Capítulo 1

Movimiento y Coordenadas

1.1. Posición y movimiento

Los primeros movimientos que fueron descritos por medio de ecuaciones en el marco de lo que entendemos por física posiblemente fueron los que se refieren al movimientos de cuerpos en el cielo: el movimiento del Sol y la luna, el movimiento de las estrellas y—en un momento culminante—el movimiento de los planetas que nos dieron Copérnico, Galileo, Kepler y Newton en tres etapas de la historia.

Todas estas primeras descripciones cuantitativas de movimiento se hicieron como si los cuerpos fuesen simples puntos en movimiento ya que, en efecto, de este modo lo esencial queda descrito por el movimiento del centro del cuerpo. Normalmente, el movimiento descrito abarca una trayectoria muchísimas veces más grande que el tamaño del cuerpo en cuestión.
Por ejemplo, el diámetro de la Tierra es cien mil veces más chico que el diámetro de su órbita alrededor del Sol.

> Tolomeo (siglo II) describe con mucho ingenio el movimiento de los planetas colocando a la Tierra al centro. Copérnico (contemporáneo de Colón) expone en 1512 que el Sol está al centro y los planetas tienen órbitas perfectamente circunferenciales alrededor del Sol. Casi un siglo después Kepler descubre que las órbitas de los planetas son realmente elípticas. Su “Nueva Astronomía” es publicada en 1607. Cuando en 1632 Galileo publicó su libro “Diálogos sobre los dos sistemas del mundo” (el de Tolomeo y el de Copérnico), fue acusado y enjuiciado por la Inquisición.

Otro de los muchos aportes de Galileo fue describir que el movimiento de cuerpos en caída libre y el movimiento de proyectiles en lanzamiento balístico depende de la llamada *aceleración de gravedad*, g. Al nivel del mar $g = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Aceptemos, entonces, que la atención en una buena parte del estudio de MECÁNICA estará dirigida a describir *puntos* en movimiento.

> $\gg$ El pasajero de un vehículo, señor D, le comenta a su vecino T que aquel pequeño insecto sobre el otro asiento está totalmente quieto. Lo cual quiere decir que el insecto está quieto con respecto al vehículo, pero este último va a 50 Km/hr con respecto a la carretera.

Para describir el movimiento de un punto es necesario establecer una referencia respecto a la cual se define velocidades y qué está inmóvil. Para describir movimiento en tres dimensiones y—a veces en un plano, es decir, en dos dimensiones—la posición del punto en estudio es descrito por un vector $\vec{r}(t)$. El *vector posición* $\vec{r}(t)$ siempre se define en relación a una referencia particular y más aun, debe estar definido un punto $\mathscr{O}$ que es el *origen de coordenadas*.

> $\gg$ Poco rato después el señor D observa que el insecto está caminando por la pared plana del interior del vehículo. Rápidamente D escoge un punto $\mathscr{O}$ sobre la pared y dos vectores unitarios perpendiculares entre sí: $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ y logra determinar que el movimiento del insecto queda bien descrito por
>
> $$\vec{r}(t) = R_0\left(\hat{\imath}\cos(2\pi t/t_0) + \hat{\jmath}\sin(2\pi t/t_0)\right)$$
>
> donde $R_0 = 10$[cm] y $t_0 = 2$[minutos]. ¿qué tipo de movimiento es éste? Primero calcule la magnitud de este vector, $\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$ y compruebe que resulta R_0, es decir, la magnitud del vector posición no cambia con el tiempo. En el instante $t = 0$ se cumple $\vec{r}(0) = R_0\,\hat{\imath}$ mientras que en el instante $t_1 = \frac{t_0}{4}$ es $\vec{r}(t_1) = R_0\,\hat{\jmath}$. Dibuje la *trayectoria* del insecto y sobre esa trayectoria marque parte del itinerario, según las definiciones que se dan a continuación.

El vector posición $\vec{r}(t)$ define, en su evolución, un conjunto de puntos que se denomina *trayectoria*. El *itinerario* agrega a la trayectoria la información del valor de t en el cual el punto en movimiento pasa por las diversas posiciones de la trayectoria.

> $\gg$ Una trayectoria puede ser definida como una relación entre las coordenadas. Por ejemplo, un objeto en un plano, con coordenadas cartesianas (x,y) puede tener una trayectoria dada por
>
> $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Otro ejemplo

$$z = \frac{4z_m}{x_m^2}(x_m - x)\,x$$

que representa un movimiento parabólico en el plano vertical XZ tal que cuando $x = 0$ y también cuando $x = x_m$ resulta $z = 0$ mientras que cuando $x = x_m/2$ la coordenada z alcanza un valor máximo $z = z_m$.

La velocidad es la variación de la posición en el tiempo, y la aceleración es la variación de la velocidad en el tiempo

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.1.1}$$

$\gg$ Al definir al vector velocidad como la derivada del vector posición se está definiendo a la velocidad como el límite:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\varepsilon=0} \frac{\vec{r}(t+\varepsilon) - \vec{r}(t)}{\varepsilon}$$

Para terminar de aclarar este punto compruebe, mediante un dibujo, que el vector velocidad asociado a un movimiento circunferencial es necesariamente un vector tangencial a la circunferencia.

Las expresiones anteriores pueden ser invertidas. Por ejemplo, la definición de velocidad recién dada puede ser integrada—utilizando como variable de integración a una variable auxiliar t', desde un tiempo escogido t_0 hasta un tiempo arbitrario t,

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt' \tag{1.1.2}$$

que es más conveniente escribir como

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt' \tag{1.1.3}$$

Si en la expresión anterior se escoge $t = t_0$ el término integral es nulo—porque el dominio de integración es nulo—y resulta una identidad.

En forma similar se puede invertir la definición de aceleración obteniéndose

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \vec{a}(t')\,dt' \tag{1.1.4}$$

Unidades: En este texto se utilizará el sistema MKS de unidades. La longitud se expresa en metros, el tiempo en segundos y la masa en kilogramos.

caminata normal	1
máxima velocidad en ciudad	18
$v_{\max}$ en caída libre	50
avión comercial	275
velocidad del sonido en Valparaíso	340

Valor aproximado de algunas velocidades comunes expresadas en metros por segundo.

EJEMPLO: Problema de lanzamiento de un objeto desde una posición inicial $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ con una velocidad $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ sabiendo que la aceleración tiene un valor fijo: $\vec{a}(t) = \vec{g}$. Primero se usa (1.1.4) y se obtiene

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\int_{t_0}^{t} dt' = \vec{v}_0 + (t - t_0)\,\vec{g} \tag{1.1.5}$$

Luego se usa esta última expresión en (1.1.3) y puede comprobarse que arroja

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (t - t_0)\,\vec{v}_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2}\,\vec{g} \qquad \blacktriangleleft \tag{1.1.6}$$

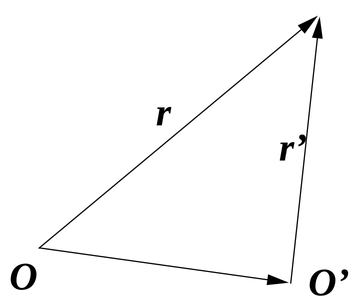


Figura 1.1: *Vectores posición a partir de dos orígenes distintos.*

Si el movimiento de un punto P es descrito desde dos orígenes $\mathscr{O}$ y $\mathscr{O}'$ fijos, los vectores posición $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ se relacionan por

$$\vec{r}\,(t) = \vec{\mathscr{O}\mathscr{O}'} + \vec{r}\,'\,(t)$$

Puesto que $\vec{\mathscr{O}\mathscr{O}'}$ no depende del tiempo, la velocidad y la aceleración respecto a ambos orígenes son iguales.

♣ *¿A qué velocidad le crece el pelo? ¿Cuál es el récord en carreras de 100 metros? ¿A qué velocidad remacha un buen tenista?*

♣ *Si un automóvil va a 18 metros por segundo y frena con una aceleración negativa de magnitud* $2g$*, ¿en qué distancia se detiene? ¿Cuánto vale su "peso"* *en ese momento? Esta pregunta se refiere a la fuerza asociada a la aceleración total.*

♣ *Suponga que un vehículo que iba a 18 metros por segundo en el momento de chocar contra un obstáculo duro, es detenido en una décima de segundo, a través de un proceso con aceleración uniforme. ¿Cuál es el valor de la aceleración durante este proceso?*

♣ *Calcule la velocidad con que llega al suelo un cuerpo que es soltado en reposo desde una altura h. ¿Aproximadamente desde qué altura se atrevería usted a saltar al suelo? ¿A qué velocidad golpean sus pies el suelo? Desde el momento t_0 en que sus pies tocan el suelo hasta que su tronco se detiene, t_1, los músculos de las piernas actúan como freno. Para simplificar, suponga que esa "frenada" es una aceleración negativa constante a_0 en el lapso (t_0,t_1). Dé algún valor realista al cambio de altura del su tronco en ese lapso y deduzca un valor numérico para a_0. Compare ese valor con la aceleración de gravedad.*

♠ *Si se sabe que la velocidad de un punto como función del tiempo es*

$$\vec{v}(t) = \omega R_0 \left[-\hat{\imath}\sin\omega t + \hat{\jmath}\cos\omega t\right] + \hat{k}\,v_3$$

y que la posición en $t=0$ es $\vec{r}(0) = \hat{\imath}R_0$, determine la posición del punto en todo instante $t>0$ y también la aceleración $\vec{a}(t)$. Haga un dibujo 3D del movimiento del punto y dibuje la dirección en que apunta $\vec{a}(t)$ en distintas partes de esa trayectoria.

1.2. Coordenadas y movimiento

El movimiento se puede describir con diversos tipos de coordenadas. En lo que sigue se define tres sistemas de coordenadas que se usará en Mecánica: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Para cada uno de estos sistemas de coordenadas tridimensionales se define tres coordenadas escalares que son (x,y,z) en cartesianas, (ρ,ϕ,z) en cilíndricas y (r,θ,ϕ) en esféricas y además se define vectores unitarios asociados a esas coordenadas espaciales: $(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$, $(\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{k})$ y $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi})$. Estos vectores unitarios apuntan en una dirección que, en general, depende del punto que se está describiendo. Sólo en coordenadas cartesianas esto no ocurre así.

1.2.1. Coordenadas cartesianas

Ellas se basan en los ejes mutuamente perpendiculares X, Y y Z. Estos ejes tienen asociados los vectores unitarios $(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$. Los ejes y los vectores unitarios asociados se suponen fijos al sistema de referencia en el cual se describe el movimiento. Los vectores de posición, velocidad y aceleración son

$$
\begin{aligned}
\vec{r}\,(t) &= x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\imath} + z(t)\,\hat{k} \\
\vec{v}\,(t) &= \dot{x}(t)\,\hat{\imath} + \dot{y}(t)\,\hat{\imath} + \dot{z}(t)\,\hat{k} \\
\vec{a}\,(t) &= \ddot{x}(t)\,\hat{\imath} + \ddot{y}(t)\,\hat{\imath} + \ddot{z}(t)\,\hat{k}
\end{aligned}
\tag{1.2.1}
$$

coordenadas	vectores
x, y, z	$\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$

Las coordenadas $(x(t),y(t),z(t))$ de un punto móvil dependen del tiempo pero los vectores unitarios son constantes.

1.2.2. Coordenadas cilíndricas

Dado un punto P con coordenadas cartesianas (x,y,z) se dibuja un cilindro cuyo eje coincide con el eje Z y con radio $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, de tal modo que P está en el manto del cilindro cuyo radio es ρ. La proyección al plano XY del vector posición $\vec{r}$ del punto P tiene longitud ρ y forma un ángulo ϕ con el eje X. Las coordenadas cilíndricas de P son las cantidades (ρ,ϕ,z). La relación con las coordenadas cartesianas es

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\,\cos\phi \\
y &= \rho\,\sin\phi \\
z &= z
\end{aligned}
\tag{1.2.2}
$$

A este sistema de coordenadas se asocia vectores unitarios $(\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{k})$ los que se relacionan a $(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$ por

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \hat{\imath}\,\cos\phi + \hat{\jmath}\,\sin\phi \\
\hat{\phi} &= -\hat{\imath}\,\sin\phi + \hat{\jmath}\,\cos\phi \\
\hat{k} &= \hat{k}
\end{aligned}
\tag{1.2.3}
$$

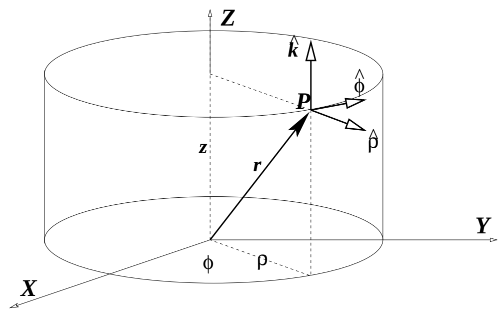


Figura 1.2: *Las coordenadas cilíndricas de un punto P son: ρ, la distancia de P al eje Z, ϕ que es ángulo que forma el plano que pasa por el eje Z y por OP con el plano XZ y la coordenada z que es igual que en el caso cartesiano.*

Estos vectores unitarios apuntan, en cada punto P escogido, en la dirección en que una sola de las coordenadas cilíndricas varía.

Por ejemplo, si se considera un punto Q infinitesimalmente cercano a P que comparte con P el mismo valor de ρ y de z, y solo difieren por la coordenada ϕ, ($\phi_Q = \phi_P + d\phi$) entonces el vector $\hat{\phi}$ apunta en la dirección de P a Q.

coordenadas	vectores
ρ, ϕ, z	$\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, $\hat{k}$

A diferencia del sistema cartesiano de coordenadas, acá la dirección de los vectores unitarios básicos depende del punto P que se esté considerando.

Al describir un movimiento los vectores base $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ en general cambian de orientación. Las derivadas temporales de ellos es proporcional a $\dot{\phi}$,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}} &= \dot{\phi}\,\hat{\phi} \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi}\,\hat{\rho} \end{aligned}$$

En el caso de un punto móvil las coordenadas dependen en general del tiempo: $(\rho(t), \phi(t), z(t))$ y de los tres vectores unitarios dos son variables y ellos dependen del ángulo ϕ que es una coordenada que en general depende del tiempo, es decir: $(\hat{\rho}(\phi(t)), \hat{\phi}(\phi(t)), \hat{k})$.

A esto se debe que al derivar con respecto al tiempo, las coordenadas se derivan directamente con respecto al tiempo, mientras que los vectores

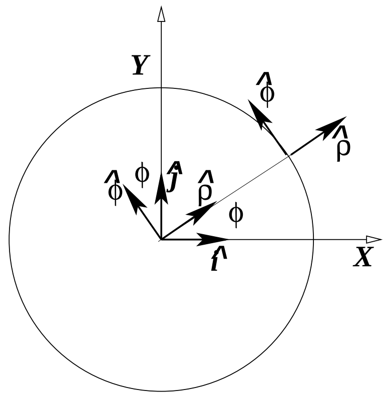


Figura 1.3: *Aquí el eje Z es perpendicular al papel, y se puede apreciar la relación entre las coordenadas* (ρ,ϕ) *y los vectores unitarios* $\hat{\rho}$ *y* $\hat{\phi}$.

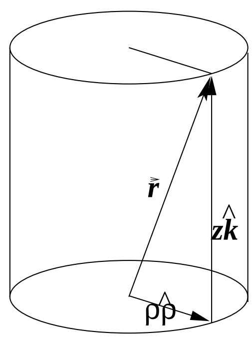


Figura 1.4: *El vector posición* $\vec{r}$ *puede ser expresado como combinación lineal de* $\hat{\rho}$ *y* $\hat{k}$.

unitarios se derivan utilizando la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} \qquad \text{pero} \qquad \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d\hat{\rho}}{d\phi}$$

Con todo lo anterior los vectores de posición, velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas son

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho\,\hat{\rho} + z\hat{k} \\ \vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\ \vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Nótese que el último paréntesis se puede escribir

$$2\dot{\rho}\dot{\phi}+\rho\ddot{\phi}=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\phi}\right) \tag{1.2.5}$$

Todas las cantidades, excepto $\hat{k}$, dependen en general del tiempo, sin embargo para que la notación no aparezca tan pesada se ha omitido colocar "(t)" en cada factor.

Ahora se puede volver a mirar el significado de la frase que dice que los "*vectores unitarios apuntan, en cada punto P escogido, en la dirección en que una sola de las coordenadas cilíndricas varía.* ". En efecto, si se diferencia $\vec{r}$ dado en (1.2.4) se obtiene $d\vec{r}=d\rho\,\hat{\rho}+\rho\frac{d\hat{\rho}}{d\phi}d\phi+dz\hat{k}$, pero $\frac{d\hat{\rho}}{d\phi}=\hat{\phi}$ por lo que se obtiene

$$d\vec{r}=d\rho\,\hat{\rho}+\rho\,d\phi\,\hat{\phi}+dz\hat{k}$$

Cada uno de los tres sumandos anteriores contiene la diferencial de una de las tres coordenadas cilíndricas. Si se varía una sola coordenada, esa es la única diferencial no nula, y $d\vec{r}$ apunta, como se ha dicho, en la dirección del correspondiente vector unitario.

♣ *Estudie el movimiento de un punto P para el cual las coordenadas cilíndricas en todo momento son: $\rho=\rho_0$, $\phi(t)=\frac{1}{2}\alpha_0 t^2$, $z(t)=A\,\phi(t)$. Obtenga el vector velocidad y aceleración y describa la geometría de la trayectoria en detalle.*

1.2.3. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas de un punto P son: la distancia r de P al origen, el ángulo θ que forma $\vec{r}$ con el eje Z y el ángulo ϕ que ya fue definido para coordenadas cilíndricas: (r,θ,ϕ). Se relacionan a las coordenadas cartesianas por

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\,\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\,\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

A estas coordenadas se asocia vectores unitarios y ellos son

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \left(\hat{\imath}\cos\phi+\hat{j}\sin\phi\right)\sin\theta+\hat{k}\cos\theta \\ \hat{\theta} &= \left(\hat{\imath}\cos\phi+\hat{j}\sin\phi\right)\cos\theta-\hat{k}\sin\theta \\ \hat{\phi} &= -\hat{\imath}\sin\phi+\hat{j}\cos\phi \end{aligned}$$

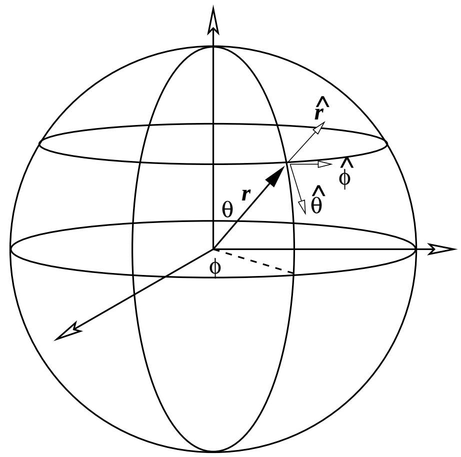


Figura 1.5: *La figura representa las coordenadas esféricas y los vectores unitarios asociados.*

Se destaca que

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta & (1.2.7) \\ \hat{\rho} = \hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi &= \hat{\theta}\cos\theta + \hat{r}\sin\theta & (1.2.8) \end{aligned}$$

coordenadas	vectores
$r,\ \theta,\ \phi$	$\hat{r},\ \hat{\theta},\ \hat{\phi}$

Tal como en el caso anterior, los vectores unitarios básicos dependen del punto que se esté considerando y por tanto ellos, en general, varían con el tiempo. Sus derivadas son

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}\,\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \dot{\phi}\hat{\phi}\cos\theta - \dot{\theta}\,\hat{r} \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi}\left(\hat{\theta}\cos\theta + \hat{r}\sin\theta\right) \end{aligned} \qquad (1.2.9)$$

Con lo anterior se puede obtener expresiones para la posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\hat{r} \\ \vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)^{\cdot}}{r\sin\theta}\,\hat{\phi} \end{aligned} \qquad (1.2.10)$$

♣ *Compruebe que*

$$d\vec{r} = \hat{r}\,dr + \hat{\theta}\,r\,d\theta + \hat{\phi}\,r\sin\theta\,d\phi$$

♠ *Considere un cono con vértice en el origen y eje que coincide con el eje Z y cuyo ángulo de apertura es θ (es decir, las rectas sobre el manto forman ángulo θ con el eje Z). Describa en coordenadas esféricas el movimientos de un punto que baja por el manto de este cono si se sabe que pierde altura a velocidad constante (es decir, la coordenada $z(t)$ satisface $\dot{z} = -v_3$) y que además $\dot{\phi} = \omega_0$. Tome como condición inicial que el punto está sobre el manto con $r(0) = R_0$ y $\phi(0) = 0$.*

1.3. Velocidad angular

La velocidad angular expresa la tasa de cambio de orientación que sufre el vector posición $\vec{r}$ cuando se desarrolla el movimiento. El concepto de velocidad angular, $\vec{\omega}$, está ligado al origen de coordenadas que se escoja y representa tanto la tasa de variación de orientación como también la orientación del eje en torno al cual $\vec{r}$ rota. Ella se puede expresar como el producto cruz entre los vectores posición y velocidad, dividido por el cuadrado de la magnitud de $\vec{r}$,

$$\vec{\omega}(t) = \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{\|\vec{r}\|^2} \tag{1.3.1}$$

Se ilustra lo anterior con un ejemplo.

EJEMPLO: Un movimiento uniforme y rectilíneo paralelo al eje X y a distancia b de él es descrito por

$$\vec{r} = b\,\hat{j} + (x_0 - v_0\,t)\,\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -v_0\,\hat{\imath} \tag{1.3.2}$$

se muestra en la figura adjunta,

$$x = x_0 - v_0\,t\,, \quad y = b\,, \quad \phi = \arctan\frac{b}{x_0 - v_0\,t} \tag{1.3.3}$$

De los datos dados en (1.3.2) y de la definición de $\vec{\omega}$ se obtiene que

$$\vec{\omega} = \frac{b\,v_0\,\hat{k}}{b^2 + (x_0 - v_0 t)^2} \tag{1.3.4}$$

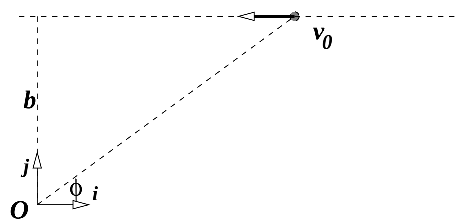


Figura 1.6: *Un movimiento rectilíneo y uniforme. Se conocen b y v_0.*

Por otro lado, se puede calcular $\dot{\phi}$ directamente de observar que

$$\tan\phi = \frac{b}{x_0 - v_0 t}$$

Derivando esta relación con respecto al tiempo se obtiene que $\omega \equiv \dot{\phi}$ vale

$$\omega = \frac{b\,v_0}{b^2 + (x_0 - v_0 t)^2} \tag{1.3.5}$$

que es coherente con la expresión para la forma vectorial de la velocidad angular.

Nótese que si se hubiera escogido el origen sobre la recta, se tendría que $b = 0$ y se habría obtenido velocidad angular nula. ◀

La velocidad angular, entonces, depende del origen $\mathcal{O}$ respecto al cual se define. Estrictamente además, la velocidad angular *es un vector* cuya magnitud es $d\phi/dt$ y que apunta en la dirección del eje respecto al cual el punto en movimiento gira visto desde ese origen. Se usa la regla de la mano derecha. En el ejemplo anterior la velocidad angular apunta en la dirección $\hat{k}$, y la *velocidad angular vectorial* en ese ejemplo es $\vec{\omega} = \omega\,\hat{k}$.

Un corolario de lo anterior es que si se tiene una función vectorial cualquiera $\vec{A}(t)$ tridimensional, la variación de su orientación en el tiempo es

$$\vec{\omega}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2} \times \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Si se hace el producto cruz de cada miembro de esta igualdad con $\vec{A}$ se obtiene

$$\vec{\omega}_A \times \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}}{\|\vec{A}\|}\vec{A}$$

Pero si $\vec{A}$ es una función vectorial que cambia de orientación en el tiempo tal que su magnitud permanece constante, entonces $\vec{A}\cdot\vec{A} = \texttt{constante}$ lo que implica que $\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$. En tal caso la última ecuación se reduce a

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{A} \qquad \Leftarrow \qquad \vec{A}\cdot\vec{A} = \text{constante} \tag{1.3.6}$$

♠ *Considere una circunferencia de radio R en el plano XY centrada en un punto del eje X a distancia a del origen. Suponga un punto P que se mueve con rapidez uniforme v_0 sobre esa circunferencia y determine la velocidad angular de P con respecto al origen.*

1.4. Rapidez, aceleración centrípeta y tangencial

La trayectoria de un punto P tiene, en cada instante, un vector tangencial $\hat{t}$, un radio de curvatura ρ_C y un vector $\hat{n}$—el vector normal—que apunta desde la trayectoria hacia el centro de curvatura asociado. Estos conceptos permiten otra descipción del movimiento.

1.4.1. Velocidad y rapidez

Considere la trayectoria de un punto en movimiento y sean A y B las posiciones del punto sobre su trayectoria en instantes t y $t+\Delta t$. Si se denota por Δs al largo del arco de trayectoria desde A a B, se define la *rapidez* del punto móvil sobre su trayectoria como

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{1.4.1}$$

que es una cantidad escalar. A continuación se verá la relación que existe entre el concepto de velocidad $\vec{v}(t)$ y el de rapidez $v(t)$. Para definir estos conceptos se debe dar un sentido (arbitrario) a la forma de recorrer la curva. Por ejemplo, si en la figura se escoge el sentido positivo hacia la derecha, un desplazamiento hacia la derecha se describe con un $ds > 0$ y un desplazamiento hacia la izquierda tiene asociado un $ds < 0$.

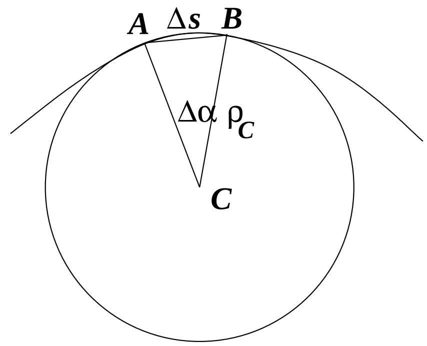
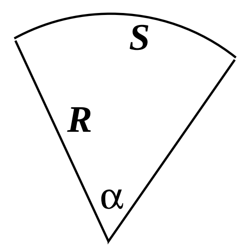


Figura 1.7: *Cada punto A de una trayectoria (curva diferenciable) tiene asociado un centro de curvatura C y un radio de curvatura ρ_C. El arco de trayectoria Δs que describe un punto móvil en un pequeño intervalo Δt es $\Delta s = \rho_C \Delta\alpha$ donde $\Delta\alpha$ es el ángulo que subtiende tal arco desde C. La cuerda asociada tiene una longitud que coincide con la magnitud del vector $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$. El ángulo entre la tangente en A a la trayectoria y $\Delta\vec{r}$ es $\frac{1}{2}\Delta\alpha$. En el límite $\Delta t \to 0$ la tangente al arco en A apunta en la misma dirección que la cuerda.*



Se define *radianes* de modo que el largo S de un arco de circunferencia, de radio R, que tiene asociado un ángulo α es

$$S = R\,\alpha \tag{1.4.2}$$

Un pequeño arco AB de una curva se puede aproximar a un arco de circunferencia centrada en un punto C con algún radio ρ_C, tal que el arco subtiende un pequeño ángulo $\Delta\alpha$. La longitud Δs de un arco se relaciona al elemento de ángulo por

$$\Delta s = \rho_C\,\Delta\alpha \tag{1.4.3}$$

Nótese que el signo de $\Delta\alpha$ es, por definicón, igual al signo de Δs. La longitud de la cuerda asociada es $\overline{AB} = 2\rho_C \sin\frac{\Delta\alpha}{2}$. Puesto que en el límite de ángulo muy pequeño, el seno de un ángulo se aproxima por el ángulo mismo, entonces en ese límite la longitud de la cuerda es $\rho_C\,\Delta\alpha$ y coincide con la longitud del arco. Este resultado sirve, en el párrafo que sigue, para relacionar la magnitud de la velocidad con la rapidez.

Los vectores posición $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t+\Delta t)$ del movimiento de un punto difieren en

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\\ &\approx \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}\,\Delta t\\ &\approx \vec{v}(t)\,\Delta t\end{aligned}$$

Tomando el límite $\Delta t \to 0$ se obtiene que $d\vec{r}(t) = \vec{v}(t)\,dt$. Pero en el párrafo anterior se vio que la cuerda, que en este caso tiene longitud $\|\Delta\vec{r}(t)\|$, coincide en el límite en que Δt es infinitesimal, con el arco Δs:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\|\Delta\vec{r}(t)\|}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{|\Delta s(t)|}{\Delta t} \\ &= |v(t)| \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

es decir,

$$\|\vec{v}\| = |v| \tag{1.4.5}$$

De (1.4.3) también se sabe que el radio de curvatura de una trayectoria está dado por

$$\rho_C = \frac{ds}{d\alpha} \tag{1.4.6}$$

Sea $\hat{t}$ el vector unitario, tangente a la trayectoria de un punto, que apunta en la misma dirección que $d\vec{r}$, es decir, en la misma dirección que $\vec{v}$, pero no apuntan necesariamente en el mismo sentido. Se escoge como definición que el vector unitario $\hat{t}$ apunte en el sentido en el cual crece el arco $s(t)$ recorrido, de tal modo que

$$\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{t} \tag{1.4.7}$$

En resumen, la velocidad es siempre tangencial a la trayectoria y la magnitud de la velocidad coincide con el valor absoluto de la rapidez.

♠ *En un parque de diversiones hay un juego que consiste en disparar a un blanco móvil que se desplaza a velocidad constante $\vec{v}_1$ a lo largo de una recta L. Se sabe que los proyectiles salen desde el sitio D de disparo con rapidez v_0. Si en el instante en que se hace el disparo el blanco está al pie de la perpendicular—de largo b—que va de D a L, ¿con qué ángulo se debe hacer el disparo para dar en el blanco?*

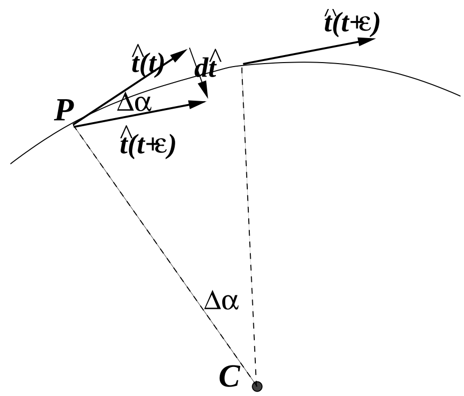


Figura 1.8: *El vector $d\hat{t} = \hat{t}(t+\varepsilon) - \hat{t}(t)$ donde ε es un tiempo muy pequeño, es un vector que, en el límite $\varepsilon \to 0$, apunta hacia el centro de curvatura. En la figura el vector $\hat{t}(t+\varepsilon)$ ha sido trasladado al punto correspondiente al tiempo t para poder hacer la diferencia geométricamente.*

1.4.2. Coordenadas intrínsecas

1.4.2.1. Los vectores $\hat{t}$ y $\hat{n}$.

Puesto que el vector $\hat{t}$ es unitario

$$\hat{t}\cdot\hat{t} = 1 \quad \text{implica} \quad \hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{dt} = 0 \tag{1.4.8}$$

es decir, el vector $d\hat{t}/dt$ es ortogonal a $\hat{t}$. La figura adjunta debiera ayudar a ver que este vector apunta hacia el centro de curvatura. Se denominará $\hat{n}$—vector normal—al vector *unitario* que apunta hacia el centro de curvatura. Ya se vio que la magnitud de cuerda y arco, en el caso en que estos sean muy pequeños, coincide y además se vio en (1.4.3) que ese arco es igual al radio multiplicado por el elemento de ángulo. Puesto que $\hat{t}$ es unitario, al rotar describe un arco de radio 1 y por tanto la cuerda asociada, que tiene la magnitud de $\hat{t}$, es 1 multiplicado por el elemento de ángulo, es decir, $\|d\hat{t}\| = d\alpha$. Usando (1.4.6) se obtiene que

$$d\hat{t} = d\alpha\,\hat{n} = \frac{ds}{\rho_C}\,\hat{n} \qquad \text{equivalentemente} \qquad \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho_C}\,\hat{n} \tag{1.4.9}$$

1.4.3. Aceleración centrípeta y tangencial

La aceleración es la derivada de la velocidad,

$$\begin{aligned}\vec{a}\,(t) &= \frac{d\vec{v}\,(t)}{dt} = \frac{d\,(v(t)\,\hat{t}\,)}{dt} \\ &= v(t)\,\frac{d\hat{t}}{dt} + \frac{dv(t)}{dt}\,\hat{t}\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

El último término en esta expresión es la parte de la aceleración que apunta tangencial a la trayectoria. Se la llama *aceleración tangencial*. El primer término a la derecha es

$$v(t)\,\frac{d\hat{t}}{dt} = v(t)\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\hat{t}}{ds} \tag{1.4.11}$$

pero $ds/dt = v(t)$ y $d\hat{t}/ds = \hat{n}/\rho_C$ por lo que la aceleración se puede escribir

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}\,(t) &= \frac{v^2(t)}{\rho_C}\,\hat{n} + \frac{dv(t)}{dt}\,\hat{t} \\ &= \vec{a}_n(t) + \vec{a}_t(t)\end{aligned}} \tag{1.4.12}$$

El primer término es un vector que apunta hacia el centro de curvatura y se lo conoce como *aceleración centrípeta*. El segundo es la *aceleración tangencial*.

♣ *Demuestre que el radio de curvatura es igual a*

$$\rho_C = \frac{v^2}{\|\hat{t}\times\vec{a}\|} = \frac{v^3}{\|\vec{v}\times\vec{a}\|} \tag{1.4.13}$$

EJEMPLO: Consideremos un punto en movimiento en un plano cuya trayectoria es descrita por una circunferencia:

$$\vec{r} = R_0\left(\hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi\right), \qquad \phi = \phi(t) \tag{1.4.14}$$

Diferenciando se obtiene

$$d\vec{r} = R_0\left(-\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi\right)\,d\phi \tag{1.4.15}$$

cuya magnitud es

$$\|d\vec{r}\| = R_0\, d\phi = ds \tag{1.4.16}$$

En este caso el vector tangencial es

$$\hat{t} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi \tag{1.4.17}$$

De aquí se puede calcular $d\hat{t}/ds$ porque de (1.4.6) ya se sabe que $d\phi/ds = 1/\rho_C$, y en el presente caso es $\rho_C = R_0$, y se obtiene

$$\hat{n} = -\hat{\imath}\cos\phi - \hat{\jmath}\sin\phi \tag{1.4.18}$$

Para poder calcular la velocidad y la aceleración es necesario dar la dependencia del vector posición en el tiempo. Supongamos el caso particular en que el ángulo varía linealmente con el tiempo, $\phi = \omega t$, es decir, hay una *velocidad angular* constante: $\dot{\phi} = \omega$. Entonces, tal como ya se sabe de (1.4.7), la velocidad es tangente a la trayectoria, y en este case es

$$\vec{v} = \omega R_0 \hat{t} \tag{1.4.19}$$

de donde la rapidez resulta constante: $v = \omega R_0$.

Se puede ver también que en este caso particular la aceleración tangencial es nula debido a que la rapidez es constante. La aceleración centrípeta es

$$\vec{a}_n(t) = \frac{\omega}{R_0}\left(-\hat{\imath}\cos\omega t - \hat{\jmath}\sin\omega t\right) \tag{1.4.20}$$

que apunta siempre hacia el centro. ◄

♣ *Si un automóvil toma una curva de 50 metros de radio (aproximadamente media cuadra) a 24 metros por segundo, ¿cuánto vale la aceleración centrípeta? ¿Es una fracción de g o es mayor que g?*

♣ *Si un avión va a dos veces la velocidad del sonido y gira describiendo un arco de circunferencia, ¿cuál es el valor mínimo que puede tener ese radio si la aceleración máxima que soporta el piloto es $6g$?*

♠ *Considere el movimiento de un punto que describe la trayectoria plana*

$$\vec{r} = \rho_0\left(\hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi\right) + \hat{\imath}\beta\,\phi \tag{1.4.21}$$

con $\phi = \omega t$. Tanto ρ_0 como β son constantes dadas. Determine $ds/d\phi$, y por tanto ds/dt; calcule el vector tangente unitario $\hat{t}(t)$ en función del tiempo; obtenga el

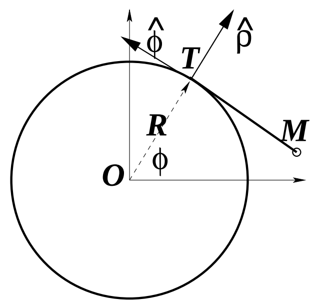


Figura 1.9: *Un hilo ideal es desenrollado de un cilindro de radio R*

vector velocidad en cualquier instante t y también calcule la aceleración $\vec{a}(t)$ e indique los valores de las partes centrípeta y tangencial.

♠ *Un hilo de grosor nulo está enrollado en una circunferencia de radio R manteniendo tensa la punta libre M. La parte no enrollada siempre es tangente a la circunferencia y el punto T de tangencia está totalmente determinado por el ángulo polar ϕ. El hilo está siendo desenrollado por medio de un mecanismo que hace que ϕ cambie en el tiempo en la forma: $\phi = \frac{\alpha}{2}t^2$, donde α es un número dado. Calcular la ecuación paramétrica de la trayectoria del extremo M libre del hilo sabiendo que inicialmente la parte libre era de largo L_0 y colgaba verticalmente. Obtenga las componentes de la velocidad y la aceleración expresada con los vectores unitarios $\hat{\phi}$ y $\hat{\rho}$. Obtenga los vectores tangente $\hat{t}$ y normal $\hat{n}$ de la trayectoria que describe M cuando ϕ crece. También obtenga, para cada punto de la trayectoria el radio de curvatura.*

Indicaciones: La posición de T siempre es $\vec{\rho}_T = R\hat{\rho}$ y la posición de M puede escribirse como $\vec{\rho}_M = \vec{\rho}_T - L(t)\hat{\phi}$, donde $L(t)$ es el largo variable de T a M. También hay que tomar en cuenta que si en un intervalo el punto T recorre una distancia s, en ese intervalo la longitud $L(t)$ crece en esa misma cantidad s.

♠ *Un disco de radio R rueda sin resbalar por un suelo horizontal (el eje de rotación de la rueda es horizontal). Su centro $\mathcal{O}$ tiene aceleración constante $\vec{a} = a_0\hat{\imath}$. Encuentre la magnitud de la velocidad angular con respecto a $\mathcal{O}$ y obtenga la aceleración de cualquier punto P sobre el borde del disco, relativa al suelo. Encuentre los vectores $\hat{t}$ y $\hat{n}$ de la trayectoria de P como función del ángulo ϕ que $\mathcal{O}P$ forma con la vertical. Obtenga la magnitud de la aceleración centrípeta y el radio de curvatura de la trayectoria de P.*

1.5. Movimientos particulares

A continuación se presentan algunos movimientos particulares $\vec{r}(t)$ que se pueden obtener a partir de datos específicos.

1.5.1. Movimiento uniforme

Un caso muy sencillo es el del movimiento uniforme. Este es aquel para el cual la velocidad es uniforme y por tanto la aceleración es nula, $\vec{a} = 0$. Si se dan como datos la posición $t = t_0$ y que para todo instante

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

se puede invertir la definición de velocidad y obtener que

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt' \\ &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \int_{t_0}^{t} dt' \\ &= \vec{r}_0 + (t - t_0)\,\vec{v}_0 \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

1.5.2. Movimiento con aceleración constante

Esta vez se da como dato que la aceleración es

$$\vec{a}(t) = \vec{g}$$

y además que la posición en un instante t_0 es $\vec{r}_0$ y que la velocidad en un instante t_1 es $\vec{v}_1$.

Integrando la definición de aceleración se obtiene que

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_1 + (t - t_1)\,\vec{g} \tag{1.5.2}$$

Una vez conocida la velocidad se calcula la posición en un instante arbitrario integrando una vez más

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt'$$

$$
\begin{aligned}
&= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\vec{v}_1 + \vec{g}\,(t' - t_1)\right)\, dt' \\
&= \vec{r}_0 + (t - t_0)\,\vec{v}_1 + \left(\frac{t^2 - t_0^2}{2} - (t - t_0)\,t_1\right)\vec{g} \qquad (1.5.3)
\end{aligned}
$$

Si tanto t_0 como t_1 son nulos y $\vec{v}_1$ es denotada $\vec{v}_0$, la expresión anterior se reduce sencillamente a

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + t\,\vec{v}_0 + \frac{t^2}{2}\,\vec{g} \qquad (1.5.4)$$

1.5.3. Movimiento circunferencial

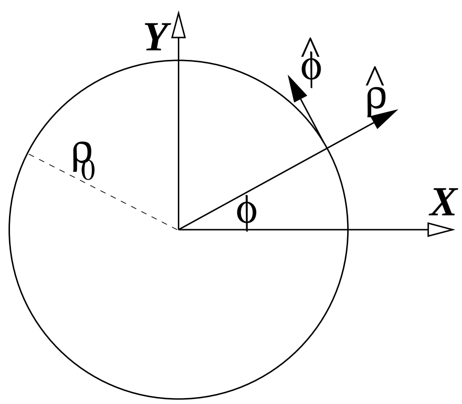


Figura 1.10: *Un movimiento circunferencial de radio ρ_0 se describe por la velocidad angular $\omega(t) \equiv \dot{\phi}(t)$.* *circunf*

El movimiento circunferencial general está caracterizado por el radio fijo ρ_0 de la circunferencia descrita por el punto móvil y por la velocidad angular $\omega(t) = \dot{\phi}$. En este caso los vectores posición, velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas son

$$
\begin{aligned}
\vec{r}\,(t) &= \rho_0\,\hat{\rho}\,(t) \\
\vec{v}\,(t) &= \rho_0\,\omega(t)\,\hat{\phi} \qquad (1.5.5) \\
\vec{a}\,(t) &= \rho_0\left[\alpha(t)\hat{\phi}\,(t) - \omega^2(t)\,\hat{\rho}\,(t)\right]
\end{aligned}
$$

la velocidad angular es $\omega(t)$ y $\alpha(t)$ es la *aceleración angular*

$$
\begin{aligned}
\omega(t) &= \dot{\phi}(t) \\
\alpha(t) &= \dot{\omega}(t) \qquad (1.5.6)
\end{aligned}
$$

La expresión para $\vec{a}$ dada arriba quedó naturalmente separada en un término radial de *aceleración centrípeta*, $-\rho_0\,\omega^2\,\hat{\rho}$ y un término de aceleración tangencial, $\rho_0\alpha(t)\,\hat{\phi}$.

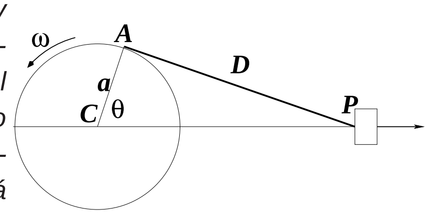
1.6. Problemas

1.1 *Por la orilla se una mesa rueda sin deslizar una rueda de radio R_1 con velocidad angular constante ω. Esta rueda tiene pegada en forma radial una varilla de largo R_2 ($R_2 > R_1$). Describa el movimiento de la punta de la varilla (distancia R_2 del centro de la rueda) a medida que la rueda avanza. Dibuje la curva $(x\text{-}z)$ que describe la trayectoria de este punto. Dibuje la componente horizontal, v_x de la velocidad de la punta como función del tiempo, en particular incluya el caso en que $R_2 = R_1$.*

1.2 *Un globo asciende desde la superficie terrestre con velocidad vertical uniforme v_0. Debido al viento, el globo adquiere una componente horizontal de velocidad que crece con la altura: $v_z = \alpha z$, donde α es una constante conocida y z es la altura sobre el terreno. Escogiendo el origen de coordenadas en el punto de partida determine: a) La trayectoria del globo; b) la componente tangencial y normal de la aceleración en función de la altura z.*

1.3 *Un punto se mueve ascendiendo por el manto de un cono de eje vertical, y vértice abajo, de tal modo que asciende a medida que gira en torno al eje: $z = A\phi$. El cono mismo se caracteriza por que las rectas sobre su manto que contienen al vértice forman un ángulo fijo θ con el eje. Describa el movimiento (los vectores $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$) suponiendo que $\phi(t)$ es una función arbitraria. Calcule también la curvatura de la trayectoria como función de z y de θ.*

1.4 *El punto de unión P entre un pistón y una biela de largo D se mueve a lo largo del eje X debido a que el cigüeñal (disco) de radio a y centro en un punto fijo C, rota a velocidad angular ω constante. En el instante $t = 0$ la biela está horizontal*



($\theta = 0$, $x = D + a$). a) Encuentre una expresión para la distancia $x(t)$ entre P y C como función de t. b) Encuentre la velocidad $v(t)$ de P. c) En la expresión para $v(t)$ considere el caso $a \ll D$ y de ahí encuentre una expre-

sión aproximada para la aceleración de P. ¿Cómo se compara la magnitud de la aceleración máxima del pistón con la aceleración del punto A?

1.5 *Una barra rígida de largo d se mueve apoyada entre dos paredes rígidas, que forman un ángulo recto entre ellas.*

Si el ángulo θ es una función arbitraria del tiempo $\theta = \theta(t)$, (a) Determine el vector posición, velocidad y aceleración del punto medio de la barra. (b) El radio de curvatura de una trayectoria se calcula como $\rho = v^3/||\vec{v} \times \vec{a}||$. Calcule el radio de curvatura de esta trayectoria. Interprete el resultado y dibuje la trayectoria. (c) Suponga ahora que el apoyo inferior de la barra se mueve con rapidez constante. Encuentre la función $\theta(t)$ que da lugar a ese movimiento.