Tareas 3 y 4: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
Enero de 2008

1. Tarea 3

P1. Calcule las siguientes Sumas de Riemann:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k\sinh(k/n)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} (k\sqrt{n^2-k^2})$.

P2. Determinar el limite cuando n tiende a $+\infty$.

a) $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

b) $T_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{k+n}$.

c) $U_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+4k/n}}$.

P3. Sea $f : [1, n) \to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

a) Usando la partición $P = \{1, 2, ..., n\}$ pruebe que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i) \quad \forall n \geq 2$$

b) Considere $f(x) = \ln(x)$, demuestre que:

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n! \quad \forall n > 0$$

P4. Dada la partición $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[1, e]$ con $x_k = e^{\frac{k}{n}}$ y la función $f(x) = \ln x$. Calcular

a) $S(f, \mathcal{P})$ y $s(f, \mathcal{P})$.
Indicación: $\sum\limits_{k=1}^{n} ka^k = \frac{1}{1-a}\left\{1-(n+1)a^n + \frac{a(1-a^n)}{1-a}\right\}$.

b) Concluya que f es integrable en $[1, e]$ y calcule $\int\limits_1^e \ln(x)dx$.

P5. Sean f y g dos funciones reales, integrables en un intervalo cerrado $[a, b]$.

a) Pruebe que el producto $f \cdot g$ es integrable en $[a, b]$.

b) Pruebe que si $|f(x)| \geq c$, $\forall x \in [a, b]$ con $c > 0$, entonces el cuociente f/g es integrable en $[a, b]$.

P6. Sea f una función derivable en $[a,b]$ y tal que $|f'(x)| \leq K \ \forall x \in [a,b]$.

a) Use el teorema del valor medio para deducir que:

$$\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \leq K\|\mathcal{P}\|(b-a)$$

b) Demuestre que f es integrable en $[a,b]$.

c) Verifique que $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}[S(f,\mathcal{P}) + s(f,\mathcal{P})] \right| \leq \frac{1}{2}K\|\mathcal{P}\|(b-a)$$

P7. *a*) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable en el intervalo $[a,b]$. Compruebe que $-f$ también es integrable, y que:

$$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$

b) Sean f, g dos funciones acotadas en $[a,b]$. Se sabe que f es integrable en $[a,b]$ y que para cierto punto $c \in [a,b]$,

$$g(c) \neq f(c)$$

$$g(x) = f(x), \forall x \in [a,b] \setminus c$$

Pruebe que:

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

P8. Pruebe que $f(x) = \ln(x)$ es integrable en $[1,2]$, use la partición siguiente: $P = \left\{1, \frac{n+1}{n}, ..., \frac{n+n}{n} = 2\right\}$.

P9. Considere la sucesión $a_n = \int_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

a) Explique porqué (a_n) está bien definida, es decir, porqué q^x es Riemann integrable en $[0,n]$, y muestre que es estrictamente creciente.

b) Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P = \{0, 1, ..., n\}$.

c) Utilice las sumas para obtener las siguientes cotas para (a_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x dx < \frac{1}{1-q}$$

d) Concluya que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface:

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$

P10. Sea f impar e integrable en $[-a,a]$.

a) Pruebe que:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

b) Sea $g(x) = \frac{1+x^3}{\cos^2 x}$ en $[-\pi/4, \pi/4]$. Calcule:

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} g(x)\, dx$$

P11. Sea $F(x) = \int_0^x (u-x)f'(u)du$, con f' integrable. Pruebe que:

$$F'(x) = f(0) - f(x)$$

P12. Demuestre que si f es T-periódica e integrable, entonces:

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx$$

2. Tarea 4

P1. Sea $I_{m,n} = \int_0^1 x^n(1+x)^m dx$. Demuestre que se satisface:

$$(m+1)I_{m,n} + nI_{m+1,n-1} = 2^{m+1}$$

P2. Sea $G(x) = \int_0^1 e^{-|x-y|}f(y)dy$. Calcule $G'(x)$

P3. Calcule las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$

b) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

d) $\int \sin^2(x)dx$

e) $\int \frac{1}{e^{3x}\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$

f) $\int \cos(\ln(x))dx$

P4. Calcule las siguientes recurrencias:

a) $I_n = \displaystyle\int \frac{x^n}{1+x^2}dx$

b) $J_n = \displaystyle\int \sec^n(x)dx$

c) $K_n = \displaystyle\int e^{\alpha x}x^{-n}dx$

d) $L_n = \displaystyle\int \tan^n(x)dx$

P5. Para $p, q \in \mathbb{N}^*$, se define $I(p,q) = \int\limits_0^1 x^p(1-x)^q dx$ y $I(p,0) = \int\limits_0^1 x^p dx$.

(a) Demuestre que $I(p+1,q) = \frac{p+1}{q+1}I(p,q+1)$.

(b) Muestre que $I(p,q) - I(p+1,q) = I(p,q+1)$ y deduzca que $I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+q+2}I(p,q)$.

(c) Calcule $I(p,0)$ y concluya que $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

P6. para $n \geq 1$ natural definimos $I_n = \int\limits_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$.

(a) Calcule I_1.

(b) Muestre que para todo $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

(c) Deduzca que para todo $n \geq 2$, $I_n = e^2 - (1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!})$.

P7. Usando el método de las fracciones parciales calcule:

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$$

P8. Usando el cambio de variables $u = \tan(x/2)$, calcule $\cos(x), \sin(x), dx$ en función de u, y resuelva la integral:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x) + 1} dx$$

3. Desafios

P1. Sean a y b dos numeros reales tales que $a < b$ y sea f una función real a valores positivos definida e integrable sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Demostrar que la función $\sqrt{f}$ es integrable sobre $[a, b]$.

P2. Sean a y b dos numeros reales tales que $a < b$ y sea f una función definida y continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Supongamos que

$$\int\limits_a^b [f(x)]^2 dx = 0.$$

Demostrar que $f = 0$ sobre el intervalo $[a, b]$.