Auxiliar 4: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
Diciembre de 2008

P1. Sea f creciente en $[0,1]$. Probar que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{f(1)-f(0)}{n}$$

P2. Sea $x > 0$, demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} e^{px/n} = \frac{e^x - 1}{x}$$

Indicación: Si $x > 0$, entonces $\int\limits_0^x e^t dt = e^x - 1$.

P3. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^3}\right)$.

P4. Calcule

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e(x^2-\pi^2) + \pi \int\limits_{x^2}^{\pi^2} \frac{e^{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{t})}}{\sqrt{t}}}{1+\cos x}$$

P5. Demuestre que:

$$\left|\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{1+x^2} dx\right| \leq \frac{\pi}{12e}$$

P6. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable, tal que f satisface

$$xf(y) + yf(x) \leq 1 \quad \forall x, y \in [0,1]$$

Pruebe que:

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$$

P7. Sea f una función continua definida sobre $[0,1]$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $I_n = \int\limits_0^1 x^n f(x)dx$. Mostrar que la sucesión $s_n := nI_n$ tiende a $f(1)$ cuando n tiende a $+\infty$.

P8. Sea f integrable. Calcule

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

P9. Usando sumas de Riemann pruebe que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y $f \geq 0$, entonces f^2 es integrable en $[a,b]$

P10. Calcular las siguientes primitivas *a*) $\int \frac{\cot x}{\ln(sinx)}dx$

b) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$

c) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

P11. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ tal que $f(0) = 0$ y $\forall x \in (0,1)$ $0 \leq f'(x) \leq 1$.
Se pide probar que: $[\int_0^1 f(t)dt]^2 \geq \int_0^1 f(t)^3 dt$.

a) Pruebe que $\forall x \in [0,1]$ $f(x) \geq 0$

b) Defina $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante:

$$G(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f(x)^2$$

Muestre que G es creciente y deduzca que $\forall x \in [0,1]$ $G(x) \geq 0$

c) Defina $F(x) = [\int_0^x f(t)dt]^2 - \int_0^1 f(t)^3 dt$. Pruebe que $F'(x) = f(x)G(x)$, establezca el crecimiento de F y deduzca que $F(x) \geq 0$ $\forall x \in [0,1]$.
Concluya.

P12. Calcule la primitiva

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(\sqrt{1+x^2})^3}}dx$$

P13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, con derivada continua. Si $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ son tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $\int_a^b f^2 = 1$. Demuestre que:

$$\int_a^b xf(x)f'(x) = -1/2$$

P14. Demuestre que $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ satisface la recurrencia:

$$(1+2n)I_n = (2x^n\sqrt{1+x}) - 2nI_{n-1}$$

P15. Calcular la primitiva

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$$