Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Taller 1 - MA2A1
20 Diciembre 2008

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Luttges

1. Si d es una métrica en un e.v. cualquiera E entonces $d' = \text{mín}\{d, 1\}$ es también métrica en E pero d' no es inducida por ninguna norma.

2. Sea S el conjunto de las sucesiones a valores reales indizadas por $\mathbb{N}$.

   a) Definamos el conjunto $\ell_\infty^0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S : \exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0\ \forall n \geq n_0\}$.
   Demuestre que ℓ_∞^0 es espacio vectorial y que $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ es norma en ℓ_0.

      1) ℓ_∞^0 es espacio vectorial.
      2) $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ es norma en ℓ_0

   b) Definamos el conjunto $\ell_1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S : \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |a_n| < \infty\}$.

   Demuestre que ℓ_1 es espacio vectorial y que $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |a_n|$ es norma en ℓ_1.

      1) ℓ_1 es espacio vectorial.
      2) $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |a_n|$ es norma en ℓ_1.

   c) pruebe que $\ell_\infty^0 \subsetneq \ell_1$

   d) pruebe que $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes sobre ℓ_∞^0

3. para los números $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ y $z_1, ..., z_n$ se cumple:

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i)^4 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^4)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^2(\sum_{i=1}^{n} z_i^4)$$

4. Sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$, $B = A\bigcup\{0\}$. Pruebe que A no es cerrado ni abierto. Pruebe que B es cerrado pero no abierto. Pruebe que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

5. *a*) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $A \subseteq B$. Pruebe que $IntA \subseteq IntB$

   b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $x_0 \in A$. Pruebe que $A\backslash\{x_0\}$ es abierto.

6. Con la métrica discreta en $\mathbb{R}^n$ se cumple que los únicos subconjunto que son abiertos y cerrados a la vez son el espacio completo, el conjunto vacío y los *singletón* $\{x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

7. Considere $\mathbb{R}^n$ con un norma cualquiera $\|\cdot\|$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contractante, es decir:

$$\exists k \in (0,1) \text{ tal que } \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Nuestro objetivo es demostrar el Teorema del Punto Fijo de Banach para $\mathbb{R}^n$ que dice que dada una función f contractante de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, existe un único punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x^*) = x^*$.
Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, considere la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)\ \forall n \geq 1$

a) Demuestre que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$.

b) pruebe que $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \dfrac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|\ \forall p \in \mathbb{N}$.

c) Demuestre que $x_n \to x^*$ tal que $f(x^*) = x^*$.

d) Demuestre que x^* es único. Concluya el resultado

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(x^2 + y^2) & \text{si} \quad x^2 + y^2 > 1 \\ \ln\left(\dfrac{1 + x^2 + y^2}{3 - x^2 - y^2}\right) & \text{si} \quad x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

a) Determine el dominio y el recorrido de f

b) Determine y grafique las curvas de nivel

9. Dibuje la superficie de nivel de valor $\alpha = 1, 0, -1$, si es que existen, para las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = 6x - y + 2z$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

c) $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$