Auxiliar 9: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
Enero de 2009

P1. Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$, sean $A = \int\limits_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$ y $B = \int\limits_1^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$, muestre que A y B son finitas e iguales.
Indicación: Use el cambio de variables $y = \frac{1}{x}$.

P2. Se define la trompeta de Torricelli como la revolución en torno al eje OX de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, considerando $x \in [1,\infty)$.

a) Calcule el volumen de la trompeta.
b) Calcule el área de la trompeta.
c) ¿existe alguna contradicción en los cálculos anteriores?.

P3. Estudie la convergencia de la integral impropia

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$$

para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

P4. Sea $\alpha > 0$, estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx.$
b) $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx.$
c) $\int\limits_1^\infty \sin(x^2)dx.$
d) $\int\limits_1^\infty e^{\sin x}\frac{\sin(2x)}{x^\alpha}dx.$
e) $\int\limits_1^\infty \ln^\alpha x\frac{\sin(x)}{x}dx.$

P5. *a*) Suponga que $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ es continua y periódica con periodo $T > 0$, y $g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ es monótona y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Probar que si $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = 0$, entonces la integral $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ converge. Más aún, probar que si $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx \neq 0$, entonces la integral impropia $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ converge si y sólo si $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ converge.

b) Use la parte anterior para estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

1) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\sin x)}{x}e^{\cos x}dx,$
2) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\sin x)}{x}e^{\sin x}dx$

P6. Para $\alpha > 0$, estudiar la convergencia de la integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}dx.$$