Tarea 1: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
Diciembre de 2008

P1. Usando la definición de continuidad, demostrar que la función $y = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$.

P2. Probar que la función $y = \sqrt{x}$ es continua para $x > 0$.

P3. La función $f(x)$ no esta definida para $x = 0$. Defina $f(0)$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, si:

a) $f(x) = \frac{1}{x}[(1+x)^n - 1]$.
b) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$.
c) $f(x) = \frac{1}{x}[\ln(1+x) - \log(1-x)]$.
d) $f(x) = \frac{1}{x}(e^x - e^{-x})$.
e) $f(x) = x^2 \sin(1/x)$.
f) $f(x) = x \cot x$.

P4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x) = [x]$
b) $f(x) = x - [x]$
c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$
d) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$
e) $f(x) = [\frac{1}{x}]$

P5. Este problema entrega una demostración de la continuidad de las funciones seno y coseno.

a) Use la desigualdad
$$|\sin x| \leq |x| \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{3},$$
para probar que el seno es continuo en cero.
b) Use la identidad $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ para probar que el coseno es continuo en cero.
c) Use las fórmulas para $\sin(x+h)$ y $\cos(x+h)$ para probar que el seno y el coseno son continuos en cualquier real x.

P6. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface:
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Muestre que si f es continua en 0, entonces f es contínua en todo $\mathbb{R}$.
Indicación: Muestre que $f(0) = 0$.

P7. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{-1/x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Pruebe que f es continua.

P8. Determinar $a, b, c > 0$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\sin(bx)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(c+(a+b)x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

P9. Determine el dominio y puntos de continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ x + \ln x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \arctan((x-2)^2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

P10. Estudiar la continuidad de la función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}$ y reparar sus discontinuidades.

P11. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f para $x \neq 0$.

b) Demostrar, usando la definición de continuidad, que f es continua en $x = 0$.

P12. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 2 < x < 3. \end{cases}$$

Estudie la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$.

P13. Calcular el valor de a para que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^4 - 3x^3}{7x^5 + 3x^3} & \text{si } x \neq \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

P14. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (donde $a, p \in \mathbb{R}$):

a) $f(x) = |x|^p \sin(\frac{1}{x})$, si $x \neq 0$, $f(0) = a$.

b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \\ (x+p)^2 & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

c) $f(x) = \tan x$

d) $f(x) = |x|^p$ si $x \neq 0$, $f(0) = a$.

e) $f(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$, si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$; $f(0) = 1$