**Guía
Semana 10**

1. RESUMEN

Integral y propiedades básicas. Dada $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ y un reticulado $\mathcal{S}$, definimos la *suma inferior* para la función f asociada a $\mathcal{S}$ como

$$I_{\mathcal{S}}(f) := \sum_{i\in I} m_i(f)V(\mathcal{R}_i), \text{ donde } m_i(f) = \inf_{x\in\mathcal{R}_i} f(x).$$

La *suma superior* está dada por

$$S_{\mathcal{S}}(f) := \sum_{i\in I} M_i(f)V(\mathcal{R}_i), \text{ donde } M_i(f) = \sup_{x\in\mathcal{R}_i} f(x).$$

La *integral inferior* de f en $\mathcal{R}$ es

$$\underline{\int}_{\mathcal{R}} f := \sup\{I_{\mathcal{S}}(f) \ / \ \mathcal{S} \text{ es un reticulado de } \mathcal{R}\}$$

y su *integral superior* es

$$\overline{\int}_{\mathcal{R}} f := \inf\{S_{\mathcal{S}}(f) \ / \ \mathcal{S} \text{ es un reticulado de } \mathcal{R}\}.$$

• Se tiene que $\underline{\int}_{\mathcal{R}} f \leq \overline{\int}_{\mathcal{R}} f$.

Decimos que la función f es *Riemann-integrable* si $\underline{\int}_{\mathcal{R}} f = \overline{\int}_{\mathcal{R}} f$, en cuyo caso llamamos a este valor común *la integral de f sobre* $\mathcal{R}$, que se suele denotar como

$$\int_{\mathcal{R}} f, \qquad \int_{\mathcal{R}} f(x)dx, \qquad \text{e inclusive } \int\cdots\int_{\mathcal{R}} f(x_1,\ldots x_N)dx_1\cdots dx_N,$$

donde, en la última notación el símbolo de integral se repite N veces.

• Si existe una sucesión de reticulados $\{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{S}_n}(f) - I_{\mathcal{S}_n}(f) = 0$$

entonces f es integrable. Además,

$$\lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{S}_n}(f) = \lim_{n\to\infty} I_{\mathcal{S}_n}(f) = \int_R f(x)dx.$$

• Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $\mathcal{R}$ es un rectángulo. Entonces f es integrable.

• Supongamos que f y g son integrables sobre una región $\mathcal{D}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

1. La función $\alpha f + g$ también es integrable y

$$\int_{\mathcal{D}} (\alpha f + g) = \alpha \int_{\mathcal{D}} f + \int_{\mathcal{D}} g.$$

2. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}$ entonces
$$\int_{\mathcal{D}} f \leq \int_{\mathcal{D}} g.$$
3. La función $|f(x)|$ es integrable sobre $\mathcal{D}$ y
$$\left| \int_{\mathcal{D}} f \right| \leq \int_{\mathcal{D}} |f|.$$
4. Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$, y f es integrable en $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, entonces
$$\int_{\mathcal{D}} f = \int_{\mathcal{D}_1} f + \int_{\mathcal{D}_2} f.$$

2. EJERCICIOS PROPUESTOS

P1.- Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como:
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
Mostrar que f es integrable y $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f = \frac{1}{2}$.

P2.- Sea $f : A \to \mathbb{R}$ integrable y sea $g = f$ excepto por finitos puntos. Muestre que g es integrable y $\int\limits_A f = \int\limits_A g$.

P3.- Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea P una partición por subrectángulos de A. Muestre que f es integrable ssi cada subrectángulo S, la función $f|_s$ (restricción de f al conjunto S), es integrable, y en tal caso
$$\int\limits_A f = \sum_S \int\limits_S f|_S.$$

P4.- Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como:
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \text{ irracional}, \\ 0 & x \text{ racional}, y \text{ irracional}, \\ 1/q & x, y \text{ racionales}, y = p/q \text{ con } p, q \text{ primos relativos}. \end{cases}$$
Muestre que f es integrable y $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

P5.- Indique, justificando muy brevemente, cuál de las siguientes funciones $F : Q \to \mathbb{R},\ Q = [-1,1] \times [-1,1]$ son integrables:

a) $F(x,y) = |x| + |y|$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $F(0,0) = 1$.
<u>Hint</u>: Puede usar el **P3.-**.

b) $F(x,y) = \frac{1}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $F(0,0) = 1$.

P6.- Sea $R = [0,1] \times [0,1]$. Encuentre una sucesión de reticulados S_n de R tal que

$$S_{S_n}(f) - I_{S_n}(f) \to 0, \text{ cuando } n \to 0,$$

donde $f(x,y) = e^{x+2y}$. Concluya que f es integrable sobre R y calcule el valor de

$$\int\!\!\int_R e^{x+2y} dxdy.$$

<u>Hint</u>: Recuerde que si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{1-q^n}{1-q}$$

P7.- Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, funciones acotadas e integrables en $A \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo.
Demuestre utilizando las propiedades básicas de integrabilidad que:

$$\frac{1}{2} \int_{[a,b]\times[a,b]} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 = \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2$$

P8.- a) Sea Q un rectángulo de $\mathbb{R}^N$ y $f : Q \to \mathbb{R}$ tal que f es continua sobre $int(Q)$ y acotada sobre Q.
Pruebe que f es integrable.
<u>Hint</u>: Utilice una sucesión de rectángulos Q_n que aproximen a Q y use la integrabilidad de f sobre cada Q_n.

b) Pruebe que la función $f : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es integrable.

P9.- a) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones integrables, entonces

i) $f \cdot g$ es integrable.

ii) Si $f(x) \geq \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $1/f$ es integrable.
Sólo demuestre esta última propiedad.

b) Escriba

$$\int\limits_R (f + \lambda g)^2 \geq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

y concluya que

$$\int\limits_R fg \leq \left(\int\limits_R f^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_R g^2 \right)^{1/2}$$

c) Use la parte b) para demostrar que si $vol(R) = 1$, entonces

$$\int\limits_R f \geq \frac{1}{\int\limits_R \frac{1}{f}}$$

con un contraejemplo muestre que la igualdad no siempre se tiene.

P10.- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y B_ϵ la bola de centro $\bar{x}$ y radio ϵ. Si $V(B_\epsilon)$ es el volumen de B_ϵ, pruebe que:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{V(B_\epsilon)} \int_{B_\epsilon} f(x)\, dV = f(\bar{x})$$

<u>Hint</u>: Recuerde que una función continua restringida a un compacto es uniformemente continua.

P11.- En este ejercicio se propone una forma de calcular el área de un circulo. Considere una sucesión de poligonos regulares (de n lados) que aproxime, por el interior, la forma de un círculo de radio R (ver figura 1):

a) Calcule las áreas de cada polígono, en función de la base (b_n) y altura (h_n) de los triángulos que lo conforman.

b) Pruebe que la sucesión de áreas converge y calcule su valor, notando que $n\, b_n \to 2\pi\, R$ y $h_n \to R$ cuando $n \to \infty$.

c) Repita los pasos anteriores, utilizando una aproximación exterior de polígonos regulares

P12.- Calcule el área del paralelógramo V generado por

$$v_1 = (3, 1), \quad v_2 = (-1, 1)$$

es decir, cálcule el área del conjunto $V = \{t\, v_1 + s\, v_2 |\, t, s \in [0, 1]\}$

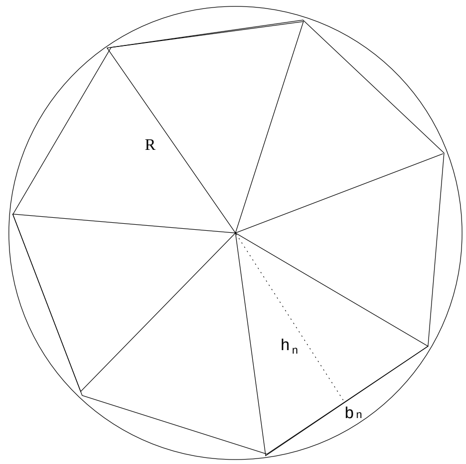

Figura 1: Aproximación interior por un polígono regular y los triángulos que lo conforman

3. PROBLEMAS RESUELTOS

P13.- Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ continuas. Mostrar que:

$$\int\int_R [f(x)\,g(y)]dx\,dy = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_c^d g(y)\,dy\right]$$

donde $R = [a,b] \times [c,d]$.

Solución:

Consideremos la partición de $[a,b]$:

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \text{ tal que } x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

Luego la suma de Riemann de F será:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(C_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

Como y está definida en el mismo intervalo que x, usaremos la misma partición para y, esto es:

$$y_{j+1} - y_j = \frac{b-a}{n}$$

Luego:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(C_{ij})\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

Ahora bien, $C_{ij} \in [a,b] \times [a,b] \Rightarrow C_{ij} = (x_i, y_i)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_n &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(x_i,y_i)\left(\tfrac{b-a}{n}\right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i)g(y_i)\left(\tfrac{b-a}{n}\right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i)\left(\tfrac{b-a}{n}\right)g(y_i)\left(\tfrac{b-a}{n}\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\tfrac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(y_j)\tfrac{b-a}{n}\right)
\end{aligned}$$

Luego, como tanto g y f son integrables en $[a,b]$.
$S_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{b-a}{n}$ y $S_2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} g(y_j)\frac{b-a}{n}$
convergen y sus límites no dependen de los x_i e y_j elegidos. Por lo tanto se tendrá:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(y_j)\frac{b-a}{n}\right) = S_1 \cdot S_2 \Rightarrow$$

existe, y no depende de los $C_{ij} = (x_i, y_j)$. Así (escogiendo los (x_i, y_j) que realizan el máximo y mínimo en cada rectángulo), hemos encontrado una sucesión de reticulados S_n para los cuales:

$$\lim_{n\to\infty} S_{S_n}(f) - I_{S_n}(f) = 0$$

Luego F es integrable.

P14.- Usando Sumas de Riemann demuestre que las siguientes funciones son integrables y calcule su valor:

a) $f(x,y) = x + 4y, \quad \Omega = \{(x,y)/0 \le x \le 2; 0 \le y \le 1\}$
b) $f(x,y) = 3x^2 + 2y, \quad \Omega = \{(x,y)/0 \le x \le 2; 0 \le y \le 1\}$

Solución:

a) Construyamos una partición de $0 \le x \le 2$, con $2k$ puntos. Sea $x_j = \frac{j}{k}, j = 0, \ldots, 2k$.
Análogamente para $0 \le y \le 1$ tenemos $y_j = \frac{j}{k}, j = 0, \ldots, k$.
Ahora debemos resolver:
$\min\limits_{x\in R_{ij}} f(x) = \frac{i}{k} + \frac{4j}{k}$, y además $\max\limits_{x\in R_{ij}} f(x) = \frac{i+1}{k} + \frac{4(j+1)}{k}$
Volumen de $R_{ij} = V(R_{ij}) = \frac{1}{k}\frac{1}{k} = \frac{1}{k^2}$

Veamos ahora las Sumas de Riemann.

$$S_I = \text{ suma inferior}$$

$$\begin{aligned}
S_I &= \sum_{i=0}^{2k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{i}{k}+\frac{4j}{k}\right)\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^3}\sum_{i=1}^{2k}\sum_{j=1}^{k}(i+4j)\\
&= \frac{1}{k^3}\sum_{i=1}^{2k}\left(ki+\frac{4k(k+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{k^3}\sum_{i=0}^{2k}(ki+2(k^2+k))\\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{2k} i+\frac{2}{k^2}\sum_{i=1}^{2k}(k+1)\\
&= \frac{2k(2k+1)}{k^2 2}+\frac{2}{k^2}2k(k+1)\\
&= \frac{2k+1}{k}+\frac{4(k+1)}{k}
\end{aligned}$$

Luego cuando $k \to \infty$

$S_I = 2+4=6$.

Veamos la suma superior.

$$\begin{aligned}
S_S &= \sum_{i=0}^{2k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{i+1}{k}+4\frac{j+1}{k}\right)\frac{1}{k^2}\\
&= \frac{1}{k^3}\sum_{i=0}^{2k}\sum_{j=0}^{k}((i+1)+(4j+4)) \text{ Desarrollando tenemos:}\\
&= \frac{1}{k^3}\sum_{i=0}^{2k}\left(ik+k+4\frac{k(k+1)}{2}+4k\right)\\
&= \frac{1}{k^3}\left(\frac{2k(2k+1)}{2}+5\cdot 2k+2k\cdot 2(k+1)\right)\\
&= \frac{1}{k}(2k+1+10+4(k+1))
\end{aligned}$$

Cuando $k \to \infty$, entonces: $S_s = 6$

Luego: $S_I \leq S_S$ entonces f es Riemann integrable.

b) Utilizando la misma partición. $\min\limits_{R_{ij}} f = 3\left(\frac{i}{k}\right)^2+\frac{2j}{k}$

$\max\limits_{R_{ij}} f = 3\left(\frac{i+1}{k}\right)^2+2\frac{j+1}{k}$

$$\begin{aligned}
S_I &= \sum_{i,j}^{2k,k}\left(\frac{3i^2}{k^2}+\frac{2j}{k}\right)\frac{1}{k^2}\\
&= \frac{1}{k^3}\sum_{i=1}^{2k}\left(3i^2+\frac{2k(k+1)}{2}\right)\\
&= \frac{3}{k^3}\sum_{i=1}^{2k} i^2+\frac{1}{k^3}\frac{2k2k(k+1)}{2}\\
&= \frac{3}{k^3}\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}+\frac{2(k+1)}{k}\\
&= \frac{k(2k+1)(4k+1)}{k^3}+\frac{2(k+1)}{k}
\end{aligned}$$

Luego cuando $k \to \infty$ tenemos:

$$S_I = 8+2=10$$

Para obtener el valor de la Suma Superior se realiza un cálculo análogo el cual se deja propuesto. Así:

$$S_S = 10$$

Con lo cual se concluye que la función es Riemann Integrable.