Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Tarea 2 - MA2A1
Entrega: al inicio de Control 1

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Cristopher Hermosilla y Renzo Luttges

1. Sea (E, d) un espacio métrico:

   a) Sea $A \subseteq E$ un conjunto finito. Sea $B = \{x \in E : d(x, y) \leq 1 \text{ para algún } y \in A\}$. Pruebe que B es cerrado. Qué sucede si d es la métrica discreta? Es B abierto?

   b) Sea $X \subseteq E = \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y sea $r > 0$ un real fijo.
   Sea $Y = \{y \in E : \|x - y\| = r \text{ para algún } x \in X\}$. Pruebe que Y es cerrado.

2. Sea $m \in \mathbb{N}$, Considere el espacio $H_c^m(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^m([a, b], \mathbb{R}) : f^{(k)} \in L_c^2([a, b], \mathbb{R}), \forall k \leq m, k \in \mathbb{N}\}$.
   En $H^m(\mathbb{R})$ definimos
   $$\langle f, g\rangle_m = \sum_{k=0}^{m} \left\langle f^{(k)}, g^{(k)} \right\rangle_2$$
   Pruebe que lo anterior define un producto interno.

3. Sea $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de $m \times n$ a coeficientes reales. Se define para $A, B \in E$ las siguiente función:
   $$\langle A, B\rangle = Traza(AB^t)$$
   pruebe que dicha función es un producto interno en E.

4. Demueste que la norma en un espacio vectorial normado E, que proviene de un producto interno, verifica la igualdad del paralelogramo:
   $$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \; \forall x, y \in E$$
   Además pruebe que si E es un e.v.n. sobre $\mathbb{R}$ entonces se cumple la identidad polar, es decir:.
   $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

5. Pruebe que dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\|$ si y sólo si x e y son linealmente dependientes. Además pruebe que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales entonces $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

6. Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual.

   a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ dos sucesiones en la bola unitaria abierta. Supongamos que $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Pruebe que $\|x_n - y_n\| \to 0$.

   b) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, pruebe que $\langle x_n, v\rangle \to \langle x, v\rangle \; \forall v \in \mathbb{R}$ si y sólo si $x_n \to x$

7. Sea (E, d) un espacio métrico. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión de Cauchy. Consideremos una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$

   a) Pruebe que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión de Cauchy.

   b) Pruebe que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $z \in E$ si y solo si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $z \in E$