Tarea 6: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
Enero de 2009

1. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2+x^4}.$

   b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}.$

   c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5}{x^{12}+1}.$

   d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\ln(1+e^x).$

   e) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}.$

   f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}.$

   g) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\csc(x).$

   h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{\frac{3}{2}}}.$

   i) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}.$

   j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}.$

   k) $\displaystyle\int_0^\infty x^x.$

   l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x\ln^p(x)}.$

2. Calcular, si existe, el área comprendida entre la curva $y=\frac{1}{a^2+x^2}$ y el eje OX.

3. Determinar para cuales valores de $n\in\mathbb{N}$ la integral $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^3(1-x)}}$ es convergente y establezca una forma recursiva para la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Mostrar que la integral
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen}(x))$$
verifica la relación: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(x))=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x))$. Deducir el valor de I.

5. *a*) Pruebe que las integrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ divergen.

   b) Pruebe que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$ converge y encuentre su valor.

   c) Encuentre los valores de $\alpha>0$ para lo cuales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}\,dx$ converge.

   Indicación: El comportamiento de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ se considera conocido.

6. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{senh}(x)}\right)$para $x\neq 0$ y $f(0)=k$.

   a) Encuentre el valor de k de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

   b) Estudie la convergencia de las integrales $\displaystyle\int_0^1 f$, $\displaystyle\int_1^\infty f$, $\displaystyle\int_0^\infty f$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f$.

7. Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})$. Se pide :

a) Estudiarla completamente indicando dominio,ceros, límites importantes, asíntotas, continuidad, crecimiento, concavidades, gráfico y recorrido.

b) Determinar si el área de las siguientes regiones es o no finita. En caso afirmativo dar su valor.

$$R_1 = \{(x, y)/x < 0 \;\; f(x) \leq y \leq 1\}$$
$$R_2 = \{(x, y)/0 < x \leq 1 \;\; f(x) \leq y \leq 1\}$$
$$R_3 = \{(x, y)/x \geq 1 \;\; f(x) \leq y \leq 1\}$$

Indicación: Ni $e^{\frac{1}{x}}$ ni $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ tienen primitivas explícitamente calculables, sin embargo, f sí la tiene.

8. *a*) Aplicando la definición de integral impropia calcule:

$$\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}$$

b) Analice la convergencia de la integral:

$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$$

c) Analice la convergencia de las áreas de las superficies engendradas al rotar la función $|\ln(x)|\colon\,]0, 1] \to \mathbb{R}$ en torno al eje OX y en torno al eje OY.

9. Mostrar que si $\int_a^{\infty} xf(x)dx$, $a > 0$, existe, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ existe.