Pauta Ejercicio 2

Prof. Rodrigo Arias

Pregunta 1

Usamos coordenadas polares, y escribimos la aceleración:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi}$$

Pero $\dot{\phi} = \Omega$ cte, $\Rightarrow \ddot{\phi} = 0$
Luego:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\Omega^2)\hat{r} + 2\dot{r}\Omega\hat{\phi} \tag{1}$$

No hay roce, luego sólo hay fuerzas, digamos $\vec{F}$, en $\hat{\phi}$

$$\sum \vec{F} = F\hat{\phi} = m\vec{a} = m[(\ddot{r} - r\Omega^2)\hat{r} + 2\dot{r}\Omega\hat{\phi}]$$

Por componentes:

$\hat{r}$:

$$0 = m(\ddot{r} - r\Omega^2) \tag{2}$$

$\hat{\phi}$:

$$F = 2m\dot{r}\Omega \tag{3}$$

A partir de (1) y usando que $\ddot{r} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$:

$$\dot{r}d\dot{r} = r\Omega^2 dr$$

$$\int_0^{\dot{r}} \dot{r}d\dot{r} = \Omega^2 \int_{r_o}^{r} r dr$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{\Omega^2}{2}(r^2 - r_o^2)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{r} = \Omega\sqrt{r^2 - r_o^2} \tag{4}$$

Reemplazando en (2):

$$\boxed{F = 2m\Omega^2\sqrt{r^2 - r_o^2}}$$

Pregunta 2

Parte a):

$$\vec{r}(t) = R(1 + \cos(\phi))\cos(\phi)\hat{x} + R(1 + \cos(\phi))\,\mathrm{sen}(\phi)\hat{y}$$

$$\vec{r}(t) = R(\cos(\phi) + \cos^2(\phi))\hat{x} + R(\mathrm{sen}(\phi) + \cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi))\hat{y}$$

Usando trigonometría, $\cos^2(\phi) = \frac{1}{2}(\cos(2\phi) + 1)$, y además $\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\phi)$:

$$\vec{r}(t) = R(\cos(\phi) + \frac{1}{2}(\cos(2\phi) + 1))\hat{x} + R(\mathrm{sen}(\phi) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\phi))\hat{y}$$

Derivando

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R\dot{\phi}(-\,\mathrm{sen}(\phi) - \mathrm{sen}(2\phi))\hat{x} + R\dot{\phi}(\cos(\phi) + \cos(2\phi))\hat{y}$$

Volviendo a derivar:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -R\dot{\phi}^2(\cos(\phi) + 2\cos(2\phi))\hat{x} - R\dot{\phi}^2(\mathrm{sen}(\phi) + 2\,\mathrm{sen}(2\phi))\hat{y}$$

Pero integrando $\dot{\phi} = \omega$, $\Rightarrow$:

$$\phi = \omega t + \phi_o = \omega t$$

Reemplazando,finalmente queda:

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2[(\cos(\omega t) + 2\cos(2\omega t))\hat{x} + (\mathrm{sen}(\omega t) + 2\,\mathrm{sen}(2\omega t))\hat{y}]$$

Parte b):
Se puede calcular $|\vec{v}(t)|$ de la expresion obtenida de $\vec{v}(t)$ en la parte anterior, sin embargo es más sencillo utilizando la expresión de la velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{v}(t) = -R\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\hat{r} + R\omega(1 + \cos(\omega t))\hat{\phi}$$

Luego:

$$|\vec{v}(t)| = R\omega\sqrt{\mathrm{sen}^2(\omega t) + (1 + \cos(\omega t))^2}$$

$$|\vec{v}(t)| = R\omega\sqrt{\mathrm{sen}^2(\omega t) + 1 + \cos^2(\omega t) + 2\cos(\omega t)}$$

$$|\vec{v}(t)| = R\omega\sqrt{2 + 2\cos(\omega t)}$$

Luego $\vec{v}(t)$ es máximo o mínimo cuando $(1+\cos(\omega t))$ es màximo o mìnimo, es decir, cuando $\mathrm{sen}(\omega t) = 0$. Luego eso se cumple para todo t^* tal que $\omega t^* = n\pi$.
Luego si $n = 2k$ se tiene máximo; y si $n = 2k + 1$, mínimo.

Máximo:

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2[(1 + 2)\hat{x} + (0 + 0)\hat{y}]$$

Finalmente

$$\vec{a}(t) = -3R\omega^2\hat{x}$$

Mínimo:

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2[(1-2)\hat{x} + (0+0)\hat{y}]$$

Finalmente

$$\vec{a}(t) = R\omega^2\hat{x}$$