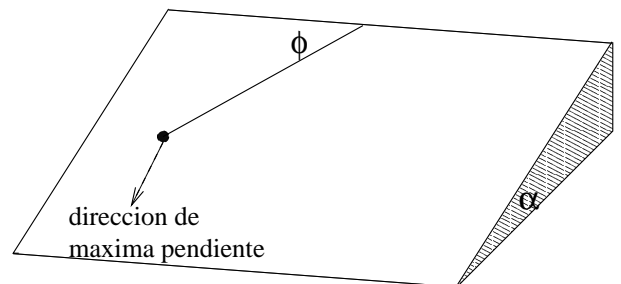
$$\vec{F}_{RD} = -\mu_d N \hat{v}_{\text{rel}} \quad (3.3.8)$$

donde  $\mu_d$  es un coeficiente que depende de la naturaleza de las superficies en contacto,  $N = \|\vec{N}\|$  es la magnitud de la fuerza normal sobre el cuerpo que desliza y  $\hat{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{rel}} / \|\vec{v}_{\text{rel}}\|$  es el vector unitario que apunta en la dirección de la velocidad relativa entre ambas superficies. Es muy notable que esta fuerza no depende de la magnitud de la superficie de contacto.

El contacto entre dos cuerpos, entonces, está caracterizado en general por dos coeficientes de roce, el coeficiente de roce estático y el coeficiente de roce dinámico. Siempre se cumple que

$$\mu_e \geq \mu_d \quad (3.3.9)$$

EJEMPLO: Consideremos un péndulo de largo  $R$  apoyado en un plano inclinado. El plano forma un



Un péndulo apoyado en un plano que produce roce.

ángulo  $\alpha$  con el plano horizontal. Se escoge coordenadas cilíndricas con eje que pasa por el punto fijo del hilo y con eje  $Z$  perpendicular al plano inclinado.

Entonces la coordenada  $\rho$  siempre vale  $R$  y la coordenada  $z$  siempre es nula. Para describir el estado del péndulo basta el ángulo  $\phi$  que se indica en la figura adjunta. El vector posición es  $\vec{r} = R\hat{\rho}$ . Se da como condiciones iniciales  $\phi(0) = 0$  y  $\dot{\phi}(0) = 0$ . Además se sabe que se detiene en  $\phi = \phi_1$  sin haber retrocedido nunca. Veremos que estos datos determinan el valor del coeficiente de roce  $\mu_d$ . La fuerza normal es  $\vec{N} = N\hat{k}$ , la tensión del hilo es  $\vec{T} = -T\hat{\rho}$ , la fuerza de roce es  $\vec{F}_{RD} = -\mu_d N\hat{\phi}$ , el peso es  $m\vec{g} = mg(-\hat{k}\cos\alpha + \sin\alpha(\hat{\phi}\cos\phi + \hat{\rho}\sin\phi))$ . La fuerza total entonces vale

$$\vec{F} = (mg\sin\alpha\sin\phi - T)\hat{\rho} + (mg\sin\alpha\cos\phi - \mu_d N)\hat{\phi} + (N - mg\cos\alpha)\hat{k} \quad (3.3.10)$$

pero como no hay movimiento en la dirección  $\hat{k}$  la correspondiente componente de la fuerza tiene que ser nula, lo que implica que

$$N = mg\cos\alpha \quad (3.3.11)$$

El torque es  $\vec{\tau} = R\hat{\rho} \times \vec{F}$ , por tanto el torque tiene sólo componente a lo largo de  $\hat{k}$ .

De (1.2.4) se obtiene que la velocidad y la aceleración están dadas, en el caso actual, por

$$\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi} \quad \vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\phi} \quad (3.3.12)$$

Entonces el momento angular vale

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= m(R\hat{\rho}) \times (R\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &= mR^2\dot{\phi}\hat{k} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

y de aquí

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = mR^2\ddot{\phi}\hat{k} \quad (3.3.14)$$

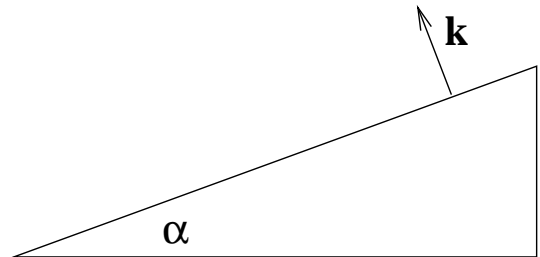
que es consistente con que el torque también apunta en la dirección  $\hat{k}$ . La ecuación dinámica que resulta es

$$R\ddot{\phi} = g\sin\alpha\cos\phi - \mu_d g\cos\alpha \quad (3.3.15)$$

Si esta ecuación es multiplicada por  $\dot{\phi}$  se puede integrar fácilmente y se obtiene

$$\frac{1}{2}R\dot{\phi}^2 = (\sin\alpha\sin\phi - \mu_d\phi\cos\alpha)g \quad (3.3.16)$$

Si en este resultado se reemplaza por el valor  $\phi_1$  para el cual el péndulo se detiene, se debe tener que el lado izquierdo sea nulo y entonces



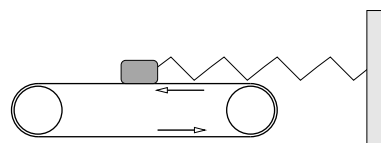
La situación de la figura anterior pero vista en forma transversal. El vector unitario  $\hat{k}$  se escoge perpendicular al plano inclinado.

$$0 = (\sin \alpha \sin \phi_1 - \mu_d \phi_1 \cos \alpha) g \quad (3.3.17)$$

que implica

$$\mu_d = \frac{\sin \phi_1}{\phi_1} \tan \alpha. \quad \blacktriangleleft \quad (3.3.18)$$

♠ Considere el sistema que se muestra en la figura. Se trata de un bloque de masa  $m$  sobre una cinta sin fin que se mueve con rapidez uniforme  $v_0$ . El bloque está además unido a un resorte de constante elástica  $k$  y largo natural  $D_0$ . El bloque tiene coeficientes de roce estático y dinámico  $\mu_e$  y  $\mu_d$  con la cinta. Haga un análisis exhaustivo del tipo de movimiento que tiene el bloque según el valor de  $v_0$  cuando los demás parámetros están fijos. Puede darse las condiciones iniciales que estime conveniente.

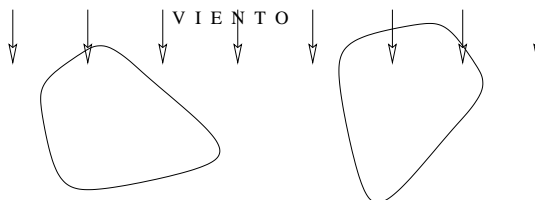


Un bloque apoyado en una cinta sin fin está también unido a un resorte. Puede haber momentos en que hay roce estático.

## 3.4. Roce viscoso

### 3.4.1. Generalidades

Cualquiera que haya tratado de correr con el agua hasta la cintura sabe que el paso de un cuerpo a través de un medio fluido encuentra una resistencia al movimiento. A esta fuerza la llamaremos *fuerza de roce viscoso*. Este fenómeno es complejo porque depende de muchos parámetros. Por ejemplo depende de la forma del sólido, pero además—dada una forma—depende del ángulo con que el cuerpo enfrenta al fluido. Depende además de la naturaleza de la superficie (suave, áspera ..), depende de la forma específica como el fluido se relaciona con la superficie sólida (por ejemplo, importa si un líquido moja o no moja a ese sólido), depende de la temperatura etc.



El roce viscoso depende de la forma del objeto y también del ángulo entre esa forma y la velocidad relativa al medio fluido.

Simplificando mucho el fenómeno se puede decir que hay dos regímenes: el fluido rodea al sólido en forma suave (se dice, flujo *laminar*), o bien el fluido forma turbulencias. En el primer caso la ley de roce queda bien descrita por una ley lineal (ver más abajo en la sec. §3.4.2) o, si es turbulento, por una ley cuadrática, descrita en la sec. §3.4.3.

### 3.4.2. Roce viscoso lineal

La ley de roce viscoso lineal establece que esta fuerza es proporcional a la velocidad relativa entre el sólido y el fluido y el coeficiente de proporcionalidad es negativo

$$\vec{F}_{\text{rvl}} = -c \vec{v} \quad (3.4.1)$$

donde  $c > 0$ , y  $c$ , como ya se ha dicho depende de una gran cantidad de parámetros particulares a cada caso.

EJEMPLO: Consideremos el lanzamiento de un proyectil tomando en cuenta el roce viscoso del aire, el cual supondremos que es de tipo lineal. La ecuación de movimiento es

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -c \frac{d\vec{r}}{dt} + m \vec{g} \quad (3.4.2)$$

En coordenadas cartesianas con eje  $Z$  vertical, y escogiendo la orientación del eje  $X$  tal que la velocidad inicial conocida sea  $\vec{v}_0 = \hat{i}v_{x0} + \hat{k}v_{z0}$ , todo el movimiento transcurre en el plano  $XZ$  y la ecuación se puede escribir por componentes en la forma

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -c v_x \\ m \frac{dv_z}{dt} &= -c v_z - mg \end{aligned}$$

que son dos ecuaciones independientes.

La segunda ecuación se puede escribir en la forma

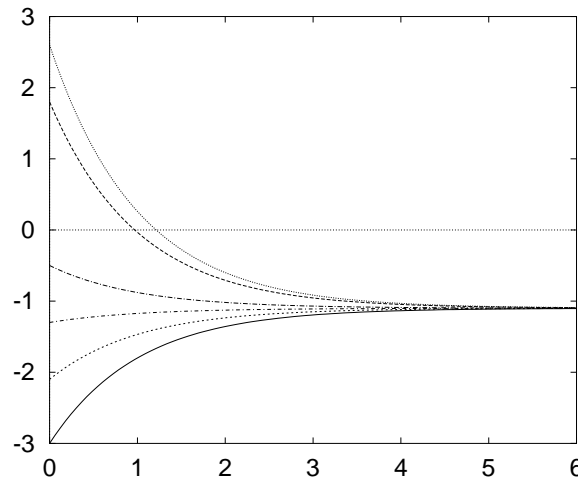
$$\frac{\frac{dv_z}{dt}}{v_z + \frac{mg}{c}} = -\frac{c}{m} \quad \text{o bien} \quad \frac{dv_z}{v_z + \frac{mg}{c}} = -\frac{c}{m} dt \quad (3.4.3)$$

Recordando que la primitiva asociada a integrar sobre  $v_z$  al lado izquierdo es

$$\ln \left( v_z + \frac{mg}{c} \right)$$

y la primitiva al integrar sobre  $t$  al lado derecho es  $t$  mismo entonces, integrando entre  $t = 0$  y  $t$  a la derecha y, correspondientemente, entre  $v_{z0}$  y  $v_z(t)$  a la izquierda, se obtiene

$$v_z(t) = v_{z0} e^{-ct/m} - \frac{mg}{c} \left( 1 - e^{-ct/m} \right) \quad (3.4.4)$$



Cualquiera que sea la condición inicial para  $v_z$  esta componente de la velocidad, con el transcurso del tiempo  $v_z(t)$  se acerca siempre a un mismo valor asintótico.

En particular, se puede ver que cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $v_z \rightarrow -\frac{mg}{c}$ . En la figura adjunta se muestra la evolución de  $v_z$  con diversos valores iniciales  $v_{z0}$ .

Puesto que la velocidad asintótica en este ejemplo, es negativa se puede observar que si el valor inicial es positivo, en algún momento se anula. Esto quiere decir que el proyectil está inicialmente subiendo  $v_z(0) > 0$ , en algún momento  $t^*$  su velocidad vertical se anula  $v_z(t^*) = 0$  para finalmente comenzar a descender,  $v_z(t) < 0$ .

♠ Demuestre que la función  $z(t)$  que surge de lo anterior es

$$z(t) = z_0 + \frac{m}{c}(v_{z0} - gt) + \frac{m^2 g}{c^2} - \frac{m}{c} \left( \frac{mg}{c} + v_{z0} \right) e^{-ct/m} \quad (3.4.5)$$

Una trayectoria balística con este tipo de viscosidad se obtiene usando (3.4.5) y una expresión similar para  $x(t)$ . La única diferencia es que en la dirección  $X$  se debe eliminar los términos que contienen  $g$ ,

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{c}v_{x0} - \frac{m}{c}v_{x0}e^{-ct/m} \quad (3.4.6) \quad \text{altura}$$

Combinando (3.4.5) y (3.4.6) se obtiene trayectorias como la que se muestra en la figura.

Marginalmente se hace notar que de (3.4.6) se puede despejar  $t$  para utilizar esa forma en (3.4.5) lo que da a  $z$  como función de  $x$ . En efecto

$$t = \frac{m}{c} \ln \left[ 1 - \frac{c(x - x_0)}{m v_{x0}} \right] \quad (3.4.7)$$

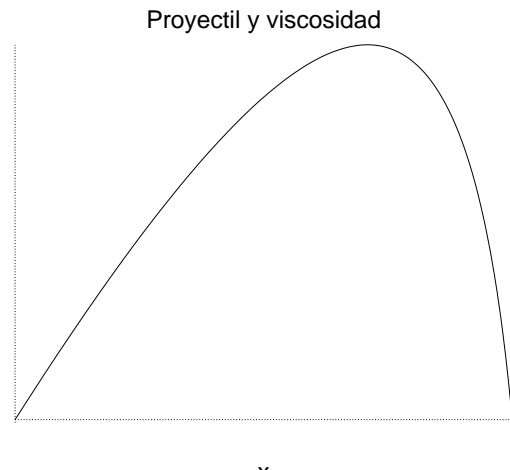
y entonces

$$z(x) = z_0 + \frac{mg}{c v_{x0}} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}}(x - x_0) + \frac{m^2 g}{c^2} \ln \left[ 1 - \frac{c(x - x_0)}{m v_{x0}} \right] \quad (3.4.8)$$

es la trayectoria del lanzamiento balístico con roce viscoso lineal.

♠ Se sabe que en lanzamiento balístico sin roce viscoso desde un punto a otro a igual altura, el alcance máximo se obtiene cuando la velocidad inicial forma un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  con respecto a la vertical. Obtenga la expresión para el alcance máximo en una situación similar pero cuando el roce viscoso lineal es tomado en cuenta.

Tanto la solución (3.4.4) y (3.4.5) parecen ser singulares para  $c = 0$ , ya que  $c$  aparece en denominadores. Esto, sin embargo, es solo aparente. Si se analiza, por ejemplo, el caso de (3.4.4), el primer término sencillamente tiende a  $v_{z0}$  mientras que el paréntesis



Trayectoria de un proyectil para el cual la viscosidad del aire tiene un efecto apreciable. Para calcular esta curva se utiliza la ley de roce viscoso lineal siguiendo el método que se indica bajo (3.4.5)

en el último término contiene  $(1 - \exp[-ct/m]) = 1 - 1 + \frac{ct}{m} - \frac{c^2 t^2}{2m^2} + \dots$ . Si esta expresión se multiplica por  $mg/c$  y se hace el límite  $c \rightarrow 0$  se obtiene  $gt$  y el resultado neto es  $v_z(t; c = 0) = v_{z0} - gt$  que es la solución conocida en el caso sin roce viscoso.

### 3.4.3. Roce viscoso cuadrático

En el caso del roce viscoso cuadrático la fuerza de roce es

$$\vec{F}_{\text{rv}} = -\eta \|\vec{v}\| \vec{v} \quad (3.4.9)$$

Sin gravedad: Como primer ejemplo resolvamos el sencillo caso en que ésta es la única fuerza y el movimiento es en una sola dirección. Supondremos que  $v > 0$  todo el tiempo, entonces

$$m\dot{v} = -\eta v^2$$

que se resuelve primero escribiendo la ecuación anterior en la forma

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\eta}{m} dt$$

Si el lado derecho se integra entre  $t = 0$  y un valor arbitrario de  $t$ , el lado derecho debe integrarse entre el valor de  $v$  en  $t = 0$ , que se denotará  $v_0$  y un valor arbitrario  $v(t)$ . Se obtiene entonces

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v_0} = -\frac{\eta t}{m}$$

que da

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{\eta v_0}{m} t} \quad (3.4.10)$$

Se puede notar que la velocidad inicial es realmente  $v_0$  y que la velocidad decrece monótonamente con el tiempo acercándose cada vez más a cero.

Con gravedad: Ahora se analizará un caso en que además hay gravedad. Este caso es intrínsecamente mucho más complicado que el caso de viscosidad lineal y solo se estudiará el movimiento rectilíneo. Se supondrá que el eje  $Z$  es vertical hacia arriba y que hay una fuerza constante  $-mg$ .

La fuerza de roce viscoso apunta hacia arriba si la partícula desciende y apunta hacia abajo si va asciendiendo, es decir,

$$m\ddot{z}(t) = -\eta |\dot{z}(t)| \dot{z} - mg \quad (3.4.11)$$

Como siempre, la aceleración es  $\ddot{z} = \dot{v}$  y la velocidad es  $\dot{z} = v$ .

EL DESCENSO,  $v(t) < 0$ . En este caso  $|\dot{z}| = -v$  y entonces la ecuación es

$$m\dot{v} = \eta v^2 - mg \quad (3.4.12)$$

Existe una solución en que la velocidad vale  $v = -\sqrt{mg/\eta}$  todo el tiempo, ya que con ella el lado derecho de la ecuación anterior es nulo. A esta velocidad (negativa) tan particular la llamaremos  $-v_\infty$ , con

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\eta}} \quad (3.4.13)$$

que es una cantidad positiva.

Para hacer más transparente el método de solución se hará el cambio de función  $v(t) = -V(t)$  y como se trata del caso  $v < 0$  entonces  $V > 0$ . La ecuación dinámica con esta nueva variable es

$$m\dot{V} = -\eta V^2 + mg \quad \text{o bien} \quad \dot{V} = -\frac{\eta}{m}(V^2 - v_\infty^2) \quad (3.4.14)$$

y se puede escribir como una relación diferencial,

$$\frac{dV}{V^2 - v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} dt \quad (3.4.15)$$

Que, al lado izquierdo, se integra desde  $V_1$  que es el valor inicial ( $t = 0$ ) de  $V(t)$

$$\int_{V_1}^{V(t)} \frac{dV}{V^2 - v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} \int_0^t dt' = -\frac{\eta}{m} t \quad (3.4.16)$$

La integral del lado izquierdo solo tiene sentido si el denominador en el integrando no se anula en el rango de la integración. Veremos que este denominador nunca se anula.

La primitiva de la integral a la izquierda es

$$\frac{1}{2v_\infty} \ln \left( \frac{v_\infty - V(t)}{v_\infty + V(t)} \right)$$

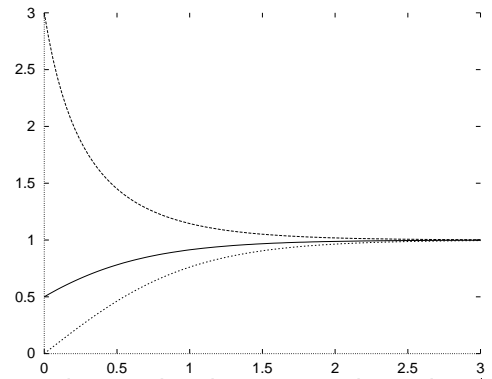
y del lado derecho es  $-\eta t/m$ . Al integrar se obtiene entonces

$$\frac{1}{2v_\infty} \ln \left( \frac{v_\infty - V(t)}{v_\infty + V(t)} \cdot \frac{v_\infty + V_1}{v_\infty - V_1} \right) = -\frac{\eta t}{m}$$

Si para algún instante finito ocurriera que  $V(t) = v_\infty$  el argumento del logaritmo se anularía lo que implicaría un lado izquierdo igual a  $-\infty$  que contradice que se trate de un instante finito. Por tanto  $V(t) \neq v_\infty$  para todo  $t$  finito.

El lado izquierdo se anula cuando  $V(t) = V_1$  que es lo que se debe esperar ya que  $V_1$  es la velocidad cuando  $t = 0$ . La solución explícita es

$$V(t) = \frac{V_1 \cosh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right) + v_\infty \sinh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)}{v_\infty \cosh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right) + V_1 \sinh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)} v_\infty \quad (3.4.17)$$



Se puede apreciar el comportamiento de  $V(t)$  dado en (3.4.17) para diversas velocidades iniciales y un  $v_\infty$  común.



Cuando  $t \rightarrow \infty$  la fracción tiende a 1 y se obtiene  $v_\infty$  como debe ser mientras que si se toma  $t = 0$  los senos hiperbólicos se anulan mientras los cosenos hiperbólicos se hacen 1 y se obtiene  $V(0) = V_1$ . Esta función es monótona entre  $t = 0$  y  $t = \infty$ .

En el caso especial  $V_1 = 0$  el resultado es

$$V(t; V_1 = 0) = v_\infty \tanh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right) \quad (3.4.18)$$

Otro caso especial de (3.4.17) es aquel en que no hay gravedad. Lo más sencillo es resolver la ecuación desde el comienzo con velocidad inicial  $V_1$  y  $g = 0$ . Pero si se toma el límite de (3.4.17) cuando  $v_\infty \rightarrow 0$ . Se obtiene

$$V(t; g = 0) = \frac{V_1}{1 + \frac{\eta V_1}{m} t} \quad (3.4.19)$$

que es el resultado ya visto (3.4.10).

Ahora se deducirá la velocidad  $v_f$  que tiene un cuerpo, que comienza a caer desde el reposo y altura  $z = h$ , al llegar al punto  $z = 0$ . Cuando no hay roce un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba, regresa al punto de partida con una velocidad igual a la de partida excepto por el signo. Con viscosidad se verá que eso no es cierto.

La forma más cómoda de llegar a este resultado se consigue desde (3.4.15) retomando que  $V = -v$  y por tanto  $dV = -dv$

$$\frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = \frac{g dt}{v_\infty^2} \quad (3.4.20)$$

Al multiplicar esta relación por  $v$ , en el numerador de la izquierda aparece  $v dv = \frac{1}{2} dv^2$  y al derecho  $\dot{v} dt = dz$

$$\frac{1}{2} \int_0^{v_f^2} \frac{dv^2}{v^2 - v_\infty^2} = \int_h^0 \frac{g dz}{v_\infty^2} \quad (3.4.21)$$

Lo que se acaba de escribir es que la velocidad varía desde cero a  $v_f$  mientras la posición va desde  $z = h$  hasta  $z = 0$ . Al integrar se obtiene

$$h = -\frac{v_\infty^2}{2g} \ln\left(1 - \frac{v_f^2}{v_\infty^2}\right) \quad (3.4.22)$$

o bien,

$$v_f = \sqrt{1 - \exp\left[-\frac{2gh}{v_\infty^2}\right]} v_\infty \quad (3.4.23)$$

♠ Haga el límite de (3.4.23) cuando el coeficiente de roce viscoso  $\eta$  se anula.

EL ASCENSO,  $v > 0$ . La ecuación es

$$m\dot{v}(t) = -\eta v^2 - mg \quad \text{o bien} \quad \dot{v}(t) = -\frac{\eta}{m} (v^2 + v_\infty^2) \quad (3.4.24)$$

Puesto que  $v > 0$  esta ecuación representa una partícula  $P$  moviéndose en dirección opuesta a la fuerza constante  $-mg$ , lo que permite adivinar que  $P$  acabará por detenerse. Seguidamente comenzará a moverse en la dirección opuesta pero ese es el otro caso ya estudiado  $v < 0$ .

De (3.4.24) se obtiene que

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2 + v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} \int_0^t dt' \quad (3.4.25)$$

que conduce a

$$\frac{1}{v_\infty} \left[ \arctan \left( \frac{v(t)}{v_\infty} \right) - \arctan \left( \frac{v_0}{v_\infty} \right) \right] = -\frac{\eta}{m} t \quad (3.4.26)$$

que puede ser reescrito como

$$v(t) = \tan \left( \arctan \left( \frac{v_0}{v_\infty} \right) - \frac{gt}{v_\infty^2} \right) v_\infty \quad (3.4.27)$$

Esta expresión que tiene una apariencia algo complicada está representada en la figura asociada a (3.4.27), vale  $v_0$  cuando  $t = 0$  y luego decrece monótonamente hasta anularse en un tiempo finito  $t_1$ . Si se toma el límite  $g \rightarrow 0$  da el límite correcto descrito por (3.4.10).

La solución se hace cero cuando el argumento de la función tangente se anula, lo que ocurre en el instante  $t_1$  tal que

$$t_1 = \frac{v_\infty^2}{g} \arctan \left( \frac{v_0}{v_\infty} \right) \quad (3.4.28)$$

La distancia  $h$  que recorre desde la posición inicial hasta el la posición de máxima altura en el instante  $t_1$  en que el cuerpo se detiene se puede obtener a partir de multiplicar los integrandos de la ecuación inicial (3.4.24) por  $v(t)$

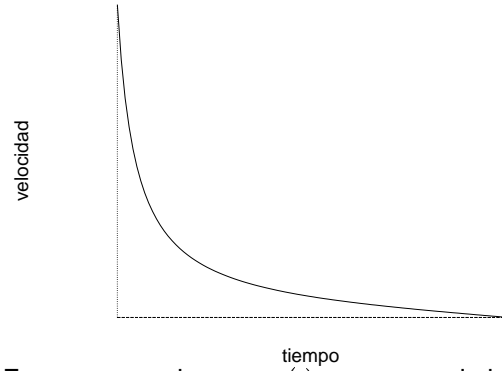
$$\int_{v_0}^0 \frac{v dv}{v^2 + v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} \int_0^{t_1} dz \quad (3.4.29)$$

que lleva a

$$h = \frac{m}{2\eta} \ln \left( \frac{v_0^2}{v_\infty^2} + 1 \right) \quad (3.4.30)$$

Si esta expresión se iguala con la que se obtuvo en (3.4.22) se despeja

$$v_f^2 = \frac{v_0^2}{1 + \frac{v_0^2}{v_\infty^2}} \quad (3.4.31)$$



Forma como decrece  $v(t)$  en un movimiento ascendente, según (3.4.27), por efecto del peso y de una viscosidad cuadrática.