Tarea 2: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
Diciembre de 2008

P1. Un conductor demora 5 horas en recorrer los (aproximadamente) 500 kms. que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 kms., que es recorrido en exactamente 1 hora.

P2. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n + 1$.

a) $f(x) = x^3 - x + 3$.
b) $f(x) = x^3 - 3x + 3$.
c) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
d) $f(x) = x^5 + x + 1$.

P3. Sea $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Demostrar que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

P4. Derivar las siguientes funciones:

a) $y = \sin(x^{\cos x}) + \cos(x^{\sin x})$
b) $y = \sqrt[n]{\frac{x-tgx}{x+\sec x}}$
c) $y = \arcsin(\frac{3\sin x}{4+5\cos x})$.

P5. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

a) $y = x^5(a + 3x)^3(a - 2x)^2$.
b) $y = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$.
c) $y = \arcsin(\sqrt{\sin x})$.
d) $y = \arctan(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}})$, $(0 \le x < \pi)$.
e) $y = \arctan\frac{a}{x} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.
f) $y = \operatorname{arc}\cos(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})$.
g) $y = \arcsin(\sin x)$.
h) $y = \ln\left(\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right) + 2\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.
i) $y = x^{\arcsin x}$.

P6. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pruebe que f es diferenciable en $\mathbb{R}$.

P7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x) - f(y)| \le a(x - y)^2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $a \ge 0$. Pruebe que $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe y $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

P8. Calcular por definición la derivada de la siguiente función

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

P9. Sean $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:

a) $g(x) = xf(x) + 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

b) $g(a + b) = g(a)g(b)$.

Demuestre que $g'(x) = g(x)$.

P10. Sea $f \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica:

a) f es continua para todo $x \geq 0$.

b) f' existe para todo $x > 0$.

c) $f(0) = 0$.

d) f' es estrictamente creciente.

Sea $g \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Demuestre, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0, x]$, que $f'(x) > g(x)$.
2. Deduzca que g es estrictamente creciente.

P11. Estudie completamente la siguiente función:

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3\ln(x)}{x}$$

para ello

a) Analice el Dominio de f y encuentre un cero por inspección.

b) Estudie la existencia de asíntotas.

c) Calcule f' y estudie el crecimiento de f. Analice la existencia de mínimos y máximos.

d) Calcule f'' y estudie la convexidad de f. Analice puntos de inflexión.

e) Bosqueje f.