FI-21A MECANICA

Luis Rodríguez Valencia[1]
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
Universidad de Chile

4 de marzo de 2009

[1]email: luis.rodriguezg@usach.cl

Contenidos

Capítulo 1

MOVIMIENTO Y COORDENADAS

El concepto de movimiento está relacionado con el concepto de posición. El concepto de posición es un concepto que es relativo a un determinado sistema de referencia o de coordenadas. En los sistemas de coordenadas, hay muchos tipos, la posición de un punto en un espacio de tres dimensiones, se define como el conjunto de los valores numéricos (o escalares) de sus tres coordenadas. Describiremos los llamados sistema cartesiano, sistema polar (de dos dimensiones), el sistema esférico y el sistema cilíndrico de coordenadas.

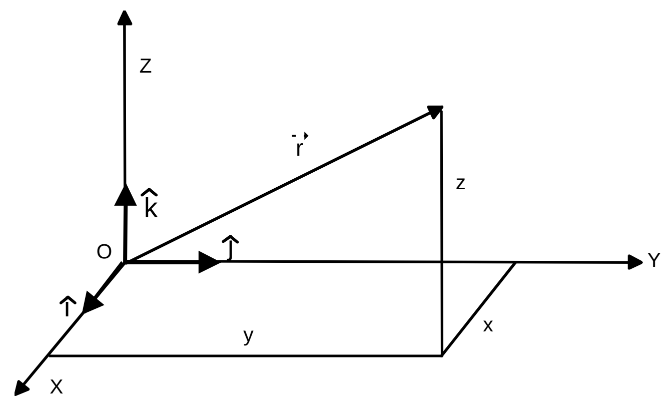
1.0.1. Posición.

La posición de los puntos en el espacio se define relativamente a un determinado sistema de referencia. Existen diversos sistemas de referencia cada uno con un conjunto de coordenadas que especifican la posición de un punto y con un conjunto ortogonal de vectores unitarios que permiten construir otros vectores en esos sistemas. El vector posición que va desde el origen del sistema al punto $\vec{r}$ especifica la posición del punto. Por ejemplo en el sistema de coordenadas cartesianas, ver figura que sigue.

1.0.2. Coordenadas cartesianas

Posición

La posición de un punto es el conjunto de sus tres coordenadas cartesianas x, y, z que pueden tomar todos los valores numéricos desde $-\infty$ hasta $+\infty$.



El sistema tiene tres ejes ortogonales, llamados ejes cartesianos de coordenadas OX, OY, OZ que se intersectan en un punto O llamado origen. Los vectores unitarios básicos $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ se definen con las direcciones y sentidos de los ejes cartesianos. La figura ilustra como con los valores numéricos en los ejes, las coordenadas, se determina la posición del punto.

Vector posición.

El vector posición puede escribirse

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}. \tag{1.1}$$

Concepto de movimiento

Se dice que un punto se mueve respecto a un sistema de referencia, si sus coordenadas, algunas o todas, son funciones del tiempo no constantes.

Concepto de reposo

Se dice que un punto está en reposo respecto a un sistema de referencia, si todas sus coordenadas son constantes.

1.0.3. Concepto de trayectoria

Si una partícula o un punto se mueve sus coordenadas x, y, z serán algunas funciones del tiempo que se acostumbra a llamarlas $x(t), y(t), z(t)$ de modo que

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{1.2}$$

constituyen las ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio, llamada la trayectoria de la partícula. El parámetro es el tiempo t.

Velocidad y aceleración.

Se definen la velocidad y aceleración como la primera y segunda derivada respecto al tiempo del vector posición, es decir

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}, \tag{1.3}$$

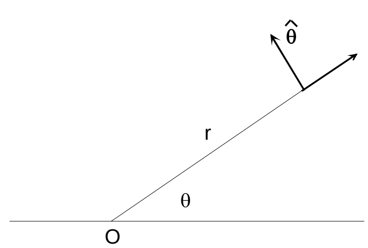
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k} \tag{1.4}$$

donde como es usual en Física, se indican derivadas respecto al tiempo $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, y así sucesivamente. La magnitud de la velocidad se denomina la rapidez de la partícula y se denota por v. Luego

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{1.5}$$

1.0.4. Coordenadas polares.

Con respecto a la figura se tiene sobre un plano, una línea llamada eje polar, un origen O.



Las coordenadas polares del punto son la distancia al origen r y el ángulo θ respecto al eje polar. Los vectores unitarios son el vector unitario radial $\hat{r}$ y el vector unitario transversal $\hat{\theta}$. Ellos pueden expresarse en términos de los cartesianos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta,\\ \hat{\theta} &= -\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta.\end{aligned}$$

De aquí derivando respecto al tiempo

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{r}}{dt} &= \dot{\theta}\left(-\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta\right) = \dot{\theta}\hat{\theta},\\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\dot{\theta}\left(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta\right) = -\dot{\theta}\hat{r}.\end{aligned}$$

Es claro que podemos escribir (con $\hat{k}$ vector unitario hacia afuera)

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{k}\times\hat{r},$$

un resultado que será usado en la sección siguiente para hacer derivadas de vectores unitarios en casos más complicados.

Velocidad y aceleración.

El vector posición puede escribirse

$$\vec{r} = r\hat{r}, \tag{1.6}$$

de donde derivando y usando los resultados anteriores se obtiene

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{1.7}$$

Similarmente la aceleración resultará

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d}{dt}\hat{\theta}\\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta}) + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r})\\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}, \qquad (1.8)\end{aligned}$$

expresión muy importante. Las componentes de la aceleración radial y tranversal son

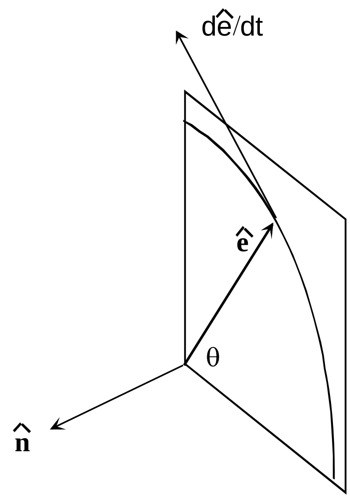
$$\begin{aligned}a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2,\\ a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}.\end{aligned}$$

1.0.5. Concepto de velocidad angular

Considere un cuerpo o un sistema de coordenadas que se mueve o cambia de posición. Dichos cambios pueden expresarse como traslaciones paralelas seguidas de cambios de orientación o rotaciones. Cuando un sistema se traslada (paralelamente), sus vectores unitarios básicos no cambian. Cuando un sistema rota, sus vectores unitarios cambian de dirección es decir varían.

Derivadas de los vectores unitarios.

En muchos sistemas de coordenadas si el punto se mueve, los vectores unitarios cambian de dirección y son por lo tanto vectores variables.



Si un vector unitario como el de la figura $\hat{e}$ varía con el tiempo porque el ángulo θ varía con el tiempo, entonces su derivada es la velocidad de su punta. Si recuerda la última nota de la sección anterior, la derivada puede ser obtenida mediante el producto cruz $\dot{\theta}\hat{n} \times \hat{e}$ o sea

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \dot{\theta}\hat{n} \times \hat{e}. \tag{1.9}$$

Note que $\hat{n}$ es perpendicular al plano que contiene el ángulo θ y con sentido de acuerdo a la regla de la mano derecha de acuerdo al crecimiento del ángulo. Si hay más ángulos variables debemos superponer los cambios obteniendo

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \left(\dot{\theta}\hat{n} + \dot{\phi}\hat{m} + \cdots\right) \times \hat{e} = \vec{\omega} \times \hat{e} \tag{1.10}$$

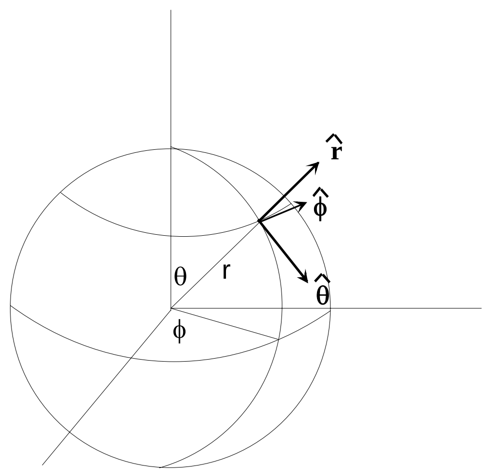
Donde

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\phi}\hat{m} + \cdots$$

se denomina la velocidad angular del movimiento del sistema que se mueve junto a los vectores unitarios $\hat{e}$. Los vectores unitarios $\hat{n}$, $\hat{m}$ son perpendiculares a los planos donde se definen los ángulos. Pasaremos ahora a expresar la velocidad y la aceleración en otros sistemas de coordenadas.

1.0.6. Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas

Con respecto a la figura,



las coordenadas esféricas son r la distancia al origen, θ el ángulo polar y ϕ el ángulo azimutal. Como

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

El cálculo de la velocidad y de la aceleración requiere de derivar los vectores unitarios, lo cual es más fácilmente realizado con lo explicado recién.

En efecto para coordenadas esféricas, el vector velocidad angular del sistema será

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{\phi}$$

y como

$$\hat{k} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}$$

tenemos que

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi}$$

luego podemos calcular las derivadas de los vectores unitarios

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{r}}{dt} &= \left(\dot{\phi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi}\right) \times \hat{r} \\
\frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \left(\dot{\phi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi}\right) \times \hat{\theta} \\
\frac{d\hat{\phi}}{dt} &= \left(\dot{\phi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi}\right) \times \hat{\phi}
\end{aligned}$$

y realizando los productos cruz se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{r}}{dt} &= \dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}\hat{\theta} \\
\frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi} - \dot{\theta}\hat{r} \\
\frac{d\hat{\phi}}{dt} &= -\dot{\phi}(\cos\theta\hat{\theta} + \sin\theta\hat{r})
\end{aligned}$$

Velocidad

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d}{dt}r\hat{r}, \\
&= \dot{r}\hat{r} + r(\dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}\hat{\theta}), \\
&= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

Rapidez

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2}. \qquad (1.12)$$

Aceleración

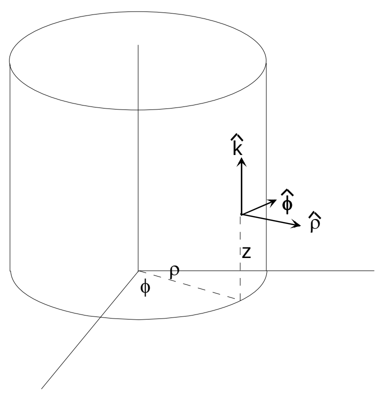
Omitimos los detalles, pero los resultados son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta, \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta, \\
a_\phi &= 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta.
\end{aligned}
$$

En la sección .[A]celeración conocida la velocidad", se da una forma más simple de obtenerlas.

1.0.7. Coordenadas cilíndricas.

La figura ilustra las coordenadas cilíndricas de un punto ρ, ϕ, z.



Aquí hay una sola velocidad angular

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k},$$

y el vector posición que deseamos derivar respecto al tiempo es

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}.$$

Calculemos primero las derivadas de los vectores unitarios

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{\rho}}{dt} &= \dot{\phi}\hat{k}\times\hat{\rho} = \dot{\phi}\hat{\phi}, \\
\frac{d\hat{\phi}}{dt} &= \dot{\phi}\hat{k}\times\hat{\phi} = -\dot{\phi}\hat{\rho}, \\
\frac{d\hat{k}}{dt} &= 0,
\end{aligned}
$$

de modo que resulta

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d}{dt}(\rho\hat{\rho} + z\hat{k}), \\
&= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\frac{d}{dt}\hat{\rho} + \dot{z}\hat{k}, \\
&= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k},
\end{aligned} \tag{1.13}$$

y para la aceleración

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}) \\
&= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{d}{dt}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\frac{d}{dt}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

En resumen

$$\begin{aligned}
v_\rho &= \dot{\rho},\ v_\phi = \rho\dot{\phi},\ v_z = \dot{z} \\
a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \quad a_\phi = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}, \quad a_z = \ddot{z}.
\end{aligned}$$

1.0.8. Coordenadas intrínsecas.

Considere la trayectoria de una partícula en el espacio. Dada esa curva, la posición del punto será una función de la longitud de arco s medida desde un origen arbitrario en la curva hasta la posición del punto en tiempo t, es decir

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t)). \tag{1.15}$$

Naturalmente la derivada de $\vec{r}$ respecto a s será tangente a la curva de modo que podemos escribir

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

que es unitario pues

$$|d\vec{r}| = |ds|.$$

Dado que $\hat{T}\cdot\hat{T} = 1$ derivando respecto a s resulta

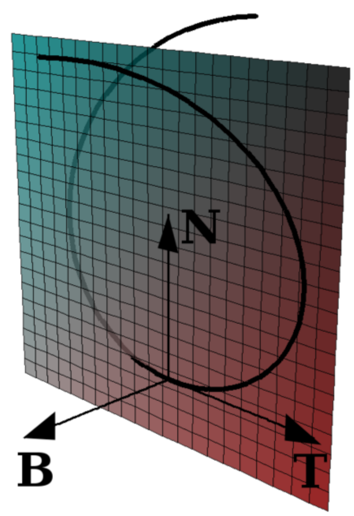
$$\hat{T}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds} = 0,$$

por lo cual $\frac{d\hat{T}}{ds}$ es perpendicular a $\hat{T}$. Denotemos por $\vec{N}$ a ese vector ortogonal a $\hat{T}$, que es llamado vector normal

$$\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|}. \tag{1.16}$$

Completemos una triada ortogonal construyendo el llamado vector binormal $\hat{B}$ de modo que se tendrá

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}, \quad \hat{T} = \hat{N} \times \hat{B}, \quad \hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}. \tag{1.17}$$



Velocidad angular de la triada

A medida que el punto se mueve a lo largo de la curva, esa triada tendrá alguna "velocidad angular" que denotaremos por $\vec{\Omega}$. Esta "velocidad angular çonsidera s en vez del tiempo como parámetro, luego sus unidades son m^{-1}. Entonces tendremos

$$\frac{d}{ds}\hat{T} = \vec{\Omega} \times \hat{T}, \quad \frac{d}{ds}\hat{B} = \vec{\Omega} \times \hat{B}, \quad \frac{d}{ds}\hat{N} = \vec{\Omega} \times \hat{N}. \tag{1.18}$$

Pero

$$\frac{d}{ds}\hat{T} = \vec{\Omega} \times \hat{T} = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| \hat{N}$$

que si la multiplicamos cruz con $\hat{N}$ conduce a

$$0 = \hat{N} \times (\vec{\Omega} \times \hat{T}),$$

o bien desarrollando

$$0 = (\hat{N} \cdot \hat{T})\vec{\Omega} - (\hat{N} \cdot \vec{\Omega})\hat{T},$$

o bien

$$\hat{N} \cdot \vec{\Omega} = 0,$$

es decir $\vec{\Omega}$ no tiene componente a lo largo de $\hat{N}$. Podemos entonces escribir $\vec{\Omega}$ en el plano de $\hat{T}$, y $\hat{B}$

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{\hat{T}}{\sigma} + \frac{\hat{B}}{\rho} \right),$$

siendo σ y ρ escalares que interpretaremos después. De aquí siguen las

Ecuaciones de Frenet

Las ecuaciones de Frenet dan las derivadas de los vectores unitarios respecto al parámetro s.

$$\frac{d}{ds}\hat{T} = \vec{\Omega} \times \hat{T} = \left(\frac{\hat{T}}{\sigma} + \frac{\hat{B}}{\rho} \right) \times \hat{T} = \frac{1}{\rho}\hat{N}, \tag{1.19}$$

$$\frac{d}{ds}\hat{B} = \vec{\Omega} \times \hat{B} = \left(\frac{\hat{T}}{\sigma} + \frac{\hat{B}}{\rho} \right) \times \hat{B} = -\frac{\hat{N}}{\sigma}, \tag{1.20}$$

$$\frac{d}{ds}\hat{N} = \vec{\Omega} \times \hat{N} = \left(\frac{\hat{T}}{\sigma} + \frac{\hat{B}}{\rho} \right) \times \hat{N} = \frac{\hat{B}}{\sigma} - \frac{\hat{T}}{\rho}. \tag{1.21}$$

o

$$\frac{d}{ds}\hat{T} = \kappa\hat{N}, \tag{1.22}$$

$$\frac{d}{ds}\hat{B} = -\tau\hat{N}, \tag{1.23}$$

$$\frac{d}{ds}\hat{N} = \tau\hat{B} - \kappa\hat{T} \tag{1.24}$$

donde $\tau = 1/\sigma$ se denomina la torsión y $\kappa = 1/\rho$ se denomina curvatura. Otras ecuaciones útiles que están relacionadas con las ecuaciones de Frenet son

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} &= \hat{T}, && (1.25)\\ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} &= \frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\hat{N} = \frac{1}{\rho}\hat{N}, && (1.26)\\ \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} &= \frac{d(\kappa\hat{N})}{ds} = \frac{d\kappa}{ds}\hat{N} + \kappa(\tau\hat{B} - \kappa\hat{T}). && (1.27) \end{aligned}$$

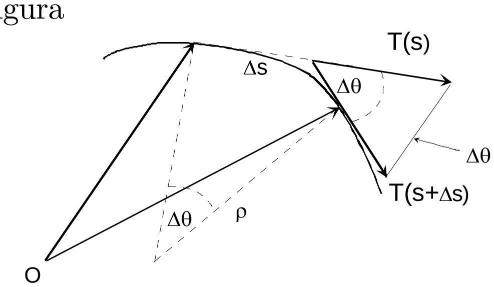
que serán utilizadas para el cálculo de la torsión τ.

Significado y cálculo de σ, ρ.

De la primera 1.19 sigue que

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d}{ds}\hat{T}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left|\hat{T}(s+\Delta s) - \hat{T}(s)\right|}{\Delta s}, \tag{1.28}$$

y de acuerdo a la figura



$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}. \tag{1.29}$$

El recíproco del radio de curvatura ρ se denomina la curvatura κ que está dada por la razón del cambio del ángulo de la tangente a la curva con respecto al arco recorrido

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}.$$

De

$$\frac{d}{ds}\hat{B} = -\frac{\hat{N}}{\sigma}$$

podemos dar una interpretación similar a $\frac{1}{\sigma}$, la denominada torsión, pero respecto al ángulo que gira la dirección binormal $\hat{B}$.

La velocidad y la aceleración

Tenemos que la velocidad es

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{s}\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s}\hat{T}, \\
v &= \dot{s},
\end{aligned}$$

y la aceleración será

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \ddot{s}\hat{T} + \dot{s}\frac{d\hat{T}}{dt}, \\
&= \ddot{s}\hat{T} + \dot{s}^2\frac{d\hat{T}}{ds}, \\
&= \ddot{s}\hat{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{N}, \\
&= \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N}.
\end{aligned}$$

Cálculo del radio de curvatura ρ dada $\vec{r} = \vec{r}(s)$

- Para una curva dada en función del parámetro longitud de arco $\vec{r} = \vec{r}(s)$.
$$\frac{d}{ds}\hat{T} = \frac{1}{\rho}\hat{N},$$
se obtiene
$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d}{ds}\hat{T}\right| = \left|\frac{d^2}{ds^2}\vec{r}\right|.$$

- Para una curva dada en función del tiempo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ debemos considerar que con lo cual es simple establecer que

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = \left|\dot{s}\hat{T} \times (\ddot{s}\hat{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{N})\right| = \left|\dot{s}\hat{T} \times (\frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{N})\right| = \frac{v^3}{\rho},$$

o bien

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3}, \tag{1.30}$$

y también el radio de curvatura

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}.$$

- Para utilizar la ecuaión anterior, haga recorrer una partícula por la curva con la rapidez que uste quiera y de esa forma podrá calcular $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$, y luego el radio de curvatura. Curva plana $y = y(x)$. Considere $x = t$, o sea el movimiento en el eje x es uniforme, de modo que resulta

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= t\hat{\imath} + y(x)\hat{\jmath}. \\
\vec{v} &= \hat{\imath} + y'(x)\hat{\jmath}, \\
\vec{a} &= y''(x)\hat{\jmath},
\end{aligned}$$

resultando

$$\rho = \frac{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}{|y''(x)|}. \tag{1.31}$$

- Curva en coordenadas polares $r = r(\theta)$. Como sabemos

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, && (1.32) \\
\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}, && (1.33)
\end{aligned}$$

el radio de curvatura se calculará usando

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|},$$

y da lo mismo cómo la partícula recorra la curva. Lo más simple es imaginar que

$$\theta = t,$$

y luego resultará

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= r'(\theta)\hat{r} + r\hat{\theta} && (1.34) \\
\vec{a} &= (r'' - r)\hat{r} + 2r'\hat{\theta}, && (1.35) \\
|\vec{v} \times \vec{a}| &= \left|(r'(\theta)\hat{r} \times (2r'\hat{\theta})\right| + \left|r\hat{\theta} \times (r'' - r)\hat{r}\right|, && (1.36) \\
&= \left|2(r')^2 - r(r'' - r)\right|, && (1.37)
\end{aligned}$$

finalmente

$$\rho = \frac{(\sqrt{(r')^2 + r^2})^3}{|2(r')^2 - r(r'' - r)|}.$$

Por ejemplo, para una espiral

$$\begin{aligned} r &= c\theta, \\ r' &= c, \\ r'' &= 0 \end{aligned}$$

y resulta

$$\rho = \frac{(\sqrt{c^2 + r^2})^3}{2c^2 + r^2},$$

que usted puede comprobar que es una función creciente con r. Note que $\rho(0) = \frac{1}{2}c$.

Cálculo de la torsión $\tau = 1/\sigma$

- Dada la curva $\vec{r} = \vec{r}(s)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(s)}{ds} &= \hat{T}, \\ \frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} &= \kappa\hat{N}, \\ \frac{d^3\vec{r}(s)}{ds^3} &= \frac{d\kappa}{ds}\hat{N} + \kappa(\frac{\hat{B}}{\sigma} - \kappa\hat{T}), \end{aligned}$$

luego el producto mixto es

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} \times \frac{d^3\vec{r}(s)}{ds^3}\right) &= \hat{T} \cdot \left(\kappa\hat{N} \times (\kappa(\frac{\hat{B}}{\sigma} - \kappa\hat{T}))\right) \\ &= \frac{\kappa^2}{\sigma}. \end{aligned}$$

- Para $\vec{r} = \vec{r}(t)$, podemos considerar que la curva es

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad \text{con } s = t,$$

esto es la curva es recorrida con rapidez constante unitaria. Desde luego eso no influye en las propiedades geométricas de la curva de manera que

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{v}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{a},$$

y luego

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{\sigma} &= \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} \times \frac{d^3\vec{r}(s)}{ds^3} \right) \\ &= \vec{v} \cdot \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{ds} \right). \end{aligned}$$

Cálculos para una hélice

Considere una hélice donde

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t, \\ y &= a\sin\omega t, \\ z &= bt. \end{aligned}$$

Luego construimos

$$\begin{aligned} \vec{r} &= a\hat{\imath}\cos\omega t + a\hat{\jmath}\sin\omega t + bt\hat{k}. \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega a\hat{\imath}\sin\omega t + a\omega\hat{\jmath}\cos\omega t + b\hat{k} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 a\hat{\imath}\cos\omega t - a\omega^2\hat{\jmath}\sin\omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (a^2\omega^2\sin^2\omega t + a^2\omega^2\cos^2\omega t + b^2)dt^2 \\ &= (a^2\omega^2 + b^2)dt^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(a^2\omega^2 + b^2)}dt \\ s &= \sqrt{(a^2\omega^2 + b^2)}t \equiv pt. \end{aligned}$$

La longitud de arco es proporcional al tiempo. Hemos llamado

$$p = \sqrt{(a^2\omega^2 + b^2)}.$$

Entonces podemos escribir $\vec{r}$ en términos del parámetro s

$$\vec{r} = a\hat{\imath}\cos\frac{\omega s}{p} + a\hat{\jmath}\sin\frac{\omega s}{p} + \frac{bs}{p}\hat{k},$$

y luego calculamos

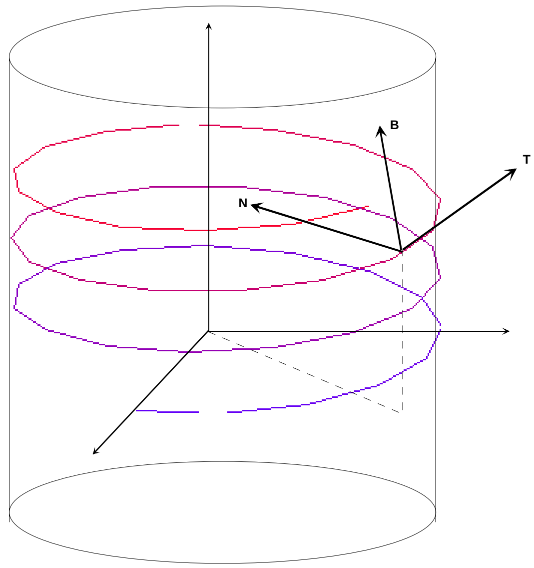
$$\begin{aligned}
\hat{T} &= \frac{d\vec{r}}{ds} = -a\frac{\omega}{p}\sin\frac{\omega s}{p}\hat{\imath} + a\frac{\omega}{p}\cos\frac{\omega s}{p}\hat{\jmath} + \frac{b}{p}\hat{k}, \\
\frac{d\hat{T}}{ds} &= \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = -a(\frac{\omega}{p})^2\cos\frac{\omega s}{p}\hat{\imath} - a(\frac{\omega}{p})^2\sin\frac{\omega s}{p}\hat{\jmath}, \\
\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} &= a(\frac{\omega}{p})^3\sin\frac{\omega s}{p}\hat{\imath} - a(\frac{\omega}{p})^3\cos\frac{\omega s}{p}\hat{\jmath}, \\
\frac{1}{\rho} &= \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = a(\frac{\omega}{p})^2, \\
\hat{N} &= -\cos\frac{\omega s}{p}\hat{\imath} - \sin\frac{\omega s}{p}\hat{\jmath}, \\
\hat{B} &= \hat{T}\times\hat{N} = \frac{b}{p}\sin\frac{\omega s}{p}\hat{\imath} - \frac{b}{p}\cos\frac{\omega s}{p}\hat{\jmath} + a\frac{\omega}{p}\hat{k}.
\end{aligned}$$

puede calcularse y obtener

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma} &= \rho\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\times\left(\frac{d}{ds}\rho\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\omega}{p}\frac{b}{p} = \frac{\omega b}{a^2\omega^2 + b^2}, \\
\frac{1}{\rho} &= a\frac{\omega^2}{a^2\omega^2 + b^2},
\end{aligned}$$

Note que si $b = 0$, se trata de una circunferencia de radio a plana y resulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma} &= 0, \\
\frac{1}{\rho} &= \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$



Velocidad y aceleración.

Ahora es trivial establecer que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s}\hat{T} = v\hat{T}.$$

Además

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s}\hat{T} + \dot{s}\frac{d\hat{T}}{dt} \\ &= \ddot{s}\hat{T} + \dot{s}^2\frac{d\hat{T}}{ds} \\ &= \ddot{s}\hat{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{N} \\ &= \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N}. \end{aligned}$$

1.0.9. Aceleración conocida la velocidad

Esta sección no se encuentra en textos que yo conozca. Si la posición es alguna función de tres coordenadas generalizadas q_1, q_2 y q_3 y quizás también dependa explícitamente del tiempo, es decir

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3, t),$$

entonces es cierta la identidad

$$\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{2}v^2, \tag{1.38}$$

y como explicaremos, esto permite calcular componentes de la aceleración en diversos sistemas de coordenadas. La demostración es la siguiente. Calcule la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}. \tag{1.39}$$

Considere

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\frac{1}{2}v^2 = \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\vec{v},$$

pero de 1.39 se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1},$$

luego

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\frac{1}{2}v^2 = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1},$$

al derivar respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\frac{1}{2}v^2 = \frac{d}{dt}\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right), \\
&= \frac{\partial}{\partial q_1}\vec{v},
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\frac{1}{2}v^2 &= \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1}\vec{v} \\
&= \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{1}{2}v^2.
\end{aligned}$$

Esto prueba la primera. Similarmente las otras.

Vectores unitarios

Primero, para hablar de componentes, se requiere definir vectores unitarios básicos. Ellos están asociados a cambios independientes infinitésimos dq_i del vector $\vec{r}$ sin variar el tiempo, es decir

$$\hat{e}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \right|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|},$$

por lo cual de (1.38) se deduce que la componente según $\hat{e}_i$ de la aceleración es

$$a_i = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{1}{2} v^2 - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} v^2 \right), \tag{1.40}$$

que será aplicada en las dos secciones siguientes.

Ejemplo de coordenadas esféricas.

Se estableció que

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + r\dot{\theta}\hat{\theta} && (1.41) \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\dot{\theta}, && (1.42) \end{aligned}$$

luego podemos identificar

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{r},\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r\sin\theta\hat{\phi},\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\hat{\theta}.$$

Otra forma sería usar

$$\vec{r} = r\hat{r},$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \hat{r}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = r\frac{\partial \hat{r}}{\partial t}\frac{1}{\dot{\phi}} = r\hat{\phi}\sin\theta \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= r\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = r\hat{\theta}. \end{aligned}$$

Además

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2, \qquad (1.43)$$

Luego de (1.40) se puede calcular

$$\begin{aligned}
a_r &= (\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{r}}\frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2}v^2) = \ddot{r} - (r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r\dot{\theta}^2) \\
a_\theta &= \frac{1}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|}(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{2}v^2) = \frac{1}{r}(\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) \\
&= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2, \\
a_\phi &= \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{d}{dt}\frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{2}v^2) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}).
\end{aligned}$$

Ejemplo de coordenadas cilíndricas

Teníamos

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k},$$

de donde

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \hat{\rho}, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \hat{k}, \; \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = \rho\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\phi} = \rho\hat{\phi},$$

y

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2,$$

de manera que resulta

$$\begin{aligned}
a_\rho &= (\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\rho}}\frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{2}v^2) = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \\
a_\phi &= \frac{1}{\rho}(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{2}v^2) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\rho^2\dot{\phi}, \\
a_z &= (\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{z}}\frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}v^2) = \ddot{z},
\end{aligned}$$

tal como antes.

1.1. Ejemplos.

Como explicaremos en unos ejemplos, para calcular velocidades y aceleraciones recomendamos no usar más fórmulas que simplemente expresar el vector posición y derivarlo dos veces. Solamente deberá establecer si los vectores unitarios cambian o no de orientación y si lo hacen establecer con que velocidad angular lo hacen y en definitiva aplicar la regla

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}.$$

EJEMPLO 1.1.1 *Considere la hélice*

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= 2t \end{aligned}$$

calcule $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$, ρ, σ.

Solución.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \hat{\imath}\cos t + \hat{\jmath}\sin t + 2t\hat{k}, \\ \vec{v} &= -\hat{\imath}\sin t + \hat{\jmath}\cos t + 2\hat{k}, \\ \vec{a} &= -\hat{\imath}\cos t - \hat{\jmath}\sin t. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{-\hat{\imath}\sin t + \hat{\jmath}\cos t + 2\hat{k}}{\sqrt{5}}, \\ \vec{N} &= \frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{-\hat{\imath}\cos t - \hat{\jmath}\sin t}{\sqrt{5}}, \\ \hat{N} &= -\hat{\imath}\cos t - \hat{\jmath}\sin t, \\ \hat{B} &= \hat{T} \times \hat{N} = \frac{2\hat{\imath}\sin t - 2\hat{\jmath}\cos t + \hat{k}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

▲

EJEMPLO 1.1.2 *Considere una partícula que se mueve por la arista OB de un triángulo cuyo plano está vertical, el ángulo* α *es constante y el ángulo* ϕ *es variable. La distancia OP está dada por* $OP = v_0 t$. *Determine la velocidad y aceleración de la partícula en base de los vectores unitarios* $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ *y* $\hat{e}_3$.

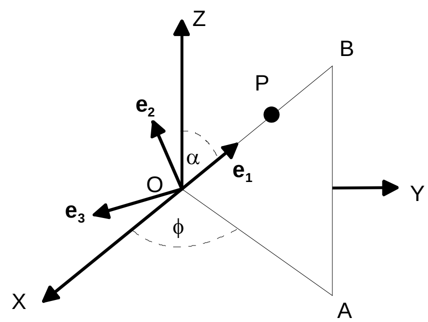


Figura 1.1:

Solución. El sistema de vectores unitarios tiene una velocidad angular

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k} = \dot{\phi}(\hat{e}_1 \cos\alpha + \hat{e}_2 \sin\alpha).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{e}_1}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \dot{\phi}(\hat{e}_1 \cos\alpha + \hat{e}_2 \sin\alpha) \times \hat{e}_1 \\
&= -\dot{\phi}\hat{e}_3 \sin\alpha. \\
\frac{d\hat{e}_2}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{e}_2 = \dot{\phi}(\hat{e}_1 \cos\alpha + \hat{e}_2 \sin\alpha) \times \hat{e}_2 \\
&= \dot{\phi}\hat{e}_3 \cos\alpha \\
\frac{d\hat{e}_3}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{e}_3 = \dot{\phi}(\hat{e}_1 \cos\alpha + \hat{e}_2 \sin\alpha) \times \hat{e}_3 \\
&= -\dot{\phi}\hat{e}_2 \cos\alpha + \dot{\phi}\hat{e}_1 \sin\alpha.
\end{aligned}$$

Ahora usted puede calcular lo que quiera. En efecto

$$\vec{r} = v_0 t \hat{e}_1,$$

luego

$$\vec{v} = v_0 \hat{e}_1 - v_0 t \dot{\phi}\hat{e}_3 \sin\alpha,$$

y

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= v_0(-\dot{\phi}\hat{e}_3 \sin\alpha) - v_0\dot{\phi}\hat{e}_3 \sin\alpha - v_0 t\dot{\phi}(-\dot{\phi}\hat{e}_2 \cos\alpha + \dot{\phi}\hat{e}_1 \sin\alpha) \sin\alpha \\
&= -2v_0\dot{\phi}\hat{e}_3 \sin\alpha + v_0 t\dot{\phi}^2 \hat{e}_2 \cos\alpha - v_0 t\dot{\phi}^2 \hat{e}_1 \sin^2\alpha.
\end{aligned}$$

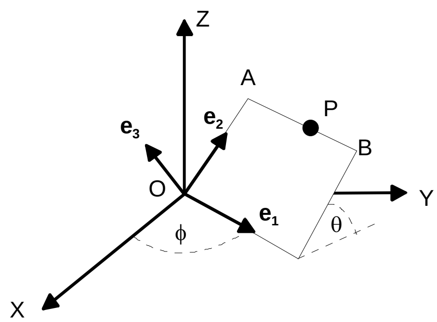


Figura 1.2:

Ejemplo 1.1.3 *Una partícula se mueve por la arista AB de una lámina cuadrada de arista b de modo que $AP = v_0 t$. La lámina permanece apoyada en una arista sobre el plano OXY variando los ángulo θ y ϕ. Determine la velocidad y aceleración de la partícula en base de los vectores unitarios $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$.*

Solución. Similarmente el sistema de vectores unitarios tiene una velocidad angular

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}_1, \\ &= \dot{\phi}(\hat{e}_3 \cos\theta + \hat{e}_2 \sin\theta) + \dot{\theta}\hat{e}_1,\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{e}_1}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \dot{\phi}(\hat{e}_3 \cos\theta + \hat{e}_2 \sin\theta) \times \hat{e}_1 \\ &= \dot{\phi}(\hat{e}_2 \cos\theta - \hat{e}_3 \sin\theta) \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{e}_2 = (\dot{\phi}\hat{e}_3 \cos\theta + \dot{\theta}\hat{e}_1) \times \hat{e}_2 \\ &= (-\dot{\phi}\hat{e}_1 \cos\theta + \dot{\theta}\hat{e}_3) \\ \frac{d\hat{e}_3}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{e}_3 = (\dot{\phi}\hat{e}_2 \sin\theta + \dot{\theta}\hat{e}_1) \times \hat{e}_3 \\ &= (\dot{\phi}\hat{e}_1 \sin\theta - \dot{\theta}\hat{e}_2)\end{aligned}$$

Ahora usted puede calcular lo que quiera. En efecto

$$\vec{r} = v_0 t\hat{e}_1 + b\hat{e}_2,$$

luego

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_0\hat{e}_1 + v_0 t\dot{\phi}(\hat{e}_2\cos\theta - \hat{e}_3\sin\theta) + b(-\dot{\phi}\hat{e}_1\cos\theta + \dot{\theta}\hat{e}_3) \\ &= (v_0 - b\dot{\phi}\cos\theta)\hat{e}_1 + v_0 t\dot{\phi}\hat{e}_2\cos\theta + (b\dot{\theta} - v_0 t\dot{\phi}\sin\theta)\hat{e}_3\end{aligned}$$

y usted puede calcular $\vec{a}$ derivando $\vec{v}$.

▲

1.2. Ejercicios resueltos

EJERCICIO 1.2.1 *Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas cartesianas están dadas como funciones del tiempo por*

$$\begin{aligned}x &= 3t \\ y &= 2t - 5t^2\end{aligned}$$

Determine

a) Las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración.

b) Las componentes polares de la velocidad y de la aceleración.

c) Las componente normal y tangencial de la velocidad y aceleración.

d) La ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas.

e) La ecuación de la trayectoria en coordenadas polares.

Solución. (a) Hacemos las dos primeras derivadas de las coordenadas

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x} = 3 \\ v_y &= \dot{y} = 2 - 10t, \\ a_x &= \ddot{x} = 0, \\ a_y &= \ddot{y} = -10.\end{aligned}$$

(b) Las componentes polares se pueden obtener proyectando

$$\begin{aligned}v_r &= \vec{v}\cdot\hat{r}, \\ v_\theta &= \vec{v}\cdot\hat{\theta}, \\ a_r &= \vec{a}\cdot\hat{r}, \\ a_\theta &= \vec{a}\cdot\hat{\theta},\end{aligned}$$

donde los vectores unitarios están dados por

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta \\ \hat{\theta} &= -\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta.\end{aligned}$$

Así resulta

$$\begin{aligned}v_r &= \vec{v}\cdot\hat{r} = 3\cos\theta + (2-10t)\sin\theta, \\ v_\theta &= \vec{v}\cdot\hat{\theta} = -3\sin\theta + (2-10t)\cos\theta, \\ a_r &= \vec{a}\cdot\hat{r} = -10\sin\theta, \\ a_\theta &= \vec{a}\cdot\hat{\theta} = -10\cos\theta.\end{aligned}$$

Se puede dejar completamente en función del tiempo porque

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2} \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{3t}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}}, \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{2t-5t^2}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}}.\end{aligned}$$

(c) Las componentes normal y tangencial se encuentran también proyectando sobre esas direcciones que son

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{3\hat{\imath}+(2-10t)\hat{\jmath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}},$$

un vector $\hat{N}$ perpendicular a $\hat{T}$ puede calcularse así

$$\hat{N} = \hat{k}\times\hat{T} = \frac{3\hat{\jmath}-(2-10t)\hat{\imath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}},$$

luego resultan

$$\begin{aligned}v_T &= \vec{v}\cdot\hat{T} = \sqrt{9+(2-10t)^2}, \\ v_N &= 0, \\ a_T &= \vec{a}\cdot\hat{T} = \frac{-10(2-10t)}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}, \\ a_N &= \vec{a}\cdot\hat{N} = \frac{-30}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}.\end{aligned}$$

(d) La trayectoria es trivial

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}t^2.$$

(e) en polares, se pide

$$r = r(\theta),$$

pero tenínamos

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9t^2 + (2t - 5t^2)^2} \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{3t}{\sqrt{9t^2 + (2t - 5t^2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{9t + (2 - 5t)^2}}, \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{2t - 5t^2}{\sqrt{9t^2 + (2t - 5t^2)^2}} = .\frac{2 - 5t}{\sqrt{9t + (2 - 5t)^2}} \end{aligned}$$

Despejemos de la segunda

$$t = \frac{1}{3}r\cos\theta,$$

y reemplacemos en la tercera

$$\sin\theta = 2(\frac{1}{3}\cos\theta) - 5r(\frac{1}{3}\cos\theta)^2$$

de donde despejamos

$$r = \frac{3}{5}\frac{2\cos\theta - 3\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

Note que para $t = 0$, $\tan\theta_0 = \frac{2}{3}$. o sea $\theta_0 = 33.69^o$.

EJERCICIO 1.2.2 *Una partícula se mueve sobre una elipse de semi ejes a y b centrada en el origen de un sistema de coordenadas con rapidez constante v_0, siendo la ecuación de la elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a) Determine La magnitud de la aceleración de la partícula en los puntos más alejado y más cercano de la partícula al centro.

b) El tiempo que emplea la partícula en recorrer toda la elipse.

c) La determinación de la ecuación paramétrica de la trayectoria con parámetro tiempo es un problema complicado, pero explique el método a seguir.

Solución. (a) Como la rapidez es constante, la aceleración tangencial es nula y la aceleración normal es

$$a_N = \frac{v_0^2}{\rho},$$

siendo necesario calcular el radio de curvatura de acuerdo a

$$\rho = \frac{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3}{|y''(x)|}.$$

Bastaría hacerlo en $x = 0$ y $x = a$ pero lo haremos en términos de x. Así resultan

$$\begin{aligned} y(x) &= b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \\ y'(x) &= -\frac{b}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\frac{x}{a^2}, \\ |y''(x)| &= \frac{\frac{b}{a^2}}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}, \end{aligned}$$

luego

$$\rho = \frac{\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+b^2\frac{x^2}{a^4}}\right)^3}{\frac{b}{a^2}} = .$$

Evaluando en $x = 0$ y $x = a$ resultan

$$\rho(0) = \frac{a^2}{b}, \quad \rho(a) = \frac{b^2}{a}.$$

(b) Para determinar el tiempo, debemos determinar el perímetro de la elipse. Tenemos que

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^a \sqrt{1+(y'(x))^2}dx, \\ &= 4\int_0^a \sqrt{1+\frac{b^2}{1-\frac{x^2}{a^2}}\frac{x^2}{a^4}}dx = 4\,\mathrm{EllipticE}\left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)a, \end{aligned}$$

de manera que el tiempo es

$$T = \frac{4\,\mathrm{EllipticE}\left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}\right) a}{v_0}.$$

▲

EJERCICIO 1.2.3 *La ecuación de una elipse en coordenadas polares puede escribirse como*

$$r = \frac{c}{1 - e\cos\theta}$$

siendo c y e constantes. Si el ángulo varía proporcionalmente al tiempo t con constante de proporcionalidad ω, determine las componentes polares de la velocidad y de la aceleración en función del tiempo.

Solución. Es cosa de hacer algunas derivadas y luego usar (1.8)

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \theta &= \omega t, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad \ddot{\theta} = 0, \\ \dot{r} &= r'(\theta)\dot{\theta}, \; \ddot{r} = r''(\theta)\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

y dado que

$$\begin{aligned} r' &= \frac{d}{d\theta}\frac{c}{1 - e\cos\theta} = -ce\frac{\sin\theta}{(1 - e\cos\theta)^2} \\ r'' &= ce\frac{2e - e\cos^2\theta - \cos\theta}{(1 - e\cos\theta)^3}, \end{aligned}$$

resultan

$$\begin{aligned} a_r &= ce\frac{2e - e\cos^2\omega t - \cos\omega t}{(1 - e\cos\omega t)^3}\omega - \frac{c}{1 - e\cos\omega t}\omega^2, \\ a_\theta &= -2ce\omega^2\frac{\sin\omega t}{(1 - e\cos\omega t)^2}. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 1.2.4 *Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio R con aceleración angular constante partiendo del reposo. Si la partícula realiza n vueltas completas a la circunferencia en el primer segundo, determine la aceleración angular de la partícula. Determine además el número de vueltas que realiza la partícula durante el siguiente segundo del movimiento.*

Solución. Aceleración angular constante significa

$$\ddot{\theta} = \alpha \text{ (constante)}.$$

Integrando dos veces

$$\dot{\theta} = \alpha t, \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

Por el enunciado en el primer segundo

$$\theta = 2n\pi = \frac{1}{2}\alpha 1^2 \Rightarrow \alpha = 4n\pi,$$

y durante el siguiente segundo el ángulo será

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha 2^2 - \frac{1}{2}\alpha 1^2 = \frac{3}{2}\alpha = 6n\pi$$

o sea $3n$ vueltas.

▲

EJERCICIO 1.2.5 *Una partícula está fija en la arista AB de una lámina cuadrada de arista b de modo que AP = d. La lámina permanece apoyada en una arista sobre el plano OXY variando los ángulo θ y ϕ. Determine la velocidad y aceleración de la partícula en base de los vectores unitarios $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$.*

Solución.

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{e}_1, \\
&= \dot{\phi}(\hat{e}_3 \cos\theta + \hat{e}_2 \sin\theta) + \dot{\theta}\hat{e}_1,
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\vec{v}_P &= \frac{d}{dt}\overrightarrow{OP} = \frac{d}{dt}(b\hat{e}_2 + d\hat{e}_1) = \\
&= \vec{\omega} \times (b\hat{e}_2 + d\hat{e}_1) \\
&= b(-\dot{\phi}\hat{e}_1 \cos\theta + \dot{\theta}\hat{e}_3) + d\dot{\phi}(\hat{e}_2 \cos\theta - \hat{e}_3 \sin\theta).
\end{aligned}$$

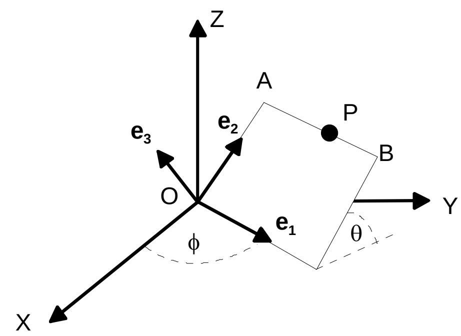


Figura 1.3:

EJERCICIO 1.2.6 *Considere una partícula que está fija en la arista AB de un triángulo cuyo plano está vertical, el ángulo α es constante y el ángulo ϕ es variable. La distancia OP está dada por $OP = d$. Determine la velocidad y aceleración de la partícula en base de los vectores unitarios $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$.*

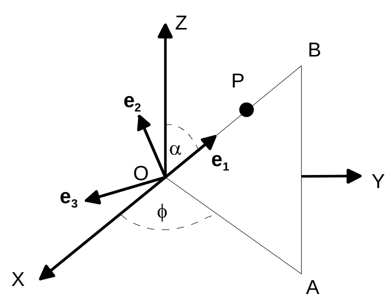


Figura 1.4:

Solución. La velocidad angular de la triada móvil es

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k} = \dot{\phi}(\hat{e}_1 \cos\alpha + \hat{e}_2 \sin\alpha),$$

y

$$\overrightarrow{OP} = d\hat{e}_1,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \dot{\phi}(\hat{e}_1 \cos\alpha + \hat{e}_2 \sin\alpha) \times d\hat{e}_1 \\ &= -d\dot{\phi}\hat{e}_3 \sin\alpha.\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 1.2.7 *Determine el radio de curvatura de la curva*

$$\begin{aligned}x &= p, \\ y &= p^2, \\ z &= p^3,\end{aligned}$$

en términos del parámetro p.

Solución. Usaremos

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

y podemos tomar el tiempo igual al parámetro p porque no importa (medítelo). Tenemos entonces (usando notación de trío para los vectores)

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (p, p^2, p^3) \\ \vec{v} &= (1, 2p, 3p^2) \\ \vec{a} &= (0, 2, 6p) \\ v &= \sqrt{1 + 4p^2 + 9p^4}\end{aligned}$$

y el producto cruz

$$\vec{v} \times \vec{a} = \left(6p^2, -6p, 2\right)$$

entonces

$$\rho = \frac{\left(\sqrt{1 + 4p^2 + 9p^4}\right)^3}{2\sqrt{1 + 9p^2 + 9p^4}}.$$

▲

Capítulo 2

DINÁMICA.

El propósito de la dinámica es predecir el comportamiento futuro de un sistema, en particular de una partícula cuando son conocidas las fuerzas y las restricciones que actúan sobre ella y se conoce el presente. Este conocimiento se da en la forma llamada “condición inicial”. Para una partícula este se expresa en suponer conocidas la posición y velocidad inicial de ella, $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$. Como veremos este propósito es logrado mediante la llamada Mecánica Clásica, salvo excepcionalmente para sistemas que tienen comportamiento caótico y que están fuera del alcance de este curso. Para estudiar el movimiento de un cuerpo puede escogerse algún sistema de referencia arbitrario y entonces el estudio es relativo a ese sistema de referencia. Para hacer dinámica, la elección del sistema de referencia adecuado no es arbitraria.

2.1. Leyes de Newton para una partícula

Desde los tiempos de Galileo se ha reconocido que no es necesario aplicar fuerzas para mantener el movimiento de los cuerpos. Esto evidentemente choca con lo observado diariamente puesto que si se dejan de aplicar fuerzas, los cuerpos se detienen. El problema está en que en realidad no se han dejado de aplicar todas las fuerzas. Normalmente existen fuerzas, llamadas de roce que están presentes y cuya tendencia es frenar los cuerpos. Es dificil eliminarlas, pero si se logra, entonces el movimiento se mantiene. Sin embargo hay otros detalles. Se mantiene pero ¿respecto a qué sistema de referencia? Para Newton existen el tiempo y el espacio absolutos, respecto a los cuales el formulas sus leyes. El problema es definirlos. Hoy día el tiempo puede medirse con una extraordinaria precisión pero no encontramos buenas definiciones.

2.1.1. Sobre el tiempo

Hemos observado y por lo tanto creemos que hay fenómenos periódicos, es decir que se repiten cada ciertos iguales intervalos de tiempo, o que creemos iguales. Si aceptamos eso, al menos tendremos una forma de medir tiempos, y con eso es casi suficiente en física. Un reloj entonces contiene dos partes esenciales, un sistema oscilatorio de un cierto período y un contador que cuenta las oscilaciones. Mientras mayor sea la frecuencia (más corto ese determinado intervalo de tiempo llamado periodo) entonces podremos resolver tiempos con mayor precisión. Esto es lo que ocurre con los relojes atómicos donde la frecuencia de oscilación es altísima.

Por otro lado, como lo analiza Albert Einstein, el tiempo tiene que ver con poder discernir cuál de dos eventos ocurre antes, o cual ocurre después o si ocurrieron simultáneamente. Así por ejemplo el declara que la cuestión es obvia si los dos eventos ocurren en un mismo punto del espacio. Es cuestión de mirar la secuencia de ocurrencia de los dos Eventos. (Sin embargo existe un potencial problema de indefinición que, a juicio del autor, no ha sido suficientemente analizado. Observadores que viajen hacia el futuro difieren de otros que viajen al pasado). Einstein también descubre que la simultaneidad de eventos que ocurren lejos el uno del otro, es un concepto relativo y eso desmorona el concepto de tiempo absoluto de Newton. Sin embargo, haremos Física Newtoniana solamente.

2.1.2. Primera ley de Newton

La primera ley de Newton suele enunciarse así. Si un cuerpo no está sometido a fuerzas, se mueve con velocidad constante o permanece en reposo.

El detalle es que así enunciada, no puede estar correcta. Si ello es cierto en algún sistema de referencia, inmediatamente deja de ser cierto si el observador está en un sistema acelerado respecto al primero, ver figura. En concreto basta que el observador se ponga a saltar sobre el suelo para que la primera ley deje de ser válida. Por ello, para mantenerla, se han definido sistemas de referencia especiales donde ella es cierta.De esta manera, en rigor, la primera Ley es reemplazada por la definición de un determinado tipo de observador o de sistema de referencia, los llamados sistemas inerciales de referencia.

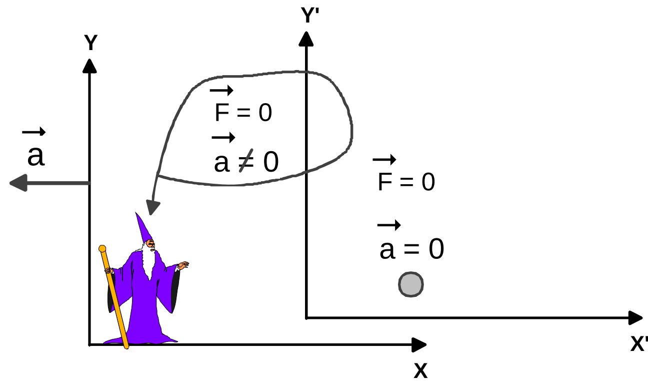


Figura 2.1:

2.1.3. Sistema inercial de referencia

En la formulación de la dinámica clásica, se supone la existencia de al menos un sistema privilegiado de referencia, un *Sistema inercial de referencia*. Por definición, un *sistema inercial de referencia* es aquel (hipotético) sistema relativo al cual una partícula libre, es decir no sometida a fuerza, tiene velocidad constante o en particular nula. Como consecuencia de la transformación de Galileo, todo sistema que se traslade con velocidad constante respecto a uno inercial de referencia, es también sistema inercial de referencia. La existencia de uno por lo menos, sería materia de validación experimental, con las obvias dificultades que ello presenta. Se acepta que al menos aproximadamente, el marco de las estrellas fijas, lo es. Esta es una materia hoy en día de acuerdo internacional. En efecto en Agosto de 1997, la Unión Astronómica Internacional (IAU) decidió que a partir del primero de Enero de 1998, el IAU sistema de referencia celestial sea el sistema (ICRS), en reemplazo del sistema FK5. Hay abundantes referencias sobre este tema en la WEB, por ejemplo http://rorf.usno.navy.mil/ICRF/

Esta definición reemplaza la primera ley de Newton, puesto que su validez: “la aceleración respecto a un sistema es nula cuando la fuerza es nula”, define lo que se denomina un sistema inercial de referencia.

Así entonces hay que aceptar que Newton formulas sus leyes respecto a un sistema de referencia inercial. Si el Universo estuviera vacío uno puede preguntarse que podría ser tal sistema. No existe aparentemente diferencia alguna entre un sistema .ªcelerado.º un sistema rotante"si no hay nada respecto a lo cual establecer la realidad de la .ªceleración.º de la rotación". Sin embargo Newton creía firmemente que el espacio mismo existe como algo absoluto, real como una entidad física, respecto al cual los conceptos de aceleración o de rotación podrían definirse. Así Newton dice que un objeto está acelerando cuando lo hace respecto al espacio absoluto.

Pero a mediados de los 1800 un filósofo y físico Ernst Mach llegó con nuevas ideas que además, entre otras cosas, tuvieron un profundo impacto en el pensamiento de Albert Einstein. Las ideas de Mach se aprecian analizando un balde que contiene agua en su interior. Si el balde se mantiene suspendido y quieto, la superficie del agua permanece plana. Si se hace rotar el balde respecto a la cuerda que lo sostiene, la superficie del agua adquirirá una forma cóncava. ¿Respecto a qué sistema el balde rota?

Si vamos más lejos y nos imaginamos flotando en el espacio interestelar, si uno mira el cielo y ve las estrellas estacionarias uno podría decir que está en reposo y no experimenta fuerza alguna. Justo entonces un compañero de viaje, se acerca y le da un impulso de modo que comienza a rotar. Seguro que se notarán dos efectos: las estrellas parecerán girar en grandes círculos en torno a uno, y uno experimentará fuerzas que tenderán a separar sus brazos y piernas. Si repetimos la misma situación pero en un espacio absolutamente vacío, sin estrellas, galaxias, sólo una total oscuridad, ¿sentiremos esa fuerza si alguien nos coloca en rotación? Según Mach, no. En un universo totalmente vacío no puede haber diferencia entre aceleración o no aceleración. Entre rotación y no rotación. De manera que, según Mach, si cuesta una fuerza acelerar un cuerpo, ello se debe a la existencia de todas las galaxias del Universo.

Posteriormente, Albert Einstein, al desarrollar la teoría general de la relatividad introduce el concepto de espacio tiempo, un concepto que tiene existencia real y con propiedades que se ajustan según sea la distribución de masa y energía del Universo. El espacio tiempo es algo absoluto respecto al cual pueden definirse los movimientos de los cuerpos. Sin embargo la teoría de Einstein no confirma totalmente las ideas de Mach. En un Universo vacío, el espacio tiempo no está curvado, está plano, pero existe. De manera que una persona rotando en un Universo vacío, sí sentiría fuerza que tendería a separarle sus brazos y piernas. Podría decirse que las ideas de Mach provocaron de alguna manera el desarrollo de la Teoría general de la relatividad pero la teoría que se desarrolló, no confirmó las ideas que la inspiraron. Una excelente discusión sobre este tema la puede encontrar en el libro de Brian Greene, "The fabric of the Cosmos". En la actualidad el espacio tiempo es el sistema absoluto de referencia y los observadores inerciales son los que se mueven libremente en caída libre, es decir no sometidos a fuerzas eléctricas, magnéticas u otras. Este es un cambio de perspectiva notable y lejos de lo que imaginábamos. Los campos gravitacionales no causan aceleraciones. Otras fuerzas si causan aceleraciones. El otro problema que ocurrió, pero del cual nos olvidaremos, es que esas otras fuerzas (electromagnética, fuerte y débil) sólo tienen una buena descripción en la llamada Mecánica Cuántica, y en esa teoría, las aceleraciones no existen. Plop.

2.1.4. Segunda ley de Newton

En un sistema inercial de referencia (el espacio absoluto de Newton) las fuerzas son las causas de las aceleraciones en la forma que estableció Newton. Respecto a un sistema inercial de referencia se tiene para una partícula de masa m

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{2.1}$$

o bien

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.2}$$

siendo $\vec{a}$ la aceleración, $\vec{F}$ la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, la cual se expresa en Newtons [N] y m la masa inercial de la partícula. La masa inercial es entonces alguna propiedad que distingue las partículas en cuanto a la dificultad que manifiestan ellas a ser aceleradas. Es necesario aclarar que conceptualmente existe otra propiedad que distingue a las partículas, consecuencia de su masa gravitacional m_g, esto es, la masa gravitacional da cuenta de la magnitud con que se atraen dos partículas por efecto de la fuerza gravitacional. De acuerdo a la ley de gravitación universal de Newton

$$F = G\frac{m_{1g}m_{2g}}{d^2}, \tag{2.3}$$

siendo aquí m_{1g} y m_{2g} las masas gravitacionales de las partículas. Si usted lee el libro recién recomendado de Greene (y muchos otros) se encontrará que, desde el punto de vista moderno, la fuerza gravitacional no es una fuerza. Sin embargo en este libro se desarrollará la teoría clásica de la Mecánica de Newton solamente.

2.1.5. Principio de equivalencia

De acuerdo a los experimentos de Galileo, todos los cuerpos en la vecindad de la tierra, despreciando el roce del aire, caen con la misma aceleración de magnitud

$$g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \tag{2.4}$$

Si se utiliza la segunda ley de Newton donde la fuerza es la fuerza gravitacional resulta

$$m_1 g = G\frac{m_{1g} m_{Tg}}{R^2},$$

es decir la masa inercial m_1 es proporcional a la masa gravitacional m_{1g}. En la última expresión R es el radio terrestre y m_{Tg} es la masa gravitacional terrestre. Si las unidades se eligen adecuadamente (iguales), entonces tenemos el principio de equivalencia

$$m = m_g.$$

2.1.6. Sobre las fuerzas

Las fuerzas, las que permiten acelerar los cuerpos, en general pueden clasificarse en dos tipos, fuerzas de acción a distancia y fuerzas de contacto.

Fuerzas de acción a distancia

Son ejercidas por los cuerpos a distancia. Son en general conocidas como campos de fuerza y de ellas son bien conocidas la fuerza gravitacional, la fuerza electrostática, la fuerza magnética y otras. En estos apuntes la más importante de ellas será la fuerza gravitacional que ejerce la tierra sobre los objetos cerca de su superficie, dirigida verticalmente hacia abajo y de magnitud

$$F = G\frac{m_1 m_T}{R^2} = m_1 g,$$

donde

$$g = G\frac{m_T}{R^2}, \tag{2.5}$$

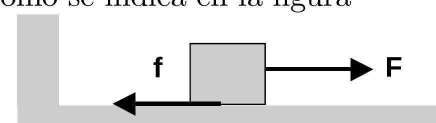
es la aceleración de gravedad.

Fuerzas de contacto

Son ejercidas recíprocamente cuando dos cuerpos se tocan. Si se descompone la fuerza de contacto en su parte paralela y en su parte normal a la superficie en contacto, esas componentes se denominan fuerza de roce f y fuerza normal N. También existen fuerzas que actúan sobre un cuerpo cuando éste se mueve en el interior de un fluido (líquidos o gases). Estas fuerzas se denominan fuerzas de roce viscosas y son funciones complicadas de la rapidez del cuerpo, de la forma del cuerpo y de propiedades de la superficie del cuerpo y del fluido.

La fuerza de roce estática

Cuando no hay movimiento relativo entre dos cuerpos que están en contacto, la fuerza de roce se denomina fuerza de roce estática. Considere un bloque en reposo sobre una superficie horizontal que es empujado por una fuerza horizontal F como se indica en la figura



Como el cuerpo tiene aceleración nula entonces

$$\begin{aligned} F - f &= 0, \\ N - mg &= 0, \end{aligned}$$

es decir la fuerza de roce f es igual a la fuerza aplicada F. Si se aumenta F aumenta la fuerza de roce de la misma manera. Pero eso tiene un límite. La fuerza de roce no puede crecer indefinidamente. Este límite tiene que ver con propiedades de las superficies en contacto y con el grado en que las superficies están apretadas entre sí. El modelo que utilizaremos es

$$f^{\text{máx}} = \mu_s N, \tag{2.6}$$

donde μ_s se denomina coeficiente de roce estático entre las superficies.

Fuerza de roce cinética

Si la fuerza aplicada supera al máximo valor de la fuerza de roce o si el cuerpo está en movimiento relativo, la fuerza de roce, llamada ahora fuerza de roce cinética, está dada por

$$f = \mu_k N, \tag{2.7}$$

donde μ_k se denomina coeficiente de roce cinético. Normalmente $\mu_k < \mu_s$ que pone de manifiesto que cuesta menos mantener el movimiento que iniciarlo.

2.1.7. Tercera ley de Newton

La tercera ley de Newton, suele enunciarse así: si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, entonces el segundo hace una fuerza de igual de magnitud y de sentido contrario sobre el primero y ambas fuerzas están sobre la misma línea de acción.

Esta ley se supone válida para fuerzas de contacto y para fuerzas de acción a distancia. Sin embargo, en el segundo caso, hay problemas. Difícilmente pueden las fuerzas de acción y reacción ajustarse en forma instantánea a nuevas posiciones de los cuerpos porque la información de uno al otro no puede propagarse con velocidad infinita. Eso sin embargo, es tema de otro curso.

2.1.8. Definiciones

Daremos de inmediato definiciones de otras propiedades físicas de los cuerpos que tienen que ver con su masa y con su velocidad. La utilidad de estas definiciones descansa en que hay relaciones o teoremas que las involucran y que pueden en consecuencia escribirse de manera más simplificada

			concepto	unidad
m	..	....	masa partícula.	kg
$\vec{r}$	..	....	vector posición partícula.	m
$\vec{v}$	$=$	$d\vec{r}/dt$..	velocidad partícula.	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
$\vec{a}_i$	$=$	$d\vec{v}_i/dt$	aceleración partícula.	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
$\vec{F}$	..	....	fuerza resultante actuando sobre la partícula.	N
$\vec{p}$	$=$	$m\vec{v}$	Momentum lineal de la partícula.	$\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$
K	$=$	$\frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética de la partícula.	J
$\vec{L}_0$	$=$	$m\vec{r}\times\vec{v}$	Momentum angular de la partícula respecto a O.	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$
$\vec{\Gamma}_O$	$=$	$\vec{r}\times\vec{F}$	Torque resultante respecto a O.	N m
V	..	....	Energía potencial.	J
E	$=$	$K+V$	Energía mecánica.	J
$W_{i\to f}$	$=$	$\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}$	Trabajo realizad por $\vec{F}$ desde i a f.	J

2.2. Teoremas

Pueden entonces demostrarse los siguientes teoremas que involucran las definiciones anteriores:

▶ Teorema 2.1
Variación del momentum lineal:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}. \tag{2.8}$$

Demostracion 1
Este teorema sigue inmediatamente de la segunda Ley de Newton que puede escribirse

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dm\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2.9}$$

si la masa es constante.

▶ Teorema 2.2
Variación del momentum angular

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt}=\vec{\Gamma}_O. \tag{2.10}$$

DEMOSTRACION 2
Si la segunda ley de Newton es multiplicada vectorialmente por $\vec{r}\times$ resulta

$$m\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}, \tag{2.11}$$

pero el lado izquierdo puede modificarse a

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r}\times\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}, \tag{2.12}$$

si la masa es constante, esto es

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt}=\vec{\Gamma}_O. \tag{2.13}$$

▶ TEOREMA 2.3
Teorema de conservación del momentum lineal. Si $F_x=0$ entonces

$$p_x = \text{constante.}$$

y similarmente para otras componentes.

DEMOSTRACION 3
Este teorema sigue directamente de

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt},$$

que si es proyectada en una dirección fija, OX por ejemplo da

$$\frac{dp_x}{dt}=F_x,$$

luego si $F_x=0$ se tiene

$$p_x = \text{constante.}$$

▶ TEOREMA 2.4
Teorema de conservación del momentum angular. Si $\vec{\Gamma}_O=\vec{0}$ entonces

$$\vec{l}_O = \text{ constante.}$$

DEMOSTRACION 4
Este teorema sigue directamente de

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O$$

de manera que si $\vec{\Gamma}_O = \vec{0}$ *entonces se tiene que*

$$\vec{l}_O = \text{ constante.}$$

▶ TEOREMA 2.5
Teorema de conservación de una componente del momentum angular. Si $\Gamma_{O_x} = 0$, *entonces*

$$l_{O_x} = \text{constante,}$$

y similarmente para otras componentes.

DEMOSTRACION 5
Este teorema sigue directamente de

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O,$$

que si es proyectada en una dirección fija, digamos OX *da*

$$\frac{dl_{O_x}}{dt} = \Gamma_{O_x},$$

de manera que si $\Gamma_{O_x} = 0$ *se obtiene*

$$l_{O_x} = \text{constante.}$$

2.2.1. Integración de la ecuación de movimiento

El propósito de la dinámica es: dadas las condiciones iniciales de un sistema y las fuerzas, determinar mediante la segunda ley de Newton las posición y velocidad futura del sistema. La segunda ley de Newton, también llamada ecuación de movimiento, determina la aceleración del sistema $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$. Luego hay un problema matemático. Conocida la fuerza resultante deberemos integrar la ecuación de movimiento y obtener la velocidad $\vec{v}(t)$ y posición $\vec{r}(t)$ si se conocen las condiciones iniciales del movimiento, es decir la velocidad y posición iniciales $\vec{v}(0)$ y $\vec{r}(0)$. Como veremos dependiendo de las fuerzas actuando, la integración de la ecuación de movimiento es más o menos simple.

Para el caso de la dinámica de *un* cuerpo la fuerza podría depender del tiempo, de su posición y de su velocidad, es decir la ecuación que resulta es

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}), \tag{2.14}$$

que en general no puede integrarse directamente porque el lado derecho, la fuerza, depende precisamente de la incógnita $\vec{r}(t)$ y de su derivada $\vec{v}(t)$. En el apéndice se profundiza más sobre diversos casos integrable y aquí nos limitamos a los principales. En el capítulo de sistemas de partículas se explican las dificultades adicionales que se presentan en el caso de la dinámica de varios cuerpos.

Como posiblemente los alumnos de este curso aún no dominan el tema de las integrales y menos el de las ecuaciones diferenciales, deje para más adelante la comprensión de todos los pasos intermedios, pero analice los resultados y sus aplicaciones.

Fuerza constante

De la segunda ley

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

es inmediato obtener por dos integraciones sucesivas

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \frac{\vec{F}}{m}t, \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{F}}{2m}t^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Estos resultados coinciden con lo establecido en la sección de cinemática para el caso en que la aceleración es constante.

Fuerza dependiente del tiempo $\vec{F}(t)$

Aquí se puede dejar expresado

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \frac{1}{m}\int_0^t \vec{F}(t')dt', \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{m}\int_0^t dt'' \int_0^{t''} \vec{F}(t')dt', \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde las integrales se podrán hacer cuando la fuerza sea dada en forma explícita.

Fuerza dependiente de la posición

En movimiento unidimensional. Si $\vec{F} = F(x)\hat{\imath}$ tenemos que

$$m\ddot{x} = F(x), \tag{2.17}$$

pero existe la identidad

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\dot{x}^2,$$

de modo que se tiene una ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\dot{x}^2 = \frac{1}{m}F(x),$$

de donde

$$\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(0) = \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)dx,$$

o bien

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)dx} = \frac{dx}{dt}, \tag{2.18}$$

y podemos finalmente separar variables en la forma

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)dx}},$$

e integrar por segunda vez

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x} F(x)dx}}. \tag{2.19}$$

El problema estaría resuelto si dada $F(x)$, la integral la realizamos y es posible de allí despejar $x(t)$. Tarea no necesariamente simple.

Lo anterior puede simplificarse o calcularse para casos específicos de fuerzas.

Por ejemplo la fuerza elástica

$$F(x) = -kx,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} t &= \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x} kxdx}} \\ &= \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{k}{m}(x^2 - x^2(0))}}. \end{aligned}$$

Sin perder demasiado podemos suponer que $x(0) = 0$ de modo que

$$\begin{aligned} t &= \int_{0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{k}{m}x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{m}{k}\dot{x}^2(0) - x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0)} \end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t. \tag{2.20}$$

Más detalles serán dados al estudiar más adelante el llamado movimiento armónico simple.

Para el último caso particular, existe un método alternativo más fácil. En efecto de

$$m\ddot{x} = -kx,$$

y si se define

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

tenemos que

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

y usted puede fácilmente comprobar que una solución general es de la forma

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi).$$

La evaluación de las constantes C y ϕ según sean las condiciones iniciales $x(0)$, $\dot{x}(0)$, se hará más adelante al estudiar el movimiento armónico simple.

Movimiento unidimensional con fuerza viscosa

Consideraremos el efecto que produce la presencia de una fuerza contraria y proporcional a la velocidad de la forma

$$F_x = -\beta m\dot{x}.$$

Este tipo de fuerza se manifiesta cuando un cuerpo se mueve en el interior de un fluido, líquido o gas.

La ecuación de movimiento será

$$m\ddot{x} = -\beta m\dot{x}, \tag{2.21}$$

o bien si llamamos $v = \dot{x}$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v,$$

de donde es trivial separar variables

$$\frac{dv}{v} = -\beta dt,$$

y se puede integrar

$$\begin{aligned} \ln\frac{v(t)}{v(0)} &= -\beta t, \\ v(t) &= v(0)e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

que puede integrarse por segunda vez

$$x(t) = x(0) + \frac{v(0)}{\beta}(1 - e^{-\beta t}). \tag{2.22}$$

Note que la velocidad tiende a cero y la posición alcanza un máximo

$$x_{\text{máx}} = x(0) + \frac{v(0)}{\beta}.$$

2.2.2. Dinámica del movimiento circular

Para el movimiento circular es conveniente expresar las ecuaciones de movimiento en coordenadas polares con origen en el centro de la circunferencia, de modo que se tiene en componentes polares

$$F_r = -m\frac{v^2}{R}, \tag{2.23}$$

$$F_\theta = mR\ddot{\theta}. \tag{2.24}$$

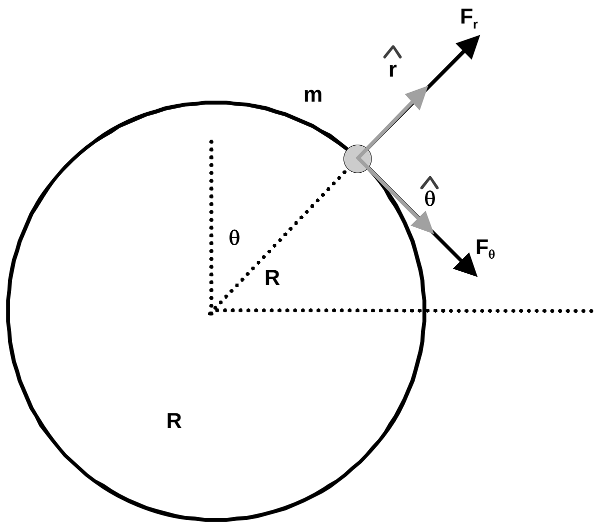
Existen diversas posibilidades para el tipo de movimiento circular, dependiendo de las fuerzas que actúen, cuestión que se plantea en los ejercicios. Si la fuerza es puramente radial, $F_\theta = 0$, de lo cual se deduce que el movimiento es circular uniforme, es decir $\dot{\theta}$ es constante.

2.3. Dinámica del movimiento circular

Cuando un cuerpo está restringido a moverse en una trayectoria circunferencial, es mejor utilizar coordenadas polares. Aquí el radio será constante y variará solamente la coordenada angular θ. En la figura se ilustran las componentes polares de la fuerza que actúa sobre la partícula F_r y F_θ. Recordando lo establecido en el capítulo de cinemática

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}, \tag{2.25}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}, \tag{2.26}$$



la segunda ley de Newton en componentes polares será

$$F_r = m(-R\dot{\theta}^2), \quad (2.27)$$

$$F_\theta = mR\ddot{\theta}. \quad (2.28)$$

Ejemplo 2.3.1 *Una partícula de masa m puede moverse por el interior de una superficie circular lisa de radio R cuyo plano está vertical. Inicialmente la partícula parte del punto más bajo con una rapidez inicial v_0. Analice las diversas posibilidades que tiene el movimiento de la partícula en función de la rapidez inicial.*

Solución. La figura ilustra las dos fuerzas que actúan sobre la partícula mientras ella permanezca en contacto con la superficie. Antes de plantear nada matemático usted debe darse cuenta de las posibilidades y luego que eso esté claro, proceder a un análisis más detallado. Es más o menos evidente que si la rapidez inicial es pequeña, la partícula efectuará oscilaciones. Si ella es más grande, la partícula puede perder el contacto pasado los noventa grados. Si es mayor aún, podrá dar vueltas completas. Las ecuaciones generales se reducen en este caso a

$$F_r = -N - mg\sin\theta = m(-R\dot{\theta}^2), \quad (2.29)$$

$$F_\theta = -mg\cos\theta = mR\ddot{\theta},. \quad (2.30)$$

la segunda ecuación puede integrarse porque es una identidad que

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\dot{\theta}^2,$$

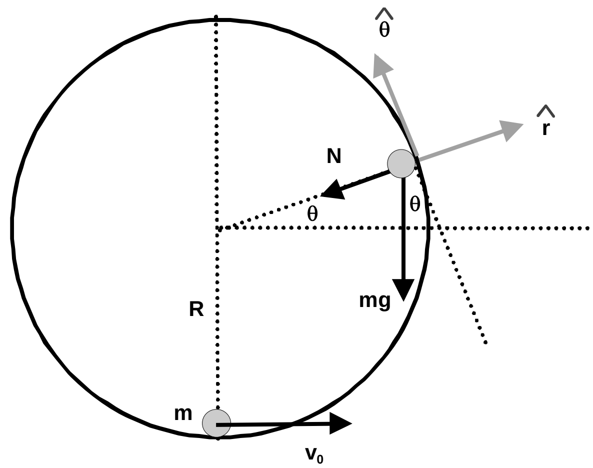


Figura 2.2:

obteniendo

$$\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin\theta) = R\dot{\theta}^2$$

De la primera, eliminando $\dot{\theta}^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} N &= -mg\sin\theta + m(\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin\theta)), \\ N &= \frac{mv_0^2}{R} - mg(3\sin\theta + 2). \end{aligned}$$

de la primera

$$N - mR\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta \tag{2.31}$$

- Vueltas completas. La partícula realizará vueltas completas si N permanece positiva para todo θ. Observando la expresión para N es caso más desfavorable ocurre si $\theta = \pi$, luego la condición será

  $$\frac{mv_0^2}{R} + mg(-3 - 2) \geqq 0,$$

  o sea

  $$v_0 \geqq \sqrt{5gR}.$$

- Oscilaciones. Para que esto ocurra la partícula debe detenerse antes que la normal se anule. Esto significa que $\dot{\theta} = 0$ antes que N se anule. Pero si $\theta > 0$ la ecuación (3.36) indica que

$$\begin{aligned} N - mR\dot{\theta}^2 &= -mg\sin\theta < 0, \\ N &< mR\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

o sea no puede anularse $\dot{\theta}$ primero. Luego pueden haber oscilaciones sólo si $\dot{\theta} = 0$ para $\theta < 0$, y eso requiere que

$$\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin\theta) = 0 \text{ para } \theta < 0,$$

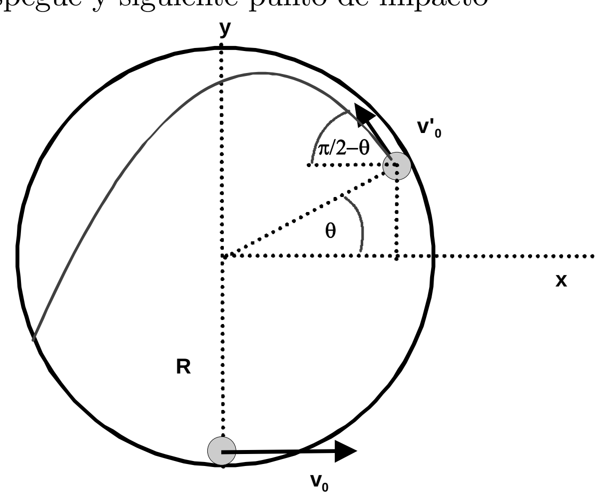
de donde

$$v_0 = \sqrt{2gR(1 + \sin\theta)} \leqslant \sqrt{2gR}.$$

- Despegues. Para que la partícula despegue, pierda el contacto, debe ser $N = 0$ con $0 < \theta < \pi/2$ luego

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{mv_0^2}{R} - mg(3\sin\theta + 2), \\ v_0 &= \sqrt{gR(2 + 3\sin\theta)}, \\ \sqrt{2gR} &< v_0 < \sqrt{5gR}. \end{aligned}$$

- Análisis del despegue y siguiente punto de impacto



Sea $\theta > 0$ el ángulo del despegue. De $N - mR\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta$ para $N = 0$ podemos evaluar

$$v_0' = R\dot{\theta} = \sqrt{gR\sin\theta},$$

y usando las ecuaciones de los proyectiles

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta - v_0' t\cos(\pi/2 - \theta), \\ y &= R\sin\theta + v_0' t\sin(\pi/2 - \theta) - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

reduciendo

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta - \sqrt{gR\sin\theta}\, t\sin\theta, \\ y &= R\sin\theta + \sqrt{gR}\sqrt{\sin\theta}\, t\cos\theta - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

calculemos

$$x^2 + y^2 = R^2 - g\sqrt{gR}\sqrt{\sin\theta}\, t^3\cos\theta + \frac{1}{4}g^2t^4$$

y para $x^2 + y^2 = R^2$ que caracteriza al punto de caída, se obtiene el tiempo

$$t = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt{\sin\theta}\cos\theta$$

y así evaluamos las coordenadas del punto de caída resultando después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} x &= R\cos 3\theta = R\cos(-3\theta), \\ y &= -R\sin 3\theta = R\sin(-3\theta). \end{aligned}$$

Esto es el punto de caída se produce en el ángulo -3θ.

2.3.1. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme

Una partícula con carga q al moverse en un campo magnético $\vec{B}$ experimenta la llamada fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Entonces, si esa es la única fuerza, la segunda ley de Newton conduce a

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{2.32}$$

Si el campo magnético es uniforme y constante en el tiempo, digamos

$$\vec{B} = B_0\hat{k},$$

entonces

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB_0}{m}\vec{v} \times \hat{k}, \tag{2.33}$$

que puede integrarse. En la dirección z no hay aceleración, luego

$$z(t) = z(0) + v_z(0)t.$$

En el plano x, y podemos escribir en componentes

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{qB_0}{m}\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{qB_0}{m}\dot{x}, \end{aligned}$$

de donde es evidente que

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0,$$

que implica

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \text{ es constante.}$$

Además si las integramos una vez tendremos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_0 + \frac{qB_0}{m}(y - y_0), \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 - \frac{qB_0}{m}(x - x_0), \end{aligned}$$

y obtenemos ecuaciones separadas para x, y, lineales no homogéneas

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{qB_0}{m}(\dot{y}_0 - \frac{qB_0}{m}(x - x_0)),\\ \ddot{y} &= -\frac{qB_0}{m}(\dot{x}_0 + \frac{qB_0}{m}(y - y_0)).\end{aligned}$$

Llamando

$$\omega = \frac{qB_0}{m},$$

las ecuaciones son

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x &= \omega\dot{y}_0 + \omega^2 x_0,\\ \ddot{y} + \omega^2 y &= -\omega\dot{x}_0 + \omega^2 y_0,\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} + A\cos\omega t + B\sin\omega t,\\ y &= y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} + C\cos\omega t + D\sin\omega t.\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\dot{y}_0}{\omega} + A,\\ 0 &= -\frac{\dot{x}_0}{\omega} + C,\\ \dot{x}_0 &= B\omega,\\ \dot{y}_0 &= D\omega.\end{aligned}$$

Luego y finalmente

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} - \frac{\dot{y}_0}{\omega}\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t,\\ y &= y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\cos\omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t.\end{aligned}$$

Es inmediato posible verificar que

$$(x - x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega})^2 + (y - y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega})^2 = (\frac{\dot{y}_0}{\omega})^2 + (\frac{\dot{x}_0}{\omega})^2,$$

o sea que en su proyección en el plano xy la trayectoria es una circunferencia con centro en las coordenadas

$$\begin{aligned} x_C &= x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \\ y_C &= y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega}, \end{aligned}$$

y de radio

$$R = \sqrt{(\frac{\dot{y}_0}{\omega})^2 + (\frac{\dot{x}_0}{\omega})^2}.$$

2.3.2. Solución alternativa para la velocidad

La ecuación 2.33 puede derivarse sucesivamente limitándonos al movimiento en el plano xy obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \omega \vec{v} \times \hat{k}, \\ \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} &= \omega(\omega \vec{v} \times \hat{k}) \times \hat{k} = -\omega^2 \vec{v} \\ \frac{d^3\vec{v}}{dt^3} &= -\omega^2 \omega \vec{v} \times \hat{k} = -\omega^3 \vec{v} \times \hat{k} \\ \frac{d^4\vec{v}}{dt^4} &= -\omega^3(\omega \vec{v} \times \hat{k}) \times \hat{k} = \omega^4 \vec{v}, \\ & \cdots \end{aligned}$$

Ahora hacemos una expansión de Taylor

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{t}{1!}\left(\omega \vec{v}_0 \times \hat{k}\right) + \frac{t^2}{2!}\left(-\omega^2 \vec{v}_0\right) + \frac{t^3}{3!}\left(-\omega^3 \vec{v}_0 \times \hat{k}\right) + \frac{t^4}{4!}\left(\omega^4 \vec{v}_0\right) + \cdots$$

que equivale a

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \cos \omega t + \vec{v}_0 \times \hat{k} \sin \omega t,$$

que se puede integrar respecto al tiempo obteniendo para el plano xy

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\vec{v}_0 \times \hat{k}}{\omega}(1 - \cos \omega t).$$

2.4. Ejemplos

2.4.1. Fuerzas constantes o dependientes del tiempo

Ejemplo 2.4.1 *Un cuerpo de masa* $10\,\mathrm{kg}$*, se encuentra sobre una superficie horizontal áspera, de coeficiente de fricción estático y cinético* $\mu_s = 0{,}2$ *y* $\mu_k = 0{,}1$*, respectivamente. Si sobre el cuerpo se aplica una fuerza horizontal de magnitud* $60\,\mathrm{N}$ *que actúa sólo durante* $10\,\mathrm{s}$*, determine la posición y velocidad en tiempo* t*.*

Solución. La fuerza de roce estática máxima es

$$f_s^{\text{máx}} = \mu_s N = \mu_s mg = 0{,}2 \times 10 \times 9{,}8 = 19.\,6\,\mathrm{N},$$

luego el bloque acelera. Hay que hacer el análisis por tramos.

- $0 < t \leqq 10$

$$\begin{aligned} ma &= F - \mu_k mg, \\ a &= \frac{60 - 0{,}2 \times 10 \times 9{,}8}{10} = 4.\,04\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \end{aligned}$$

  Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}at^2 = 2{,}02t^2, \\ v(t) &= 4{,}04t. \end{aligned}$$

- $10 < t \leqq t_{\text{máx}}$. El tiempo máximo es cuando el bloque se detiene y se sabrá luego. Ahora

$$\begin{aligned} ma &= -\mu_k mg, \\ a &= -\frac{0{,}2 \times 10 \times 9{,}8}{10} = -1.\,96\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \end{aligned}$$

  La posición y velocidades iniciales son las finales del primer intervalo

$$\begin{aligned} x(10) &= 2{,}02 \times (10)^2 = 202\,\mathrm{m}, \\ v(10) &= 4{,}04 \times 10 = 40{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(10) + a(t-10) = 40{,}4 - 1.\,96(t-10) = 60{,}0 - 1.\,96t \,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\
x(t) &= x(10) + v(10)(t-10) + \frac{1}{2}a(t-10)^2 \\
&= 202 + 40{,}4 \times (t-10) - \frac{1}{2}1.\,96(t-10)^2 \\
&= -300{,}0 + 60{,}0t - 0{,}98t^2.
\end{aligned}$$

El instante en que la velocidad es nula da

$$t_{\text{máx}} = \frac{60{,}0}{1.\,96} = 30.\,61\,\mathrm{s}.$$

Ejemplo 2.4.2 *Sobre un bloque de masa m que se encuentra sobre un plano horizontal liso e inicialmente en reposo actúa una fuerza constante F durante un tiempo T, luego la fuerza se invierte y actúa otro intervalo de tiempo T, luego la fuerza no se aplica más. Determine la posición y velocidad en todo tiempo.*

Solución. En los diferentes intervalos de tiempo la segunda ley nos dice que

$$a = \pm\frac{F}{m}.$$

Integramos por tramos considerando que las posiciones y velocidades finales son las iniciales del siguiente tramo.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2, \quad 0 < t \leqslant T, \\
v(t) &= \frac{F}{m}t, \quad 0 < t \leqslant T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(T) + v(T)(t-T) - \frac{1}{2}\frac{F}{m}(t-T)^2, \quad T < t \leqslant 2T, \\
v(t) &= v(T) - \frac{F}{m}(t-T), \quad T < t \leqslant 2T,
\end{aligned}$$

ahora la aceleración es nula

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(2T), \quad 2T < t, \\
x(t) &= x(2T) + v(2T)(t-2T), \quad 2T < t.
\end{aligned}$$

Procediendo a los reemplazos resulta

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}\frac{F}{m}(4Tt - t^2 - 2T^2), \quad T < t \leqslant 2T, \\
v(t) &= F\frac{2T - t}{m}, \quad T < t \leqslant 2T,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v(2T) = 0, \quad 2T < t, \\
x(t) &= x_2(2T) = \frac{F}{m}T^2, \quad 2T < t.
\end{aligned}
$$

▲

Ejemplo 2.4.3 *Sobre un bloque de masa m que se encuentra sobre un plano horizontal liso e inicialmente en reposo actúa una fuerza $F = F_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$. Determine la posición y velocidad en todo tiempo.*

Solución. Este ejemplo tiene un parecido con el ejemplo anterior en el sentido que a fuerza va cambiando de signo periódicamente, pero es más fácil. En efecto basta integrar dos veces

$$
m\frac{dv}{dt} = F_0 \cos \frac{2\pi t}{T},
$$

luego

$$
v(t) = \frac{F_0}{m}\int_0^t \cos \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{F_0}{m}\frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T},
$$

integramos de nuevo

$$
x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m}\frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{F_0}{m}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 (1 - \cos \frac{2\pi t}{T}).
$$

▲

2.4.2. Fuerzas dependientes de la posición o de la velocidad

En estos casos la segunda ley será de la forma

$$
m\frac{dv}{dt} = F(v),
$$

y la técnica que permite integrar se denomina separación de variables. Basta reordenar la ecuación en la forma

$$m\frac{dv}{F(v)} = dt,$$

y es inmediato poder integrar una vez

$$m\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{F(v)} = \int_0^t dt = t.$$

Si $F(v)$ no es demasiado compleja quizás usted pueda hacer la integral. Después deberá despejar $v(t)$ e integrar por segunda vez.

Alternativa: Si se multiplica la segunda ley por dx resulta

$$mdx\frac{dv}{dt} = dxF(v),$$

reordenando

$$mv\frac{dv}{F(v)} = dx,$$

que se puede integrar para obtener la relación entre velocidad y posición

$$m\int_{v_0}^{v(x)} v\frac{dv}{F(v)} = \int_0^x dx = x.$$

Ejemplo 2.4.4 *Una partícula de masa m, se lanza con rapidez inicial v_0 sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad k. Calcule la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo.*

Solución. La segunda ley será

$$m\frac{dv}{dt} = -kv,$$

separando variables

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt,$$

integrando

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{k}{m}dt,$$

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = -\frac{k}{m}t,$$

despejando $v(t)$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

que muestra que la partícula se detiene en $t \to \infty$. Integramos por segunda vez

$$x(t) = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}),$$

que muestra que la partícula recorre una distancia máxima

$$x_{\text{máx}} = \frac{mv_0}{k},$$

a pesar que no se detiene nunca.

Alternativa:

En este caso podemos también escribir

$$mdx\frac{dv}{dt} = -kvdx,$$

luego

$$\begin{aligned} mvdv &= -kvdx, \\ dv &= -\frac{k}{m}dx, \end{aligned}$$

que es integrable

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = -\frac{k}{m}\int_0^x dx,$$

luego

$$v(t) = v_0 - \frac{kx}{m},$$

que indica como varía la velocidad de la partícula con su posición hasta que se detenga.

Ejemplo 2.4.5 *Una partícula de masa m, se lanza con rapidez inicial v_0 sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional al cuadrado de la rapidez con constante de proporcionalidad k. Calcule la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo.*

Solución. Ahora

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2,$$

separando variables

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt,$$

integrando

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t \frac{k}{m}dt,$$

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v_0} = -\frac{kt}{m},$$

despejando $v(t)$

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{ktv_0}{m}},$$

que muestra que la partícula se detiene en $t \to \infty$. Integramos por segunda vez

$$x(t) = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{ktv_0}{m}}dt = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{ktv_0}{m}\right),$$

ahora la partícula recorre una distancia infinita.

Alternativa:multiplique por dx la segunda ley

$$mdx\frac{dv}{dt} = -kv^2dx,$$

reordenando

$$mvdv = -kv^2dx,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dx,$$

integrando

$$\ln\frac{v(t)}{v_0} = -\frac{kx}{m},$$

o sea la relación entre velocidad y posición es

$$v(t) = v_0e^{-\frac{kx}{m}}.$$

▲

EJEMPLO 2.4.6 *Una partícula de masa m está sometida a una fuerza elástica $-kx$, e inicia su movimiento con rapidez inicial v_0 y $x = 0$ sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional al cuadrado de la rapidez con constante de proporcionalidad β. Calcule la velocidad de la partícula en función de la posición mientras avanza hacia la derecha.*

Solución. Ahora

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \mp \beta v^2,$$

donde el signo menos aplica cuando la partícula se mueve hacia la derecha y el más cuando se mueve hacia la izquierda. Ahora no es trivial separar variables. Pero existe la identidad

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dx}\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx},$$

lo cual permite dejar dos variables, v y x

$$m\frac{dv}{dt} = -kx - \beta v^2,$$

o

$$mvdv \pm \beta v^2 dx = -kxdx.$$

Veamos si al multiplicar ambos miembros por alguna función $g(x)$ que hay que determinar para que el lado izquierdo sea la diferencial de alguna función de x y v. (El llamado factor integrante)

$$mvg(x)dv + \beta v^2 g(x)dx = -g(x)kxdx.$$

Como se explicó, vea (**??**) debe ser

$$\frac{\partial}{\partial x}mvg(x) = \frac{\partial}{\partial v}\beta v^2 g(x),$$

o sea

$$m\frac{\partial}{\partial x}g(x) = 2\beta g(x),$$

de donde

$$g(x) = e^{\frac{2\beta x}{m}},$$

luego

$$\begin{aligned} mvdve^{\frac{2\beta x}{m}} + \beta v^2 dxe^{\frac{2\beta x}{m}} &= -kxdxe^{\frac{2\beta x}{m}}, \\ d(\frac{1}{2}mv^2e^{\frac{2\beta x}{m}}) &= -kxdxe^{\frac{2\beta x}{m}}, \end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2e^{\frac{2\beta x}{m}} &= -\frac{1}{2}kx^2e^{2\beta\frac{x}{m}} + C, \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= Ce^{-\frac{2\beta x}{m}}, \end{aligned}$$

en $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= C, \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2e^{\mp\frac{2\beta x}{m}} \end{aligned}$$

finalmente

$$v = \sqrt{v_0^2e^{-\frac{2\beta x}{m}} - \frac{k}{m}x^2}.$$

▲

2.5. Sistema de Partículas

Estudiaremos ahora la llamada dinámica de un sistema de partículas, se tiene in conjunto de partículas de masas conocidas actuadas por fuerzas de origen externo al sistema y fuerzas de interacción, es decir las que realizan las otras sobre una determinada.

2.5.1. Ecuaciones de movimiento

Se presentan las principales definiciones y relaciones cinemáticas así como las ecuaciones clásicas de movimiento para un sistema de partículas puntuales suponiendo interacciones que cumplan el principio de acción y reacción. Las definiciones de cantidades Físicas cinemáticas, que involucran las masas, las posiciones, las velocidades, tales como la energía cinética, momentum lineal, momentum angular, son naturalmente relativas al sistema de referencia que se escoja. Entre esos diversos sistemas de referencia, las relaciones que existan entre esas cantidades físicas, se desprenderán de las transformaciones de Galileo para sistemas, vea figura (**??**), que se trasladan unos respecto de otros con velocidad constante $\vec{v}$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t.$$

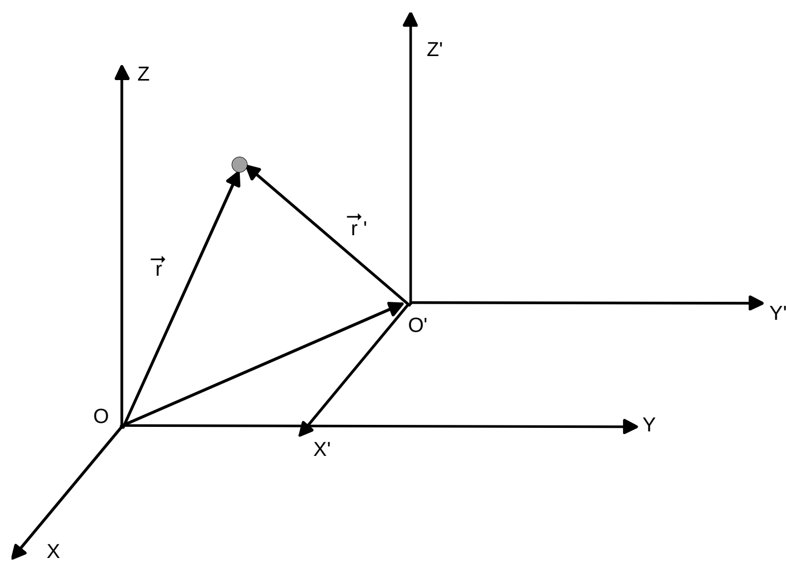


Figura 2.3: Transformación de Galileo

Más en general para sistemas de referencia arbitrarios, admitiendo aceleraciones y rotaciones de ellos respecto a uno supuesto fijo, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de partículas son más complicadas. Podemos adelantar que las relaciones entre velocidades y aceleraciones son (5.2,5.3)

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}\,^{rel},$$
$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \vec{a}\,^{rel},$$

siendo $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$. Debe notarse que la velocidad y aceleración relativas son las derivadas de los vectores posición y velocidad relativos manteniendo fijas las direcciones de los ejes móviles, lo cual en algunos textos se indica por

$$\vec{v}\,^{rel} = \frac{\partial \vec{r}\,'}{\partial t}, \qquad \vec{a}\,^{rel} = \frac{\partial \vec{v}\,^{rel}}{\partial t}.$$

2.5.2. Sistema Inercial de referencia

En la formulación de la dinámica clásica, se supone la existencia de al menos un sistema privilegiado de referencia, un *Sistema inercial de referencia*. Por definición, un *sistema inercial de referencia* es aquel (hipotético) sistema relativo al cual una partícula libre tiene velocidad constante o en particular nula (vea página 5 de referencia [?]) . Como consecuencia de la transformación de Galileo, todo sistema que se traslade con velocidad constante respecto a uno inercial de referencia, es también sistema inercial de referencia. La existencia de uno por lo menos, sería materia de validación experimental, con las obvias dificultades que ello presenta. Se acepta que al menos aproximadamente, el marco de las estrellas fijas, lo es. Esta es una materia hoy en día de acuerdo internacional. En efecto en Agosto de 1997, la Unión Astronómica Internacional (IAU) decidió que a partir del primero de Enero de 1998, el IAU sistema de referencia celestial sea el sistema (ICRS), en reemplazo del sistema FK5. Hay abundantes referencias en la WEB, por ejemplo en http://hpiers.obspm.fr/webiers/general/syframes/icrsf/ICRS.html.

Definiciones y notación

Respecto a un determinado sistema de referencia, ver fig.(2.4) (no necesariamente inercial), sean

i		índice	$i = 1, 2, 3 \cdots N$
N		entero	número de partículas del sistema.
m_i	..	....	masa partícula i.
$\vec{r}_i$	..	....	vector posición partícula i.
$\vec{v}_i$	$=$	$d\vec{r}_i/dt$	velocidad partícula i.
$\vec{a}_i$	$=$	$d\vec{v}_i/dt$	aceleración partícula i.
$\vec{F}_i$	..	....	fuerza externa actuando sobre partícula i.
$\vec{f}_{ij}$	..	....	fuerza que partícula j ejerce sobre partícula i.
$\vec{P}$	$=$	$\sum_i m_i\vec{v}_i$	Momentum lineal del sistema.
K	$=$	$\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$	Energía cinética del sistema.
$\vec{L}_0$	$=$	$\sum_i m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i$	Momentum angular del sistema respecto a O.
$\vec{F}^{ext}$	$=$	$\sum_i \vec{F}_i$	Fuerza externa resultante.
$\vec{\Gamma}_O^{ext}$	$=$	$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$	Torque resultante externo respecto a O.
M	$=$	$\sum_i m_i$	masa total sistema.
$\vec{r}_G$	$=$	$\sum_i m_i\vec{r}_i/M$	posición del centro de masa.

En este resumen no se pretende discutir los fundamentos de la formulación Newtoniana, cuya mayor dificultad radica en las definiciones (independientes) de *Fuerza, masa y aceleración*, así como en los conceptos de espacio y tiempo, que supondremos materias conocidas.

2.5.3. Ecuaciones de movimiento

Con respecto a un sistema inercial de referencia, cada una de las N partículas cumple con la llamada segunda ley de *Newton*

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}. \tag{2.34}$$

$\vec{F}_i^{ext}$ representa la fuerza externa actuando sobre la partícula i. Si las fuerzas de interacción $\vec{f}_{ij}$ satisfacen la llamada ley de acción y reacción, es decir

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0, \qquad \text{y} \qquad \vec{f}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0,$$

puede demostrarse a partir de las N ecuaciones de movimiento, los siguientes importantes teoremas

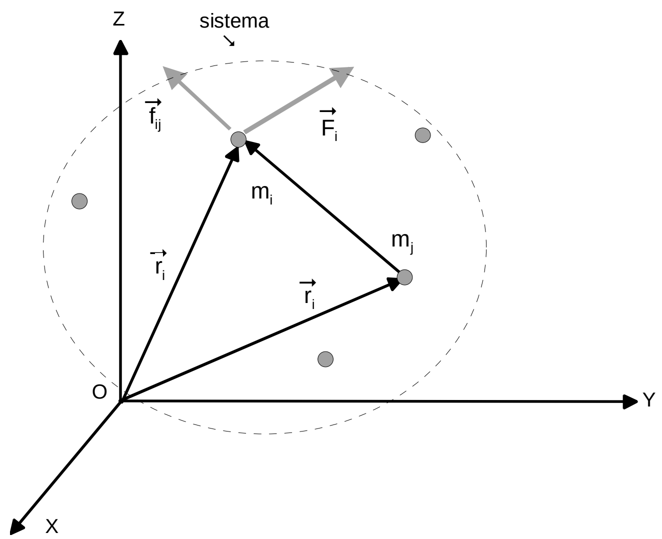


Figura 2.4: Sistema de partículas

▶ TEOREMA 2.6

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}, \tag{2.35}$$

DEMOSTRACION 6
Si sumamos todas las ecuaciones (2.34) obtendremos

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij},$$

pero debido a la ley de acción y reacción, la suma doble se anula, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i &= \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}^{ext}, \\ \frac{d\vec{P}}{dt} &= \vec{F}^{ext}. \end{aligned}$$

▶ TEOREMA 2.7

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}.$$

DEMOSTRACION 7
Este teorema sigue del anterior al considerar que

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i \\ &= M\frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M} = M\vec{v}_G.\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \tag{2.36}$$

DEMOSTRACION 8
Basta considerar que

$$\sum_{j\neq i}\sum \vec{r_i}\times\vec{f_{ij}} = \sum_{j\neq i}\sum \vec{r_j}\times\vec{f_{ji}} = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\sum(\vec{r_i}-\vec{r_j})\times\vec{f_{ij}} = 0,$$

luego tendremos

$$\begin{aligned}\sum_i m_i\vec{r_i}\times\vec{a_i} &= \sum_i \vec{r_i}\times\vec{F_i} + \sum_i\sum_{j\neq i}\vec{r_i}\times\vec{f_{ij}}, \\ \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{r_i}\times\vec{v_i} &= \sum_i \vec{r_i}\times\vec{F_i},\end{aligned}$$

que prueba el teorema.

Las ecuaciones (2.35) y (2.36) son, en general, insuficientes para determinar las posiciones de las partículas siendo la excepción más notable un sistema rígido de partículas, que tiene justamente 6 grados de libertad, o en otras palabras, que su posición puede especificarse con solo 6 coordenadas o parámetros. La segunda de las ecuaciones anteriores, toma la misma forma en un sistema especial, no necesariamente inercial, con origen en el centro de masas G y tal que sus ejes no roten. Es decir, puede probarse que

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext}. \tag{2.37}$$

Entre el sistema inercial y ese otro mencionado con origen en G, pueden demostrarse las siguientes relaciones (relaciones de Koenig), consecuencias simples de la transformación de *Galileo*

▶ TEOREMA 2.8
De Koenig

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + \vec{L}_G \\ K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + K_G\end{aligned}$$

siendo K_G y $\vec{L}_G$ la energía cinética y momentum angular relativos al sistema con origen en G.

DEMOSTRACION 9
En efecto, si usamos la transformación de Galileo, podemos escribir (si los ejes móviles no rotan)

$$\begin{aligned}\vec{r}_i{}' &= \vec{r}_i - \vec{r}_G, \\ \vec{v}\,'_i &= \vec{v}_i - \vec{v}_G,\end{aligned}$$

de modo que resultará

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum m_i(\vec{r}_i{}' + \vec{r}_G) \times (\vec{v}_i{}' + \vec{v}_G) \\ &= \sum m_i(\ \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}' + \vec{r}_G \times \vec{v}_i{}' + \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_G + \vec{r}_G \times \vec{v}_G),\end{aligned}$$

pero

$$\sum m_i \vec{r}_i{}' = 0, \qquad \sum m_i \vec{v}_i{}' = 0,$$

de donde sigue el primer resultado. Similarmente

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i{}' + \vec{v}_G) \cdot (\vec{v}_i{}' + \vec{v}_G) \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_i{}' \cdot \vec{v}_i{}' + \vec{v}_G \cdot \vec{v}_i{}' + \vec{v}_G \cdot \vec{v}_i{}' + \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G),\end{aligned}$$

de donde sigue el segundo resultado.

2.5.4. Torque en punto arbitrario

En general, si se considera otro sistema con origen en un punto A, cuyos ejes no roten, definimos

$$\vec{L}_A = \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_A)$$

entonces considere el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \\
&= \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) \\
&= \sum m_i\vec{r}_i \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) - \sum m_i\vec{r}_A \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) \\
&= \frac{d\vec{L}_0}{dt} - M\vec{r}_G \times \vec{a}_A - \vec{r}_A \times \sum \vec{F}_i^{ext} + M\vec{r}_A \times \vec{a}_A \\
&= \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i^{ext} + M(\vec{r}_A - \vec{r}_G) \times \vec{a}_A.
\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\overrightarrow{AG} \times \vec{a}_A, \tag{2.38}$$

de modo que, la relación entre derivada del momentum angular y torque, es válida para puntos (A) que cumplan una de las siguientes condiciones:

$$A = G, \qquad \vec{a}_A = 0, \qquad \vec{a}_A \text{ paralela a } \overrightarrow{AG}.$$

Usted puede demostrar que además se tiene en general.

$$\vec{L}_O = M\vec{r}_A \times \vec{v}_G + M\overrightarrow{AG} \times \vec{v}_A + \vec{L}_A.$$

Aplicaciones de la ecuación (2.38) pueden verse en ([**?**]).

EJERCICIO 2.5.1 *Discuta la posible aplicación del tercer caso ($\vec{a}$ paralela a $\overrightarrow{AG}$), cuando se trata de un cuerpo rígido que rueda sin deslizar, considerando el punto A como el punto de contacto. Es un error común considerar como argumento para el uso de lo anterior que dicho punto tiene velocidad instantánea cero, pues en general tiene aceleración no nula.*

2.5.5. Teorema Energía Trabajo

De las ecuaciones de movimiento es posible escribir una primera integral de ellas en la forma que sigue, donde, sin perder generalidad, se separan las fuerzas externas en sus posibles partes conservativa y no conservativa. Además se supone que las fuerzas de interacción son derivables de un potencial de interacción dependiente de la distancia entre las dos partículas y posiblemente de parámetros propios de ellas dos (masas, cargas, etc.). En el caso de un sistema rígido de partículas, la última suposición no es necesaria, por cuanto el trabajo que realizan las fuerzas de interacción es nulo, al mantenerse constantes las distancias entre partículas. Este teorema es

$$\Delta(K + V + V^{int}) = W^{nc}_{1\to2}, \tag{2.39}$$

donde el trabajo no conservativo (nc) externo (ext) es la integral de línea

$$W^{nc}_{1\to2} = \int_1^2 \vec{F}^{ext,nc} \cdot d\vec{r}, \tag{2.40}$$

V es la energía potencial asociada a la posible parte conservativa de la fuerza externa y V^{int} la energía potencial de interacción. Si el lado derecho, el trabajo realizado por la posible parte no conservativa de la fuerza exterior es cero, entonces se conserva la energía mecánica total del sistema. En el caso importante de un sistema rígido de partículas, al no variar las distancias entre las partículas, puede tomarse $V^{int} = 0$.

Demostración

Para demostrar lo anterior consideremos que la fuerza externa $\vec{F}_i$ es en parte conservativa derivable de un potencial $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N)$ y las fuerzas de interacción $\vec{f}_{ij}$ conservativas derivables de un potencial de interacción $V^{int}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$. Entonces las ecuaciones de movimiento puede escribirse

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = -\nabla_i V + \vec{F}^{nc}_i + \sum_{j\neq i}(-\nabla_i V^{int}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)).$$

Multiplicando $\cdot\, d\vec{r}_i$ y sumando todas las ecuaciones se obtiene

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = -\sum_i \nabla_i V \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}^{nc}_i \cdot d\vec{r}_i - \sum_{j\neq i}\sum \nabla_i V^{int}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \cdot d\vec{r}_i,$$

pero

$$\begin{aligned} dV &= \sum_i \nabla_i V \cdot d\vec{r}_i, \\ m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i &= \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt} v_i^2, \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\sum V_{ij}^{int}(\vec{r}_i,\vec{r}_j)\right) &= \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\sum \nabla_i V_{ij}^{int}(\vec{r}_i,\vec{r}_j)\cdot d\vec{r}_i + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\sum \nabla_j V_{ij}^{int}(\vec{r}_i,\vec{r}_j)\cdot d\vec{r}_j \\
&= \sum_{j\neq i}\sum \nabla_i V_{ij}^{int}(\vec{r}_i,\vec{r}_j)\cdot d\vec{r}_i,
\end{aligned}
$$

dado que $V_{ij}^{int}(\vec{r}_i,\vec{r}_j) = V_{ji}^{int}(\vec{r}_j,\vec{r}_i)$. Luego tenemos

$$
d\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = -dV + \sum_i \vec{F}_i^{nc}\cdot d\vec{r}_i - dV^{int},
$$

donde

$$
V^{int} = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\sum V_{ij}^{int}(\vec{r}_i,\vec{r}_j),
$$

y esto prueba el teorema en su forma diferencial

$$
dK + dV + dV^{int} = \sum_i \vec{F}_i^{nc}\cdot d\vec{r}_i = dW^{nc}.
$$

2.5.6. Sistema de dos partículas

El problema definido por el conjunto de ecuaciones (2.34), es en general no solucionable analíticamente, si $N \geq 3$. La principal dificultad consiste en la imposibilidad de separar variables. El sistema de dos partículas interactuando a través de una fuerza conservativa es un caso soluble de sistemas de partículas. Tomando en cuenta la validez del principio de acción y reacción, las dos ecuaciones para ese caso son

$$
\begin{aligned}
m_1\vec{a}_1 &= \vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
m_2\vec{a}_2 &= -\vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).
\end{aligned}
$$

Esas ecuaciones son fácilmente desacoplables utilizando como nuevas variables las posición del centro de masa $\vec{r}_G$ y la posición relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ resultando

$$
\begin{aligned}
M\vec{a}_G &= 0, \\
\mu\vec{a} &= \vec{f}(\vec{r}), \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

siendo μ la masa reducida del sistema de dos partículas, es decir

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2.42}$$

Entonces, el problema se ha reducido a resolver el problema de una partícula de masa reducida μ en presencia de una fuerza central, con centro de fuerza en una de las partículas. Este resultado es sorprendentemente simple considerando que el origen (la posición de una de las partículas) está acelerado.

EJEMPLO 2.5.1 *Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que están unidas por una cuerda inextensible liviana de longitud L y no hay otra fuerza más que la tensión de la cuerda. Las partículas se colocan en movimiento con velocidades en el mismo sentidos y perpendiculares a la cuerda de magnitudes v_1 y v_2. Determine la tensión de la cuerda.*

Solución. De acuerdo a lo explicado

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= -T\frac{(\vec{r_1} - \vec{r_2})}{|(\vec{r_1} - \vec{r_2})|}, \\ m_2\vec{a}_2 &= T\frac{(\vec{r_1} - \vec{r_2})}{|(\vec{r_1} - \vec{r_2})|}, \end{aligned}$$

de donde para $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, se obtiene

$$\mu\vec{a} = -T\hat{r},$$

o sea la aceleración relativa es radial dada por

$$a = -\frac{T}{\mu}.$$

La trayectoria relativa es obviamente una circunferencia de radio L de manera que

$$\frac{T}{\mu} = \frac{v^2}{L},$$

la rapidez relativa es tangencial de magnitud $v = |v_1 - v_2|$ por lo tanto

$$T = \frac{\mu\,|v_1 - v_2|^2}{L}.$$

▲

Energía cinética

Las posiciones individuales de las dos partículas pueden escribirse

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_G + \frac{m_2}{M}\vec{r},$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_G - \frac{m_1}{M}\vec{r},$$

y si derivamos respecto al tiempo, obtenemos las velocidades de las partículas

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \frac{m_2}{M}\vec{v},$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_G - \frac{m_1}{M}\vec{v},$$

por lo cual la energía cinética será

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1\left(v_G^2 + 2\frac{m_2}{M}\vec{v}_G\cdot\vec{v} + \left(\frac{m_2}{M}v\right)^2\right) + \\
&\quad \frac{1}{2}m_2\left(v_G^2 - 2\frac{m_1}{M}\vec{v}_G\cdot\vec{v} + \left(\frac{m_1}{M}v\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\left(m_1\left(\frac{m_2}{M}v\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{M}v\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M}\left(\frac{m_2}{M}v^2 + \frac{m_1}{M}v^2\right),
\end{aligned}$$

que prueba el importante resultado.

$$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\mu v^2. \tag{2.43}$$

EJEMPLO 2.5.2 *Suponga un asteroide esférico de* 10 km *de diámetro que tiene una rapidez de* 60 $\mathrm{km\,s^{-1}}$*, con una densidad (como el agua) de* 1000 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$*. Determine la energía que debería liberar una explosión interna para dividir al asteroide en dos trozos iguales, cada uno formando un ángulo de cinco grados respecto a la dirección de la velocidad original.*

Solución. La cantidad de movimiento en la dirección inicial se conserva, luego

$$mv_0 = 2 \times \frac{m}{2}v' \cos\theta,$$

de donde

$$v' = \frac{v_0}{\cos\theta}.$$

La energía necesaria será

$$\begin{aligned} E &= K' - K = \\ &= \frac{1}{2}m(v')^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \tan^2\theta. \end{aligned}$$

Cálculos dan

$$\begin{aligned} v_0 &= 60\frac{1000}{3600} = 60.28\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\ m &= \frac{4}{3}\pi R^3\rho = 5.24\times 10^{14}\,\mathrm{kg}, \\ E &= 7.287\times 10^{15}\,\mathrm{J}, \\ &= 1{,}7 \text{ megatones}. \end{aligned}$$

▲

EJEMPLO 2.5.3 *En otra suposición considere un asteroide esférico de* $2000\,\mathrm{km}$ *de radio que tiene una rapidez de* $70000\ \mathrm{km\,h^{-1}}$*, con una densidad de* $5000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$*. Determine la energía que debería liberar una explosión interna para dividir al asteroide en dos trozos iguales, cada uno formando un ángulo de cinco grados respecto a la dirección de la velocidad original.*

Solución. La cantidad de movimiento en la dirección inicial se conserva, luego

$$mv_0 = 2\times\frac{m}{2}v'\cos\theta,$$

de donde

$$v' = \frac{v_0}{\cos\theta}.$$

La energía necesaria será

$$\begin{aligned} E &= K' - K = \\ &= \frac{1}{2}m(v')^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \tan^2\theta. \end{aligned}$$

Cálculos dan

$$\begin{aligned} v_0 &= 70000\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 70000\frac{1000}{3600} = 70000.\,3\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\ m &= \frac{4}{3}\pi R^3\rho = 1.\,7\times 10^{23}\,\mathrm{kg}, \\ E &= 3.\,2\times 10^{30}\,\mathrm{J}, \\ &= 7.\,6\times 10^{14} \text{ megatones.} \end{aligned}$$

NOTA 2.1 Hace aproximadamente 65 millones de años atrás un asteroide de alrededor de $R = 20\,\mathrm{km}$ de radio y una velocidad del orden $v = 20\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ impactó la Tierra y causó el fin de la mayor parte de la vida en la Tierra. Si suponemos una densidad del orden de $\rho = 5000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ (5 veces la del agua) su energía cinética sería

$$K = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi R^3\rho)v^2 = 33.\,52\times 10^{24}\,\mathrm{J},$$

y como 1 megaton = $4{,}2\times 10^{15}$ J esa energía equivale aproximadamente a

$$K = 8\times 10^9 \text{ megatones,}$$

quizás la explosión de todo el arsenal nuclear actual. La bomba atómica de Hiroshima fue del orden de $\frac{1}{60}$ megaton. Vea más detalles sobre las consecuencias del impacto en http://www.eas.purdue.edu/eas109/ Day %20the %20 Dinosaurs %20Died.htm.

2.6. Campo Central de Fuerza

Consideraremos una partícula de masa μ sobre la cual actúa una fuerza central conservativa cuya dirección es paralela al vector posición $\vec{r}$. Más adelante, al estudiar scattering entre dos partículas consideraremos más en detalle la presencia de los dos cuerpos y la transformación entre coordenadas relativas y coordenadas del laboratorio Por ahora, el vector posición $\vec{r}$ representará el vector posición relativo entre las dos partículas. Si escribimos la fuerza central como

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r},$$

y se deducen de aquí

▶ TEOREMA 2.9
Se conserva el momentum angular $\vec{l}_O = \mu\vec{r} \times \vec{v}$.

DEMOSTRACION 10
Tenemos

$$\mu\vec{a} = \vec{f}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r},$$

de donde

$$\vec{r} \times \mu\vec{a} = \mu\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = 0,$$

o bien

$$\frac{d}{dt}\mu\vec{r} \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{l}_O = \mu\vec{r} \times \vec{v} = \text{ constante.}$$

▶ TEOREMA 2.10
La trayectoria está sobre un plano fijo, perpendicular al vector constante $\vec{l}_O$.

DEMOSTRACION 11
Del teorema anterior sigue que

$$\vec{l}_O \cdot \vec{r} = \mu\vec{r} \times \vec{v} \cdot \vec{r} = 0,$$

de modo que $\vec{r}$ *permanece sobre un plano fijo perpendicular a* $\vec{l}_0$.

Por lo tanto, es suficiente utilizar coordenadas polares (r, θ) en el plano del movimiento. En esas coordenadas, las ecuaciones de movimiento serán

$$\mu\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{dV(r)}{dr} \tag{2.44}$$

y

$$l_O = \mu r^2\dot{\theta} = \text{constante.} \tag{2.45}$$

Eliminando $\dot{\theta}$ es posible escribir una ecuación radial para $r(t)$ y su primera integral que corresponde a la conservación de la energía E. Es decir

$$\mu\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{l_O^2}{\mu^2r^3}\right) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

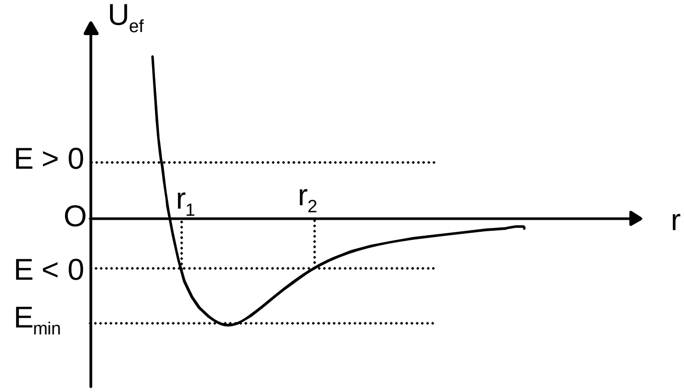
y una primera integral de esta corresponde a la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}\mu v^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r) = E = \text{constante.}$$

Si llamamos potencial efectivo para la coordenada radial a

$$U^{ef} = \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r),$$

este es diferente de cero incluso para una partícula libre. El efecto del primer término es siempre repulsivo lo cual se puede entender, para el caso de una partícula libre que se mueve en línea recta, simplemente porque la distancia r al origen pasa siempre por un mínimo. Para potenciales $V(r)$ atractivos (negativos), en general pueden haber máximos y mínimos de la distancia r, los llamados *puntos de retorno* r_1 y r_2. La figura que sigue



Potencial efectivo

ilustra porqué cuando la energía es negativa, hay dos puntos de retorno r_1 y r_2. Cuando la energía total iguala a U_{ef} entonces $\dot{r} = 0$. Para energías positivas habrá sólo un mínimo de r. También se entiende porqué la mínima energía posible corresponde al caso de la circunferencia con $r_1 = r_2$.

2.6.1. Ecuación diferencial para la órbita

La dependencia de las variables polares en el tiempo es compleja. Es más simple encontrar la dependencia de la distancia con el ángulo, es decir encontrar la órbita. En efecto, haciendo uso de la conservación del momentum angular, es posible eliminar el tiempo de la ecuación radial (2.44) mediante

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{l_O^2}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta},$$

resultando para $s = 1/r$ la siguiente ecuación diferencial (ecuación de Binet):

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = -\frac{\mu}{l_O^2}\frac{dV(1/s)}{ds}.$$

Para un campo de fuerza inverso al cuadrado de la distancia, la integración de la última ecuación es simple. Es decir si

$$V(r) = -\frac{K}{r},$$

siendo $K > 0$ para el caso atractivo y repulsivo en caso contrario, entonces la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = \frac{\mu}{l_O^2} K,$$

cuya solución general, en términos de dos constantes e y α es

$$s = \frac{\mu K}{l_O^2}(1 - e\cos(\theta - \alpha)),$$

o bien

$$r = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)},$$

con e la excentricidad de la órbita y α la orientación del semieje mayor de la cónica resultante, que son constantes por determinar en términos de condiciones físicas conocidas, inicialmente o en un punto de la trayectoria.
Si se considera la definición de una cónica en términos de un foco y su

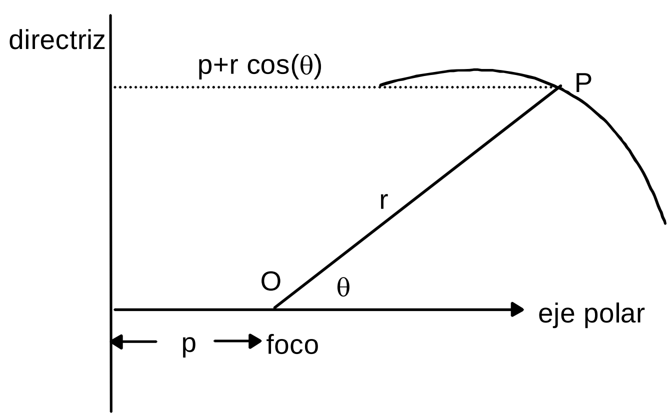


Figura 2.5: sección cónica

distancia a la directriz p, como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de las distancias al foco y a la directriz es una constante

e, la excentricidad de la cónica, se obtiene una ecuación de la misma forma. En efecto, con respecto a la figura (2.5), puede obtenerse

$$\frac{r}{p + r\cos\theta} = e \Longrightarrow r = \frac{pe}{1 - e\cos\theta}.$$

En el caso atractivo, $K > 0$, la trayectoria es entonces una elipse si $0 \leq e < 1$,

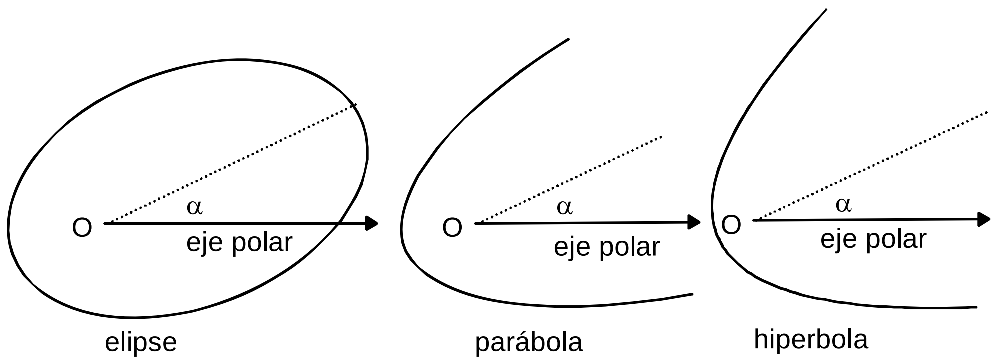


Figura 2.6: Tipos de cónicas

una parábola si $e = 1$ y una hipérbola si $e > 1$. Valores de e negativos no son necesarios de considerar, pues ellos correspondería simplemente a rotar la órbita en 180 grados, lo cual es preferible hacer con un valor adecuado de α, ver fig.(2.6).
En el caso repulsivo, $K < 0$, la solución debería escribirse

$$r = \frac{l_O^2}{\mu\,|K|}\frac{1}{e\cos(\theta - \alpha) - 1},$$

y en este caso las trayectorias son solamente hipérbolas.

2.6.2. Relación entre energía y excentricidad

Para relacionar la energía con la excentricidad, usemos

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l_O^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}, \tag{2.46}$$

y

$$r = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}.$$

Evaluemos la energía que es constante en el punto más próximo al centro de fuerza, el cual existe en todos los casos y corresponde a $\theta - \alpha = \pi$ siendo además ahí $\dot{r} = 0$. Así resulta

$$\frac{l_O^2}{2\mu r_1^2} - \frac{K}{r_1} = E,$$

y

$$r_1 = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{1 + e}.$$

Si se reemplaza r_1 en la primera resulta

$$\begin{aligned} E &= \frac{l_O^2}{2\mu} \left(\frac{\mu K(1+e)}{l_O^2} \right)^2 - K \frac{\mu K(1+e)}{l_O^2} \\ &= \frac{1}{2} K^2 \mu \frac{e^2 - 1}{l_O^2}, \end{aligned}$$

de donde sigue el resultado.

$$e^2 = 1 + \frac{2El_O^2}{\mu K^2}. \tag{2.47}$$

La energía puede ser negativa pero a pesar de eso, la expresión anterior es positiva. En efecto la expresión de la energía, aun cuando sea negativa debe cumplir

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{l_O^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} \geq \frac{l_O^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r},$$

pero la última expresión tiene un mínimo el que ocurre cuando

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{l_O^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}\right) = -\frac{l_O^2}{\mu r^3} + \frac{K}{r^2} = 0,$$

es decir

$$r = \frac{l_O^2}{\mu K},$$

luego

$$E \geq \frac{l_O^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} \geq \frac{l_O^2}{2\mu} \left(\frac{\mu K}{l_O^2} \right)^2 - K \frac{\mu K}{l_O^2} = -\frac{\mu K^2}{2l_O^2},$$

o sea

$$\frac{2El_O^2}{\mu K^2} \geq -1,$$

que prueba lo afirmado.

Ejercicio 2.6.1 *Para el caso de órbita elíptica, demuestre que los semiejes mayor y menor de la elipse están dados respectivamente por*

$$a = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{1 - e^2}, \qquad b = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Ejercicio 2.6.2 *Demuestre la ley de Kepler de los periodos, es decir demuestre que el periodo en el caso de movimiento elíptico T está dado por*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{K}} a^{\frac{3}{2}}.$$

Ejercicio 2.6.3 *Una partícula está en órbita circular de radio a en torno a la tierra, supuesta esférica, en reposo, de masa total M, de radio R, y sin considerar roce con el aire. Demuestre que si la velocidad de la partícula es repentinamente cambiada por un factor f, la excentricidad de la órbita resultante es*

$$e = \left| f^2 - 1 \right|.$$

Ejercicio 2.6.4 *Respecto a la situación del problema anterior, determine el factor f para que la partícula pase tangente a la superficie terrestre.*

2.6.3. Expresión integral para la trayectoria

Una forma alternativa para obtener la ecuación de la órbita o trayectoria, consiste en considerar

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V(r) - \frac{l_O^2}{2\mu r^2}},$$

y

$$\dot{\theta} = \frac{l_O}{\mu r^2},$$

de donde, eliminando el tiempo, se puede obtener

$$\theta = \theta_0 + \frac{l_O}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r(\theta)} \frac{1}{r^2\sqrt{E - V(r) - l_O^2/(2\mu r^2)}} dr. \tag{2.48}$$

expresión integral para la trayectoria $r(\theta)$.

2.6.4. Estabilidad de una órbita circular

Considere una partícula moviéndose en un potencial central atractivo $V(r)$ de modo que

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{V'(r)}{m} \tag{2.49}$$

y

$$r^2\dot{\theta} = \text{constante}=h. \tag{2.50}$$

La solución circular se obtiene con las condición iniciales

$$\begin{aligned} r(0) &= R, \\ v(0) &= R\dot{\theta}(0), \\ v(0) &= \sqrt{\frac{RV'(R)}{m}}, \\ h &= R\sqrt{\frac{RV'(R)}{m}}. \end{aligned}$$

La ecuación radial puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} &= -\frac{V'(r)}{m} \\ \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{R^3V'(R)}{mr^3} &= -\frac{V'(r)}{m}. \end{aligned}$$

Supongamos una pequeña perturbación u (sin cambiar la rapidez) de modo que

$$r = R + u,$$

luego

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{R^3V'(R)}{m(R+u)^3} = -\frac{V'(R+u)}{m},$$

expandiendo hasta primer orden en u

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{V'(R)}{m}\left(1 - \frac{3}{R}u\right) = -\frac{V'(R)}{m} - \frac{u}{m}V''(R),$$

que se simplifica a

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{3V'(R)}{Rm} + \frac{1}{m}V''(R)\right)u = 0.$$

La órbita circular será estable en el sentido de u realice oscilaciones armónicas de pequeña amplitud y ello ocurre si

$$\omega^2 = \frac{3V'(R)}{R} + V''(R) > 0$$

lo que impone una restricción a la forma del potencial cerca de la órbita .

$$V''(R) > -\frac{3}{R}V'(R).$$

Si el potencial es del tipo

$$V(R) = -\frac{c}{R^n}, \text{ con } c > 0$$

resulta

$$\begin{aligned} V'(R) &= \frac{nc}{R^{n+1}}, \\ V''(R) &= -\frac{n(n+1)c}{R^{n+2}}, \end{aligned}$$

luego

$$-\frac{n(n+1)c}{R^{n+2}} > -\frac{3}{R}\frac{nc}{R^{n+1}},$$

de aquí una condición que debe cumplir n

$$(n+1) < 3 \Rightarrow n < 2,$$

cuestión que es satisfecha por el potencial inverso a la distancia. En efecto si

$$V(r) = -\frac{GMm}{r},$$

$$\omega^2 = \frac{3V'(R)}{Rm} + \frac{1}{m}V''(R) = \frac{3}{Rm}\frac{GMm}{R^2} + \frac{1}{m}(-\frac{2GMm}{R^3}) = \frac{GM}{R^3}$$

y entonces el periodo de oscilación será

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} = \frac{2\pi R}{v(0)},$$

el mismo periodo de revolución en la órbita. En este caso, la solución perturbada puede ser encontrada exactamente y se trata de una elipse.

2.6.5. Otro punto de vista

La órbita circular será estable en $r = R$ si el potencial efectivo

$$U^{ef} = \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r),$$

tiene un mínimo local en $r = R$. Entonces debe ser

$$\begin{aligned} V'(R) - \frac{l_O^2}{\mu R^3} &= 0, \\ V''(R) + \frac{3l_O^2}{\mu R^4} &> 0 \end{aligned}$$

o bien, eliminando l_0^2

$$V''(R) + \frac{3}{R}V'(R) > 0$$

que es la misma condición obtenida anteriormente.

2.6.6. Un caso inestable

La inestabilidad de la órbita circular para el caso

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{k}{r^2}, \\ F(r) &= -\frac{2k}{r^3} \end{aligned}$$

es fácil de comprender. Para este caso el radio de la órbita circular está dado según la rapidez $v(0)$ de acuerdo a

$$\mu\frac{v^2(0)}{R} = \frac{2k}{R^3} \Rightarrow v^2(0) = \frac{2k}{\mu R^2}.$$

La energía en general es

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l_O^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r^2}, \\ &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + (\frac{l_O^2}{2\mu} - k)\frac{1}{r^2}, \end{aligned}$$

y la ecuación radial es

$$\mu\ddot{r} = (\frac{l_O^2}{\mu} - 2k)\frac{1}{r^3}.$$

Para la órbita circular $E = 0$ y $\frac{l_O^2}{\mu} - 2k = 0$. Si la rapidez se aumenta levemente $(\frac{l_O^2}{\mu} - 2k) > 0$ resulta $\ddot{r} > 0$, r crece sin límite. Si la rapidez se disminuye levemente $(\frac{l_O^2}{\mu} - 2k) < 0$ resulta $\ddot{r} < 0$, r disminuye a cero, es decir partículas chocarán.

2.6.7. Otro caso estable

Para la fuerza elástica con

$$V(r) = kr^2,$$

hay órbitas circulares estables. El potencial efectivo es

$$U^{ef} = \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + kr^2,$$

luego la condición de extremo en $r = R$ da

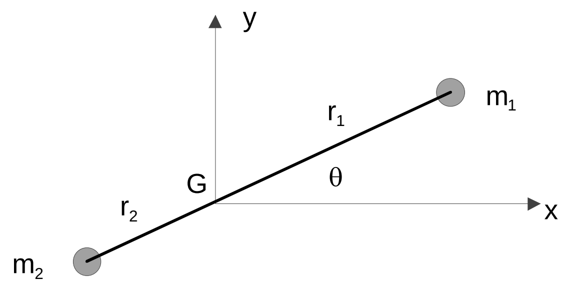
$$-\frac{l_O^2}{\mu R^3} + 2kR = 0 \Rightarrow R = \sqrt[4]{\frac{l_O^2}{2k\mu}},$$

y la segunda derivada es

$$(U^{ef})'' = \frac{3l_O^2}{\mu R^4} + 2k = 8k > 0.$$

2.7. Problema de Kepler

Lo anterior puede aplicarse directamente al caso de dos partículas que interactúan gravitacionalmente. Recordemos que $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ por lo que las órbitas encontradas son las del movimiento relativo de la partícula (1) respecto a la partícula (2). El centro de masa del sistema está entre ambas a distancias $r_1 = \frac{m_2}{M}r$ de la partícula (1) y $r_2 = \frac{m_1}{M}r$ de la partícula (2). El centro de masa puede considerarse con velocidad absoluta cero (o moviéndose con velocidad constante) de modo que respecto al centro de masa ambas partículas describen el mismo tipo de curva siendo sus ecuaciones polares con origen en G y el mismo ángulo polar θ las siguientes



movimiento relativo

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{m_2}{M}\frac{l_O^2}{\mu K}\frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}, \\
r_2 &= \frac{m_1}{M}\frac{l_O^2}{\mu K}\frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha + \pi)},
\end{aligned}
$$

con

$$
K = Gm_1m_2,\ M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{M}
$$

Podemos hacer algunas simplificaciones definiendo $h = |\vec{r} \times \vec{v}|$ obteniendo

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{m_2h^2}{GM^2}\frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}, \\
r_2 &= \frac{m_1h^2}{GM^2}\frac{1}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}.
\end{aligned}
$$

La excentricidad e será dada por

$$\begin{aligned} e^2 &= 1+\frac{2E\mu^2h^2}{\mu G^2m_1^2m_2^2}, \\ &= 1+\frac{(v^2-\frac{2GM}{r})h^2}{G^2M^2}, \end{aligned}$$

Aquí $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ es la velocidad relativa cuando la posición relativa es $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Cuando una de las masas es muchísimo mayor que la otra como en el caso de la Tierra y un satélite artificial podemos tomar $m_2 = M >> m_1 = m$ entonces será

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{h^2}{GM}\frac{1}{1-e\cos(\theta-\alpha)}, \\ r_2 &\simeq 0. \end{aligned}$$

La excentricidad e estará dada por

$$e^2 = 1+\frac{(v^2-\frac{2GM}{r})h^2}{G^2M^2},$$

2.8. Ejercicios resueltos

2.8.1. Dinámica unidimensional

Ejercicio 2.8.1 *Un cuerpo de masa* $16\,\mathrm{kg}$, *se encuentra sobre una superficie horizontal áspera, de coeficiente de fricción estático y cinético* $\mu_s = 0{,}3$ *y* $\mu_k = 0{,}25$, *respectivamente. Si sobre el cuerpo se aplica una fuerza horizontal* $\vec{F}$, *determine: a) La fuerza resultante sobre el bloque si* $F = 45\,\mathrm{N}$. *b)La magnitud mínima de* F *para poner en movimiento al cuerpo. c)La distancia horizontal que recorre el cuerpo, hasta llegar a detenerse, si* $F = 80\,\mathrm{N}$ *y actúa sólo durante* $4\,\mathrm{s}$.

Solución. Calculemos $f_S^{\text{máx}} = \mu_S N = \mu_S mg = 0{,}3 \times 16 \times 10 = 48{,}0\,\mathrm{N}$. Luego la fuerza de $45\,\mathrm{N}$ es insuficiente para colocar en movimiento el cuerpo, entonces

a) $\sum \vec{F} = 0$. Además

b) $F_{\text{mín}} = 48{,}0\,\mathrm{N}$.

Para $F = 80\,\mathrm{N}$, la segunda ley da

$$\begin{aligned} F - \mu_K mg &= ma_1, \; t < 4\,\mathrm{s}, \\ -\mu_K mg &= ma_2, \; t > 4\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{80 - 0{,}25 \times 16 \times 10}{16} = 2.\,5\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ a_2 &= \frac{-0{,}25 \times 16 \times 10}{16} = -2.\,5\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \end{aligned}$$

En $4\,\mathrm{s}$ la posición y velocidad alcanzadas son

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{1}{2}2{,}5(4)^2 = 20\,\mathrm{m}, \\ v &= a_1 t = 10{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \end{aligned}$$

y se detendrá en un tiempo adicional tal que

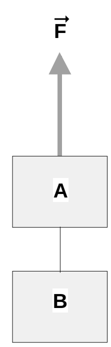
$$0 = 10 + a_2 t \Longrightarrow t = \frac{10}{2{,}5} = 4\,\mathrm{s},$$

recorriendo una distancia adicional

$$\begin{aligned} x &= vt + \frac{1}{2}a_2 t^2 \\ &= 10 \times 4 - \frac{1}{2}2{,}5(4)^2 = 20{,}0\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

luego en total recorre $40\,\mathrm{m}$.

Ejercicio 2.8.2 *Dos bloques A y B de masa $m_A = 14\,\mathrm{kg}$ y $m_B = 10\,\mathrm{kg}$, están unidos por una cuerda cuya masa total es $m = 8\,\mathrm{kg}$ como se indica en la figura. Si se aplica al bloque superior A una fuerza vertical $\vec{F}$ de módulo $480\,\mathrm{N}$, se pide calcular:*



a) La aceleración del sistema. b)La tensión en los extremos superior e inferior de la cuerda.

Solución. Si T_1 y T_2 indican las magnitudes de la tensión en los extremos superior e inferior respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} F - T_1 - m_A g &= m_A a, \\ T_1 - T_2 - mg &= ma, \\ T_2 - m_B g &= m_B a, \end{aligned}$$

sumando las tres

$$F - (m_A + m + m_B)g = (m_A + m + m_B)a,$$

de donde

$$a = \frac{480 - 320}{32} = 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

y de aquí

$$\begin{aligned} T_2 &= m_B(g + a) = 150\,\mathrm{N}, \\ T_1 &= T_2 + mg + ma = 270\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.3 *Un disco de hockey abandona el palo de un jugador con una rapidez de* $5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y desliza* $36\,\mathrm{m}$ *antes de detenerse. Demuestre que el coeficiente de roce entre el disco y el hielo es* $0{,}035$.

Solución. De

$$ma = -\mu_K mg,$$

resulta

$$a = -\mu_K g,$$

y se detiene en tiempo t dado por

$$v_0 - \mu_K g t = 0 \Longrightarrow t = \frac{v_0}{\mu_K g},$$

y la distancia recorrida es

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = \frac{v_0^2}{2\mu_K g},$$

entonces

$$\mu_K = \frac{v_0^2}{2xg} = \frac{25}{2 \times 36 \times 10} = 0{,}035.$$

▲

EJERCICIO 2.8.4 *Dos resortes S_1 y S_2 de longitudes iguales a $0{,}5\,\mathrm{m}$, pero con diferentes constantes elásticas $K_1 = 50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ y $K_2 = 100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, están unidos a dos soportes A y B, que se encuentran a la misma altura. Un cuerpo C de masa $2{,}5\,\mathrm{kg}$, está entre los dos resortes y es estirado hacia abajo hasta que la longitud de los resortes se duplica. ¿ Cuál es la aceleración que adquiere el cuerpo C cuando se deja libre?*

Solución. Tendremos

$$F = k_1 \times (1 - 0{,}5) + k_2 \times (1 - 0{,}5) - mg = ma,$$

de donde

$$a = \frac{25 + 50 - 25}{2{,}5} = 20{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

▲

EJERCICIO 2.8.5 *Se deja caer una bolita de masa m desde una altura h. Sobre la bolita, además del peso, actúa una fuerza resistiva proporcional a la velocidad de la forma $\vec{F} = -k\dot{y}\hat{\jmath}$, calcule la rapidez de la bolita cuando ha transcurrido un tiempo $t = m/k$.*

Solución. Si el eje OY es hacia arriba entonces

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y,$$

para integrar con $y(0) = k$, $v_y(0) = 0$, separe variables

$$\frac{dv_y}{g + \frac{k}{m}v_y} = -dt,$$

de donde

$$\begin{aligned} t &= -\int_0^{v_y} \frac{dv_y}{g + \frac{k}{m}v_y} \\ &= -\frac{m}{k} \ln \frac{mg + kv_y}{mg}, \end{aligned}$$

y despejando

$$v_y = -mg\frac{1 - e^{-\frac{kt}{m}}}{k},$$

para $t = m/k$ resulta

$$v_y = -\frac{mg}{k}(1 - e^{-1}).$$

EJERCICIO 2.8.6 *Un cuerpo de masa* $4\,\mathrm{kg}$*, es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de* $60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. La fuerza resistente del aire es:* $\vec{F} = -\frac{3}{100}\vec{v}$ *(unidades en el Sistema Internacional). Calcule el tiempo que demora el cuerpo en alcanzar la altura máxima y el valor de la altura máxima.*

Solución. Similarmente al problema anterior

$$4\frac{dv_y}{dt} = -40 - \frac{3}{100}v_y,$$

para integrar con $y(0) = 0$, $v_y(0) = 60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, separe variables e integre

$$\begin{aligned} \int_{60}^{v_y} \frac{dv_y}{10 + \frac{3}{400}v_y} &= -t, \\ t &= -\frac{400}{3}\ln\left(\frac{4000 + 3v_y}{4180}\right), \end{aligned}$$

despejando

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{4180}{3}e^{-\frac{3}{400}t} - \frac{4000}{3}.$$

De aquí el tiempo para llegar a la altura máxima satisface

$$\frac{4180}{3}e^{-\frac{3}{400}t} - \frac{4000}{3} = 0 \Longrightarrow t = 5.869\,\mathrm{s}.$$

La altura máxima será

$$y_{\text{máx}} = \int_0^{5.869}\left(\frac{4180}{3}e^{-\frac{3}{400}t} - \frac{4000}{3}\right)dt = 174.8\,\mathrm{m}.$$

EJERCICIO 2.8.7 *Una partícula se mueve sobre el eje X de un sistema de coordenadas, sometido a una fuerza de atracción hacia el origen de magnitud k/x^2, donde k es una constante positiva. Si la partícula parte del reposo en $x = a$, demuestre que ella llegará al origen en un tiempo t , dado por*

$$t = \frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{ma}{2k}}.$$

Solución. Tenemos

$$m\ddot{x} = -\frac{k}{x^2},$$

con condiciones iniciales $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$. Como

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\dot{x}^2,$$

podemos integrar

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}),$$

de donde

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a})},$$

separe variables e integre

$$t = -\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a})}} = \frac{1}{2}\pi a\sqrt{\frac{ma}{2k}}.$$

Nota: $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})}}$, $x = a\sin^2\theta$, $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2a\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{\frac{2k}{ma}}}$.

▲

EJERCICIO 2.8.8 *Sobre una partícula de masa m, inicialmente en reposo, actúa una fuerza $\vec{F}$ de magnitud: $F = F_o\left[1 - (t-T)^2/T^2\right]$ durante un intervalo de tiempo$0 < t < 2T$. Pruebe que la rapidez de la partícula al final del intervalo es: $v = 4F_oT/3m$*

Solución. De

$$m\frac{dv}{dt} = F_o\left[1 - (t-T)^2/T^2\right],$$

integramos

$$v = \frac{F_o}{m}\int_0^{2T}\left[1 - (t-T)^2/T^2\right]dt = \frac{4}{3}\frac{F_o}{m}T.$$

▲

Ejercicio 2.8.9 *Una partícula de masa* $1\,\mathrm{kg}$*, se mueve a lo largo del eje* X *bajo la acción de una fuerza cuya magnitud es:* $F = 4\pi^2 \sin 8\pi t$ *, donde* F *está medido en* N *y* t *en* s*. Cuando* $t = 0\,\mathrm{s}$*, la rapidez de la partícula es* $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. Calcule: a) La rapidez de la partícula cuando* $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$*. b) Si en* $t = 0\,\mathrm{s}$*,* $x = 0\,\mathrm{m}$*, determine la posición de la partícula en* $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$*.*

Solución.

$$\frac{dv_x}{dt} = 4\pi^2 \sin 8\pi t,\ v_x(0) = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}},\ x(0) = 0\,\mathrm{m}.$$

Integramos dos veces

$$v_x(t) = 40 + \int_0^t 4\pi^2 \sin 8\pi t dt = 40 + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\cos 8\pi t)\,\pi,$$

integre de nuevo

$$x(t) = (40 + \frac{1}{2}\pi)t - \frac{1}{16}\sin 8\pi t,$$

si evaluamos para $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$

$$v_x = 41.\,085\ \mathrm{m\,s^{-1}},\ x = 8.\,37\,\mathrm{m}$$

▲

Ejercicio 2.8.10 *Una partícula de masa* m*, que está inicialmente en reposo en el origen, queda sujeta a la acción de una fuerza resultante, cuya magnitud está dada por* $F = kt^2$*. Demuestre que:*

$$\frac{x}{v_x} = \frac{t}{4}.$$

Solución. Tenemos

$$m\frac{dv_x}{dt} = kt^2,$$

si integramos

$$mv_x = \frac{1}{3}kt^3,$$

integrando de nuevo

$$mx = \frac{1}{12}kt^4,$$

de manera que

$$\frac{x}{v_x} = \frac{t}{4}.$$

▲

Ejercicio 2.8.11 *Un globo cuyo peso total es W, incluyendo el lastre, está sujeto a la acción de una fuerza ascendente vertical constante $\vec{P}$. En un determinado instante, el globo comienza a descender con una aceleración constante de magnitud " a" . ¿Qué cantidad de lastre debe arrojarse fuera del globo para que este se eleve con aceleración constante de magnitud a? No considere la resistencia del aire.*

Solución. Bajando

$$P - W = -\frac{W}{g}a,$$

Para que suba debemos disminuir el peso de manera que

$$P - W' = \frac{W'}{g}a,$$

Eliminemos a

$$\frac{P-W}{P-W'} = -\frac{W}{W'} \Longrightarrow W' = W\frac{P}{2W-P}$$

o sea debe botar

$$W - W' = W - W\frac{P}{2W-P} = 2W\frac{P-W}{P-2W}.$$

La solución en realidad depende de cuales sean los datos. Si se desconoce la fuerza ascendente P, la solución en términos de a se logra eliminando P, es decir restando las dos primeras ecuaciones

$$W - W' = \frac{W'}{g}a + \frac{W}{g}a,$$

de donde

$$W' = W\frac{g-a}{g+a},$$

y finalmente se debe botar

$$W - W' = 2W\frac{a}{g+a}.$$

▲

Ejercicio 2.8.12 *Sobre una partícula que se mueve sobre el eje X, actúa una fuerza dada por:* $\vec{F} = -\frac{k}{v_x}\hat{\imath}$. *Se sabe que en* $t = 0$, $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = v_0$. *Calcule: a)* $\dot{x}$ *en función de* t *y b)* $\dot{x}$ *en función de* x. *Respuesta: a)* $\sqrt{v_0^2 - 2kmt}$; *b)* $\left[v_0^3 - \frac{3k}{m}(x-a)\right]^{\frac{1}{3}}$.

Solución. De nuevo, la segunda ley de Newton

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{v_x},\ v_x(0) = v_0,\ x(0) = a.$$

Esta puede integrarse de la forma

$$v_x dv_x = -kmdt \Longrightarrow \frac{1}{2}(v_x^2 - v_0^2) = -kmt,$$

de aquí se despeja

$$v_x(t) = \sqrt{v_0^2 - 2kmt}.$$

Para obtener $\dot{x}$ en función de x, la segunda ley puede escribirse

$$m\frac{dv_x}{dt}dx = -\frac{k}{v_x}dx,$$

esto es

$$mdv_x v_x^2 = -kdx \Longrightarrow \frac{1}{3}(v_x^3 - v_0^3) = -\frac{k}{m}(x-a),$$

de donde despejamos

$$v_x(x) = \sqrt[3]{v_0^3 - \frac{3k}{m}(x-a)}.$$

▲

Ejercicio 2.8.13 *La fuerza neta que actúa sobre una partícula cuyo peso es de* $26\,\mathrm{kg}f$, *tiene la dirección sobre el eje de las X de un sistema de coordenadas y está dada por la expresión:*

$$F = At^3 + Be^{-ct}$$

en que $A = 216\,\mathrm{N\,s^{-3}}$, $B = 1\,\mathrm{N}$, $c = 1\,\mathrm{s^{-1}}$ *y* t *está expresado en segundos. Si en el instante* $t = 0$, *la partícula está pasando por el origen moviéndose a* $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *en el sentido positivo del eje X, determine: a) La velocidad de la partícula en el instante* $t = 3\,\mathrm{s}$. *b) Su distancia al origen en ese instante.*

Solución. La masa es también $m = 26\,\mathrm{kg}$. La segunda ley será, reemplazando números

$$26a_x = 216t^3 + e^{-t},\ x(0) = 0,\ v_x(0) = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

De aquí, integrando dos veces

$$\begin{aligned} v_x(t) &= 3 + \int_0^t \frac{216t^3 + e^{-t}}{26} dt, \\ &= 3.\,038\,5 + 2.\,077t^4 - 0{,}038\,6e^{-1{,}0t}, \\ x &= \int_0^t (3.\,038\,5 + 2.\,077t^4 - 0{,}038\,6e^{-1{,}0t}) dt \\ &= 3.\,038\,5t + 0{,}415\,4t^5 + 0{,}038\,6e^{-1{,}0t} - 0{,}038\,6 \end{aligned}$$

que si se evalúan en $t = 3\,\mathrm{s}$ dan

$$\begin{aligned} v_x &= 171.\,274\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\ x &= 110.\,02\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.14 *Una partícula de masa "m", parte del reposo desde el origen de un sistema de coordenadas bajo la acción de una fuerza neta cuya magnitud es $F = f_0 - kt^2$, en que f_0 y k son constantes positivas. a) Encuentre las expresiones para la velocidad y para el itinerario de la partícula, en función del tiempo. b) Si $m = 800\,\mathrm{kg}$, $f_0 = 1500\,\mathrm{N}$, $k = 15\,\mathrm{N\,s^{-2}}$ y el tiempo está dado en segundos, determine en qué instante se detiene la partícula y a qué distancia.*

Solución. Tenemos que

$$800\frac{dv}{dt} = 1500 - 15t^2;\ x(0) = v(0) = 0.$$

Integrando dos veces

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \frac{1500 - 15t^2}{800} dt \\ &= \frac{15}{8}t - \frac{1}{160}t^3, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (\frac{15}{8}t - \frac{1}{160}t^3)dt \\ &= \frac{15}{16}t^2 - \frac{1}{640}t^4, \end{aligned}$$

luego la partícula se detiene cuando

$$\frac{15}{8}t - \frac{1}{160}t^3 = 0 \Longrightarrow t = 10\sqrt{3} \text{ s.}$$

y su posición es

$$x = \frac{1125}{8} = 140.625\,\text{s.}$$

▲

Ejercicio 2.8.15 *Una partícula de masa m se lanza verticalmente hacia arriba (en el eje Y) con velocidad inicial V sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma $-2\beta\dot{y}$. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.*

Solución. Aquí, la ecuación de movimiento será

$$m\ddot{y} = -mg - 2\beta\dot{y}$$

o bien

$$\ddot{y} + 2\frac{\beta}{m}\dot{y} = -g$$

con soluciones particular y homogéneas las siguientes

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{mg}{2\beta}t \\ y_h &= A + Be^{-2\frac{\beta}{m}t} \end{aligned}$$

de modo que la solución general es

$$y(t) = -\frac{mg}{2\beta}t + A + Be^{-2\frac{\beta}{m}t}$$

siendo $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = V$ de modo que

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -\frac{mg}{2\beta} - 2\frac{\beta}{m}B &= V \end{aligned}$$

o sea

$$B = -\frac{1}{4}\frac{mg + 2V\beta}{\beta^2}m$$

y finalmente

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{mg}{2\beta}t + \frac{1}{4}\frac{mg + 2V\beta}{\beta^2}(1 - e^{-2\frac{\beta}{m}t}) \\ v(t) &= -\frac{mg}{2\beta} + \frac{1}{2}\frac{mg + 2V\beta}{\beta m}e^{-2\frac{\beta}{m}t}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.16 *Una partícula de masa m se suelta desde una altura h sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma $-\beta\dot{y}$. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.*

Solución. Mientras la partícula baja

$$m\ddot{y} = -mg - \beta\dot{y}, \; y(0) = h, \; \dot{y}(0) = 0.$$

Reordenemos

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} = -g$$

que tiene solución particular

$$y_P = -\frac{mg}{\beta}t,$$

y la ecuación homogénea es

$$y_h = A + Be^{-\frac{\beta t}{m}},$$

la solución general es

$$y(t) = -\frac{mg}{\beta}t + A + Be^{-\frac{\beta t}{m}},$$

debiendo ser

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = h, \\ \dot{y}(0) &= -\frac{mg}{\beta} - \frac{\beta}{m}B = 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$B = -m^2\frac{g}{\beta^2},\ A = h + m^2\frac{g}{\beta^2},$$

luego

$$\begin{aligned} y(t) &= h - \frac{mg}{\beta}t + m^2\frac{g}{\beta^2}(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}), \\ \dot{y}(t) &= -\frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}). \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.8.17 *Una partícula de masa m se lanza verticalmente hacia arriba (el eje Y) con velocidad inicial V sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa proporcional al cuadrado de la rapidez, de la forma $\pm 2\beta\dot{y}^2$. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo. Considere que debe elegirse el signo adecuadamente para la subida y la bajada de la partícula.*

Solución. Mientras la partícula sube

$$m\ddot{y} = -mg - 2\beta\dot{y}^2$$

y mientras baja

$$m\ddot{y} = -mg + 2\beta\dot{y}^2$$

puesto que la fuerza resistente es contraria a la velocidad. Si llamamos a $v = \dot{y}$ tenemos

a) para la subida

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g - \frac{2\beta}{m}v^2 \\ dt &= -\frac{dv}{g + \frac{2\beta}{m}v^2} \\ t &= -\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g + \frac{2\beta}{m}v^2} \end{aligned}$$

b) para la bajada

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g + \frac{2\beta}{m}v^2 \\ dt &= -\frac{dv}{g - \frac{2\beta}{m}v^2}, \\ t &= -\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g - \frac{2\beta}{m}v^2} \end{aligned}$$

Las integrales podrían hacerse de tablas, pero no vale la pena porque son expresiones complicadas.

▲

Ejercicio 2.8.18 *Una partícula de masa m se mueve en una línea recta (en el eje X) sometida a una fuerza elástica $-Kx$ y a una fuerza de roce viscosa de la forma $-2\beta\dot{x}$. Si inicialmente la velocidad es V y la posición es $x = 0$, determine las expresiones para la posición de la partícula en función del tiempo, en los tres casos: sub amortiguado, amortiguado crítico y sobre amortiguado.*

Solución. La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + kx + 2\beta\dot{x} = 0$$

siendo la ecuación característica

$$mp^2 + 2\beta p + k = 0$$

con solución $p = -\frac{\beta}{m} + \sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}, p = -\frac{\beta}{m} - \sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}$ a

)Sub amortiguado $\frac{k}{m} - (\frac{\beta}{m})^2 = \omega^2 > 0$

$$x = e^{-\frac{\beta}{m}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

b) amortiguado crítico $\frac{k}{m} - (\frac{\beta}{m})^2 = 0$

$$x = e^{-\frac{\beta}{m}t}(A + Bt)$$

c) sobre amortiguado $(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m} > 0$

$$x = e^{-\frac{\beta}{m}t}(Ae^{\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}t} + Be^{-\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}t}),$$

donde al considerar las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V$ permite obtener

a)

$$x = \frac{V}{\omega} e^{-\frac{\beta}{m}t} \sin \omega t)$$

b)

$$x = V e^{-\frac{\beta}{m}t} t$$

c)

$$x = \frac{V}{2\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}} e^{-\frac{\beta}{m}t} (e^{\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}t} - e^{-\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}t})$$

▲

EJERCICIO 2.8.19 *Una partícula descansa sobre una plataforma horizontal inicialmente en reposo. Si la plataforma comienza a moverse verticalmente de modo que su desplazamiento es:*

$$y = A \sin \omega t$$

siendo A y ω constantes y t el tiempo. Determine la condición que deben cumplir esas constantes para que durante el movimiento de la plataforma la partícula se despegue de ella.

Solución. Mientras la partícula permanezca apoyada sobre la plataforma, la reacción normal actuando sobre ella, hacia arriba N, está dada por

$$m\ddot{y} = N - mg$$

con

$$y = A \sin \omega t$$

de modo que

$$N = mg - mA\omega^2 \sin \omega t.$$

Entonces la partícula no despegará si $N > 0$ para todo t lo cual requiere que

$$A\omega^2 < g$$

o bien la partícula despegará si

$$A\omega^2 > g.$$

▲

Ejercicio 2.8.20 *Una partícula de masa m moviéndose en una línea recta está sometida a una resistencia que produce una fuerza de retardo kv^3, donde v es la velocidad y k es una constante. Muestre que la velocidad v y el tiempo t están dados en términos de la distancia s mediante las ecuaciones*

$$\begin{aligned} v &= \frac{u}{1+kmsu}, \\ t &= \frac{s}{u}+\frac{1}{2}kms^2. \end{aligned}$$

donde u es la velocidad inicial.

Solución. La ecuación de movimiento será

$$m\frac{dv}{dt}=-kv^3$$

siendo

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

La primera puede escribirse como

$$\begin{aligned} m\frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} &= -kv^3, \\ mv\frac{dv}{ds} &= -kv^3, \\ m\frac{dv}{ds} &= -kv^2, \end{aligned}$$

que puede integrarse, siendo u la velocidad inicial, como sigue

$$\begin{aligned} \int_u^v \frac{dv}{v^2} &= -km\int_0^s ds, \\ \frac{1}{u}-\frac{1}{v} &= -kms, \end{aligned}$$

entonces

a)

$$v=\frac{u}{1+kmsu},$$

Además

b)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{u}{1 + kmsu},$$

que puede integrarse

$$\begin{aligned} \int (1 + kmsu)ds &= \int udt, \\ s + \frac{1}{2}kmus^2 &= ut, \end{aligned}$$

o bien

$$t = \frac{s}{u} + \frac{1}{2}kms^2.$$

▲

Ejercicio 2.8.21 *Una partícula se mueve en una línea recta bajo la acción de una fuerza de roce de la forma kv^{n+1} donde v es la velocidad a tiempo t. Muestre que, si u es la velocidad en $t = 0$*

$$kt = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{v^n} - \frac{1}{u^n}\right),$$

y obtenga una fórmula correspondiente para el espacio en términos de v.

Solución. La segunda ley da

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^{n+1},$$

o

$$v\frac{dv}{ds} = -kv^{n+1},$$

Si integramos la primera

$$m\int_u^v \frac{dv}{v^{n+1}} = -kt,$$

de donde

$$\frac{m}{n}\left(\frac{1}{v^n} - \frac{1}{u^n}\right) = kt.$$

Similarmente si integramos la segunda forma

$$\begin{aligned} m\int_u^v \frac{dv}{v^n} &= -ks, \\ ks &= \frac{m}{n-1}\left(\frac{1}{v^{n-1}}-\frac{1}{u^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.22 *Una bala disparada con una velocidad horizontal de* $800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *viaja con una velocidad de* $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *al final de un segundo. Suponiendo válido el modelo del problema anterior con* $m = 1/2$*, calcule* k *y el espacio recorrido en el primer segundo, despreciando el efecto de la gravedad.*

Solución. Para el problema anterior, se tiene ahora $m = \frac{1}{2}$ y $u = 800$, y para $t = 1$, $v = 500$. Entonces

$$k = \frac{1}{(1/2)}\left(\frac{1}{500^{1/2}}-\frac{1}{800^{1/2}}\right) = 0{,}0\,187\,32.$$

Entonces

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{k(m-1)}\left(\frac{1}{v^{m-1}}-\frac{1}{u^{m-1}}\right) \\ &= \frac{1}{(0{,}0\,187\,32)(-1/2)}\left(\frac{1}{500^{-1/2}}-\frac{1}{800^{-1/2}}\right) = 632.\,457\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.23 *Se dispara verticalmente hacia arriba una piedra en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa proporcional a la velocidad* (kv) *cuando la rapidez es* v*. Si* v_0 *es la rapidez del disparo, pruebe que la piedra vuelve al punto inicial después de un tiempo* t_1*, donde*

$$(g + kv_0)\left(1 + e^{-kt_1}\right) = gkt_1.$$

Solución. Aquí

$$\frac{dv}{dt} = -kv - g,$$

de donde

$$v(t) = \frac{-g + e^{-kt}C_1 k}{k},$$

pero

$$v_0 = \frac{-g + C_1 k}{k},$$

de modo que

$$C_1 = \frac{v_0 k + g}{k},$$

y

$$v(t) = \frac{-g}{k} + \frac{v_0 k + g}{k} e^{-kt},$$

entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t (\frac{-g}{k} + \frac{v_0 k + g}{k} e^{-kt}) dt \\ &= -\frac{gt}{k} + \frac{v_0 k + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) \end{aligned}$$

De aquí, haciendo $y = 0$ en $t = t_1$ resulta

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{gt_1}{k} + \frac{v_0 k + g}{k^2}(1 - e^{-kt_1}), \\ gkt_1 &= (v_0 k + g)(1 - e^{-kt_1}). \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.8.24 *Una partícula se lanza hacia arriba con velocidad inicial u y se mueve en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa kv^2. Pruebe que la partícula vuelve al punto de partida después de un tiempo*

$$\frac{1}{\sqrt{kg}} (\alpha + \ln (\sec \alpha + \tan \alpha)),$$

donde

$$\tan \alpha = u \sqrt{\frac{k}{g}}.$$

Solución. Aquí, para la subida

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 - g, \tag{2.51}$$

y debemos calcular la altura máxima y el tiempo empleado en subir. Podemos integrar

$$\begin{aligned} t &= -\int_u^v \frac{dv}{kv^2+g}, \\ &= \frac{-\arctan v\frac{k}{\sqrt{(gk)}} + \arctan u\frac{k}{\sqrt{(gk)}}}{\sqrt{(gk)}} \end{aligned}$$

en el punto más alto $v = 0$, por lo tanto el tiempo de subida es

$$t_s = \frac{1}{\sqrt{(gk)}} \arctan u\frac{k}{\sqrt{(gk)}}.$$

Para saber la altura máxima, modificamos la ecuación (2.51) de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -kv^2 - g, \\ vdv &= (-kv^2 - g)dy, \end{aligned}$$

entonces

$$y = -\int_u^v \frac{vdv}{kv^2+g}.$$

Como nos interesa solamente $y_{\text{máx}}$ hacemos $v = 0$, entonces

$$y_{\text{máx}} = \frac{1}{2k} \ln \frac{g+ku^2}{g}.$$

Para la bajada, con $v(0) = 0$ y $y(0) = y_{\text{máx}}$

$$\frac{dv}{dt} = kv^2 - g, \tag{2.52}$$

entonces

$$\begin{aligned} t &= -\int_0^v \frac{dv}{g-kv^2}, \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(gk)}} \operatorname{arctanh} v\frac{k}{\sqrt{(gk)}}, \end{aligned}$$

además modificando la ecuación (2.52)

$$vdv = (kv^2 - g)dy,$$

entonces

$$y - y_{\text{máx}} = \int_0^v \frac{vdv}{kv^2 - g} = \frac{1}{2k} \ln \frac{g - kv^2}{g},$$

luego la velocidad de llegada v_f al suelo $(y = 0)$ estará dada por

$$\begin{aligned} -y_{\text{máx}} &= \frac{1}{2k} \ln \frac{g - kv_f^2}{g}, \\ &= -\frac{1}{2k} \ln \frac{g + ku^2}{g}, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{g - kv_f^2}{g} = \frac{g}{g + ku^2},$$

o bien

$$v_f = -\sqrt{\frac{g}{g + u^2 k}} u,$$

finalmente, el tiempo de bajada estará dado por

$$\begin{aligned} t_b &= -\frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctanh} v \frac{k}{\sqrt{gk}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{g}{g + u^2 k}} u \frac{k}{\sqrt{gk}}, \end{aligned}$$

y el tiempo total será

$$t = \frac{1}{\sqrt{gk}} \arctan u \frac{k}{\sqrt{gk}} + \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{g}{g + u^2 k}} u \frac{k}{\sqrt{gk}},$$

si llamamos $\tan \alpha = u\sqrt{\frac{k}{g}}$

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{gk}} \arctan(\tan \alpha) + \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} \tan \alpha, \\ &= \frac{1}{\sqrt{gk}} (\alpha + \operatorname{arctanh} \sin \alpha), \end{aligned}$$

pero existe la identidad

$$\operatorname{arctanh} \phi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \phi}{1 - \phi},$$

de modo que el tiempo será

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{\sqrt{gk}}(\alpha + \ln\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}), \\
&= \frac{1}{\sqrt{gk}}(\alpha + \ln\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}), \\
&= \frac{1}{\sqrt{gk}}(\alpha + \ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}), \\
&= \frac{1}{\sqrt{gk}}(\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha)).
\end{aligned}
$$

(¡¡Este problema no será colocado en pruebas!!)

EJERCICIO 2.8.25 *Un cuerpo se ata a un extremo de un hilo inextensible y el otro extremo del hilo tiene movimiento armónico simple vertical de amplitud a, realizando n oscilaciones completas por segundo. Demuestre que el hilo no permanecerá siempre tenso a menos que*

$$n^2 \leq \frac{g}{4\pi^2 a}.$$

Solución. Para la masa tendremos

$$m\ddot{y} = T - mg,$$

estando y dado por

$$y = a\sin(2\pi nt)$$

entonces

$$
\begin{aligned}
T &= mg - m\ddot{y} \\
&= mg + m4\pi n^2 a\sin 2\pi nt,
\end{aligned}
$$

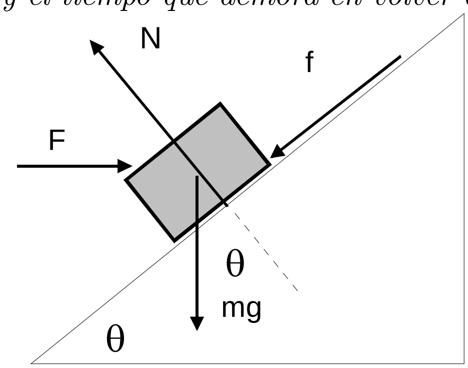
Para que el hilo permanezca tenso debe ser

$$T = mg + m4\pi n^2 a\sin 2\pi nt > 0$$

y entonces

$$
\begin{aligned}
mg &> m4\pi n^2 a \\
n^2 &< \frac{g}{4\pi a}.
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 2.8.26 *Un cuerpo de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ es empujado por una fuerza horizontal F de módulo $15\,\mathrm{N}$, desde el pie de un plano inclinado en 37^o respecto a la horizontal y cuyo coeficiente de roce cinético es 0,2. Si la fuerza F actúa durante tres segundos solamente, determine: la distancia que alcanza a subir por el plano y el tiempo que demora en volver al punto de Partida.*



Solución. Aquí $m = 1\,\mathrm{kg}$, $F = 15\,\mathrm{N}$, $\mu_k = 0{,}2$, $\theta = 37^o$
Tomando el eje x paralelo al plano inclinado e y normal, tenemos

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F\cos\theta - f - mg\sin\theta = ma \\ \sum F_y &= N - F\sin\theta - mg\cos\theta = 0 \\ f &= \mu_k N\end{aligned}$$

entonces

$$f = \mu_k(F\sin\theta + mg\cos\theta)$$

$$a = \frac{F\cos\theta - \mu_k F\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta - mg\sin\theta}{m}$$

$$a\begin{cases}\frac{F(\cos\theta - \mu_k\sin\theta) - mg(\mu_k\cos\theta + \sin\theta)}{m} & \text{si} \quad t < 3 \\ -g(\mu_k\cos\theta + \sin\theta) & \text{si} \quad t > 4\end{cases}$$

calculemos numéricamente

$$a\begin{cases}2.\,56 & \text{si} \quad t < 3 \\ -7.\,62 & \text{si} \quad t > 3\end{cases}$$

así resulta para $t = 3$, $s = \frac{1}{2}(2.\,56) \times 3^2 = 11.\,52\,\mathrm{m}$ y $v = 2{,}56 \times (3) = 7.\,68\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Pasado este tiempo el cuerpo empieza a frenar y

$$\begin{aligned} v &= 7.\,68 - 7{,}62t, \\ s &= 11{,}52 + 7{,}68t - \frac{1}{2}7{,}62t^2, \end{aligned}$$

a) El cuerpo sube hasta que $v = 0$, o sea $7.\,68 - 7{,}62t = 0$, con solución $t = 1.\,01\,\mathrm{s}$ y por lo tanto la distancia que ha subido es

$$s = 11{,}52 + 7{,}68(1.\,01) - \frac{1}{2}7{,}62(1.\,01)^2 = 15.\,39\,\mathrm{m}.$$

En la bajada la fuerza de roce cambia de sentido luego la aceleración de bajada hay que calcularla

$$\begin{aligned} a &= \frac{+\mu_k mg\cos\theta - mg\sin\theta}{m}, \\ &= +\mu_k g\cos\theta - g\sin\theta \\ &= -3.\,622\ \mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

$0{,}3 \times 10\cos\frac{37}{180}\pi - 10\sin\frac{37}{180}\pi =$

b) La bajada desde el punto más alto se inicia a $t = 4{,}01\,\mathrm{s}$ con velocidad inicial cero, luego hacemos

$$0 = 15.\,39 - \frac{1}{2}3.\,622\,(t - 4{,}01)^2,$$

de modo que el tiempo es

$$t = 6.\,93\,\mathrm{s}.$$

▲

2.8.2. Dinámica en dos o tres dimensiones

Ejercicio 2.8.27 *Un cuerpo de masa* $8\,\mathrm{kg}$*, describe una trayectoria cuyas ecuaciones paramétrica son:* $x = 2 + 5t - 2t^2\,\mathrm{m}$ *e* $y = t^2\,\mathrm{m}$*. Determine la fuerza aplicada sobre el cuerpo en* $t = 2\,\mathrm{s}$*.*

Solución. Calculemos $\vec{a}$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(2 + 5t - 2t^2, t^2) = (5 - 4t, 2t), \\ \vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v} = (-4, 2), \end{aligned}$$

luego

$$\vec{F} = m\vec{a} = 8(-4,2) = (-32,16)\,\mathrm{N}.$$

▲

EJERCICIO 2.8.28 *Una partícula de masa* 25 g *se hace girar, de modo que describa una trayectoria circular en un plano vertical, mediante una cuerda de largo* 40 cm. *Si la rapidez angular es constante y de magnitud* 30 *rad* s^{-1}, *calcule: a) La aceleración centrípeta en el punto más alto de la trayectoria. b)La tensión en el punto más bajo de la trayectoria.*

Solución. La aceleración centrípeta es en este caso de magnitud constante

$$a_C = \frac{v^2}{L} = L\omega^2 = 0{,}40 \times (30)^2 = 360{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$

y en el punto más bajo

$$T - mg = ma_C,$$

de donde

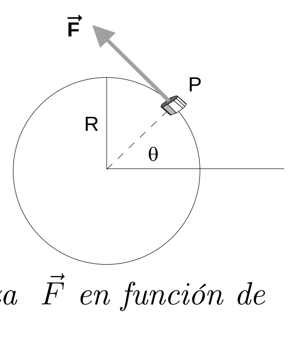
$$T = m(g + a_C) = 0{,}025 \times 370 = 9.\,25\,\mathrm{N}$$

▲

EJERCICIO 2.8.29 *Un anillo P de masa m, está engarzado en un alambre liso, que forma una circunferencia fija de plano vertical y radio R como se indica en la figura. Bajo la acción de una fuerza tangencial $\vec{F}$ de magnitud desconocida, el anillo describe la circunferencia con rapidez angular igual a:*

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}}\left(1 - \frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

determine:



a) La magnitud de la fuerza $\vec{F}$ en función de θ. b)La reacción normal del alambre sobre el anillo.

Solución. La segunda ley de Newton en polares da

$$\begin{aligned} F - mg\cos\theta &= mR\ddot{\theta}, \\ N + mg\sin\theta &= mR\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

$\dot{\theta}$ es dado y $\ddot{\theta}$ puede calcularse de acuerdo a

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}(1 - \frac{1}{2}\sin\theta)\cos\theta,$$

luego

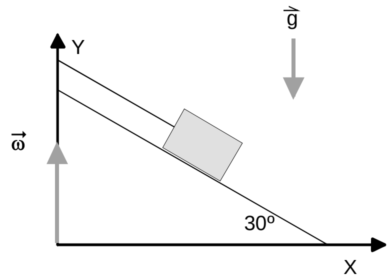
$$\begin{aligned} F &= mg\cos\theta + mR\frac{g}{R}\left(-\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}mg\cos\theta\sin\theta, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N &= -mg\sin\theta + mR\frac{2g}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\sin\,\theta\right)^2 \\ &= mg(2 - 3\sin\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta). \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.8.30 *Un bloque de masa* $5\,\mathrm{kg}$*, descansa sobre un plano inclinado* 30^o *con la horizontal, unida a un eje vertical eje mediante una cuerda de longitud* $10/\sqrt{3}\,\mathrm{m}$*. El plano gira junto con el bloque en torno a un eje vertical con rapidez angular* $\omega = 1$ *rad* s^{-1}*. Calcule:*



a) La tensión en la cuerda; b) La velocidad angular para la cual la partícula abandona el plano.

Solución. En el sentido del eje OY no hay aceleración por lo cual

$$T\sin 30 - mg + N\cos 30 = 0,$$

y

$$T\cos 30 - N\sin 30 = ma_C = mL(\omega)^2\cos 30,$$

de donde podemos despejar T y N

$$\begin{aligned} T &= m\left(g\sin 30 + L\omega^2\cos^2 30\right), \\ N &= m\left(g - L\omega^2\sin 30\right)\cos 30. \end{aligned}$$

Calculando

$$T = 46.65\,\mathrm{N}$$

y para que despegue, $N = 0$ da

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L\sin 30}} = 1.86\ \mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

▲

EJERCICIO 2.8.31 *Una pelota de peso W está unida a una cuerda de longitud L y está moviéndose como péndulo cónico. Es decir, está girando en un círculo horizontal con rapidez constante v_0. Sea θ el ángulo formado por la cuerda y la vertical. Despreciando el peso de la cuerda, determinar: a) La tensión de la cuerda. b) La rapidez v_0 en función de g, L y θ.*

Solución. La componente vertical de la segunda ley es

$$T\cos\theta - mg = 0,$$

y la componente hacia el centro de giro es

$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{R} = m\frac{v_0^2}{L\sin\theta},$$

de la primera

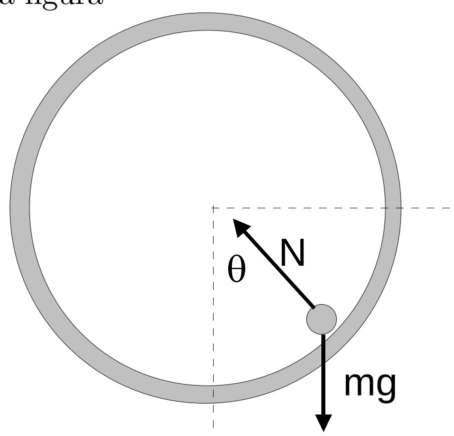
$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{W}{\cos\theta},$$

y de la segunda

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \frac{TL\sin^2\theta}{m} = gL\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = gL\sin\theta\tan\theta, \\ v_0 &= \sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.8.32 *Una partícula da vueltas por el interior de un aro liso vertical de radio R que tiene su plano vertical, sometida a su peso y a la reacción normal. Determine la velocidad mínima que debe tener la partícula en el punto más bajo para que la partícula realice vueltas completas sin perder contacto con el aro.*

Solución. Para la figura



la segunda Ley de Newton, radial y tangencial da

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{R} &= N - mg\cos\theta, \\ m\frac{dv}{dt} &= -mg\sin\theta \end{aligned}$$

o bien la segunda se puede escribir como

$$mR\ddot{\theta} = \frac{mR}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -mg\sin\theta$$

Si llamamos $v_0 = R\dot{\theta}_0$ la rapidez en el punto más bajo, donde $\theta = 0$, podemos integrar la última ecuación obteniendo

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - 1)$$

o bien

$$v_0^2 - v^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

y de allí podemos calcular N que resulta ser

$$\begin{aligned} N &= m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta \\ &= \frac{m}{R}(v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)) + mg\cos\theta \\ &= \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2) \end{aligned}$$

Para que la partícula realice vueltas completas debe ser

$$N = \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2) > 0$$

entonces, en el caso más desfavorable $\theta = \pi$

$$\frac{m}{R}v_0^2 + mg(-3-2) > 0$$

entonces

$$v_0 > \sqrt{5gR}$$

Ejercicio 2.8.33 *Respecto a la situación del problema anterior, si la velocidad en el punto más bajo es la 3/4 de la mínima calculada, determine el punto donde se pierde el contacto.*

Solución. Si en el problema anterior colocamos

$$v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{5gR}$$

entonces

$$\begin{aligned} N &= \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2), \\ &= \frac{m}{R}\frac{9}{16}5gR + mg(3\cos\theta - 2), \\ &= mg(\frac{13}{16} + 3\cos\theta), \end{aligned}$$

que se anula donde $\frac{13}{16} + 3\cos\theta = 0$, o sea en: $\theta = 105{,}7^o$ y allí se pierde el contacto.

Ejercicio 2.8.34 *Respecto a la situación del problema anterior, si la rapidez en el punto más bajo es v_0 determine la reacción normal N en función de θ.*

Solución. Sigue siendo válido que

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = \frac{1}{2}mv^2(\theta) - mgR\cos\theta,$$

de donde

$$v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta) = v^2(\theta).$$

En un punto arbitrario, la ecuación radial es

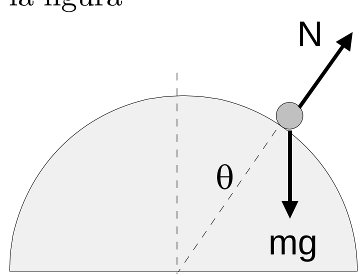
$$N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} = m\frac{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}{R},$$

despejamos N

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\theta + m\frac{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}{R}, \\ &= mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{R} - m2g(1-\cos\theta), \\ &= mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{v_0^2}{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.8.35 *Una partícula de masa m se coloca en el punto más alto de un hemisferio liso de radio R y se perturba levemente de modo que ella comienza a caer deslizando. Determine el punto sobre el hemisferio donde la partícula pierde el contacto con él.*

Solución. Considere la figura



la componente radial de la segunda Ley de Newton es

$$m\frac{v^2}{R} = -N + mg\cos\theta,$$

y conservación de energía

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta = mgR$$

o sea

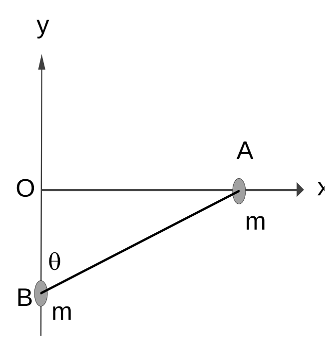
$$v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$$

que sustituida en la primera da

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) \\ &= (3\cos\theta - 2)mg \end{aligned}$$

que se anula donde $\cos\theta = \frac{2}{3}$ o sea el punto de despegue es $\theta = 48{,}19^o$.

EJERCICIO 2.8.36 *Un péndulo cónico que se ilustra en la figura, se mueve manteniendo el ángulo α constante siendo m la masa de la partícula, L el largo del hilo.*



Determine a) La rapidez angular $\dot{\phi}$. b) La tensión del hilo.

Solución. No hay movimiento vertical de manera que

$$T\cos\alpha = mg.$$

En la dirección hacia el centro de giro

$$T\sin\alpha = mr\dot{\phi}^2 = mL\sin\alpha\dot{\phi}^2.$$

Eliminando T se obtiene

$$\frac{L\sin\alpha\dot{\phi}^2}{g} = \tan\alpha,$$

y finalmente

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}.$$

▲

2.8.3. Sistema de partículas

EJERCICIO 2.8.37 *Si cada partícula de un sistema es atraída hacia un punto fijo 0 con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia al punto 0, demuestre que el centro de masa se mueve como si fuera una partícula del sistema.*

Solución. Para cada partícula

$$m_i\vec{a}_i = -Km_i\vec{r}_i$$

es decir que cada partícula se mueve de acuerdo a

$$\vec{a}_i = -K\vec{r}_i.$$

Pero

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}$$
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{a}_i}{M}$$

de modo que si sumamos todas las ecuaciones, obtenemos

$$M\vec{a}_{CM} = -KM\vec{r}_{CM}$$

o sea

$$\vec{a}_{CM} = -K\vec{r}_{CM}$$

misma ecuación de movimiento que la de cada partícula.

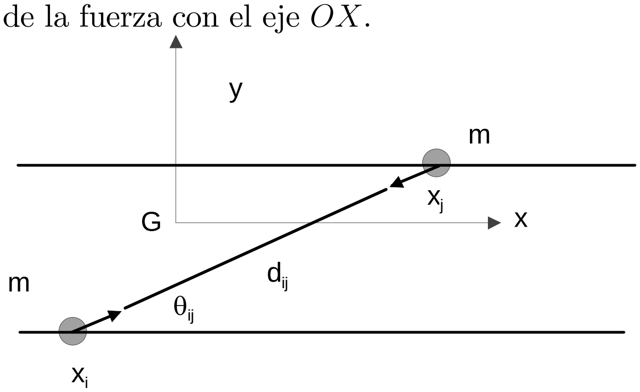
▲

Ejercicio 2.8.38 *Un conjunto de partículas de masas m, puede deslizar libremente sobre alambres paralelos, atrayéndose unas a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y distancias. Demuestre que las partículas efectúan oscilaciones armónicas del mismo período relativas a un plano perpendicular a los alambres y que pasa por el centro de masa supuesto en reposo.*

Solución. Supongamos que las correderas están en dirección OX y considere dos de ellas de índices i, j. La ecuación de movimiento de la m_i en la dirección OX será

$$m_i\ddot{x}_i = \sum_{j\neq i} Km_im_jd_{ij}\cos\theta_{ij}$$

donde d_{ij} indica la distancia entre las de índice i, j, y θ_{ij} es el ángulo que forma la línea de la fuerza con el eje OX.



Como las masas son iguales podemos escribir

$$\ddot{x}_i = Km\sum_{j\neq i}(x_j - x_i).$$

Por otro lado la posición X del centro de masas es

$$x_{CM} = \frac{\sum m_ix_i}{M} = \frac{\sum x_i}{N},$$

entonces incluyendo $i = j$ se tiene

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i &= Km\sum_j(x_j - x_i)\\ &= KmNx_{CM} - KmNx_i,\end{aligned}$$

es decir

$$\ddot{x}_i + KmN(x_i - x_{CM}) = 0,$$

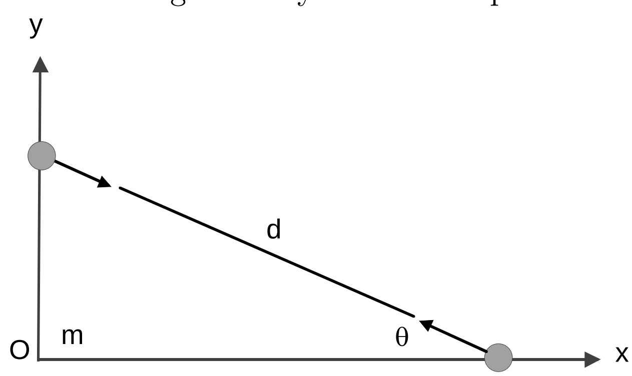
prueba lo pedido, porque

$$\omega^2 = KmN$$

es independiente de i.

EJERCICIO 2.8.39 *Dos partículas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si las partículas deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto, demuestre que el centro de masa describe una cónica con su foco en la intersección de las correderas.*

Solución. Considere la figura. Sea $x = d\cos\theta$, $y = d\sin\theta$ entonces tenemos por aplicación de la segunda Ley de Newton que



$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F\cos\theta = -\frac{k}{d^2}\cos\theta = -\frac{k}{d^3}x \\ m\ddot{y} &= -F\sin\theta = -\frac{k}{d^2}\sin\theta = -\frac{k}{d^3}y \end{aligned}$$

por otro lado $x_{CM} = \frac{x}{2}$ y $y_{CM} = \frac{y}{2}$, $r_{CM} = \frac{d}{2}$ entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{CM} &= -\frac{k}{8mr_{CM}^3}x_{CM}, \\ \ddot{y}_{CM} &= -\frac{k}{8mr_{CM}^3}y_{CM}, \end{aligned}$$

que equivale a

$$\vec{a}_{CM} = -\frac{k}{8mr_{CM}^3}\vec{r}_{CM}.$$

O sea el centro de masas es atraído hacia el origen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al origen. Problema que se estudia en campo central de fuerzas y se demuestra allí que la trayectoria es necesariamente una sección cónica.

▲

EJERCICIO 2.8.40 *Dos partículas de igual masa deslizan sobre correderas lisas perpendiculares que se interceptan en 0. Demuestre que si las partículas se atraen y ellas parten desde el reposo desde posiciones cualquiera sobre las correderas, ellas llegarán simultáneamente a la intersección.*

Solución. Con una figura análoga a la del problema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= -F\cos\theta = -F\frac{x}{d} \\ m_2\ddot{y} &= -F\sin\theta = -F\frac{y}{d} \end{aligned}$$

de donde

$$m_1\ddot{x}y - m_2\ddot{y}x = 0.$$

Como las masas son iguales entonces

$$\begin{aligned} \ddot{x}y - \ddot{y}x &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $\dot{x}y - \dot{y}x$ es constante e igual a cero porque las partículas partieron del reposo, o sea

$$\dot{x}y - \dot{y}x = 0,$$

o bien

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y}$$

que puede integrarse dando

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln c + \ln x, \\ y &= cx \end{aligned}$$

o sea si $x = 0$ entonces simultáneamente $y = 0$.

EJERCICIO 2.8.41 *Dos partículas de masa m cada una se mueven sobre las correderas lisas perpendiculares OX y OY y se atraen con una fuerza proporcional a su distancia, siendo K la constante de proporcionalidad. Si inicialmente:*

$$x(0) = a, \quad y(0) = a,$$
$$\dot{x}(0) = -V_0, \quad \dot{y}(0) = 0,$$

a) Determine $x(t)$, $y(t)$ y b) Determine la ecuación cartesiana de la trayectoria del centro de masa del sistema.

Solución. Similarmente tendremos

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F\cos\theta = -Kd\cos\theta = -Kx \\ m\ddot{y} &= -F\sin\theta = -Fd\sin\theta = -Ky \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ y(t) &= C\cos\omega t + D\sin\omega t, \\ \dot{x}(t) &= \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t), \\ \dot{y}(t) &= \omega(-C\sin\omega t + D\cos\omega t) \end{aligned}$$

y colocando las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned} a &= A, \\ a &= C, \\ -V_0 &= \omega B, \\ 0 &= \omega D \end{aligned}$$

entonces

a)

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos\omega t - \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t, \\ y(t) &= a\cos\omega t. \end{aligned}$$

b) Las coordenadas del centro de masas son

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{x}{2} = \frac{1}{2}a\cos\omega t - \frac{V_0}{2\omega}\sin\omega t, \\ y_{CM} &= \frac{y}{2} = \frac{1}{2}a\cos\omega t, \end{aligned}$$

de donde debemos eliminar t, obteniendo

$$x_{CM} = y_{CM} - \frac{V_0}{2\omega}\sqrt{1 - \left(\frac{2y_{CM}}{a}\right)^2},$$

que se puede escribir así

$$y^2(1 + (\frac{V_0}{a\omega})^2) - 2yx + x^2 = (\frac{V_0}{2\omega})^2.$$

Esto es se trata de una elipse.

Ejercicio 2.8.42 *Dos partículas de igual masa están unidas por un resorte de constante k y largo natural a. Además actúa entre ambas partículas una fuerza amortiguadora proporcional a la rapidez de la variación de la distancia entre ellas. El sistema se coloca en movimiento dándole a una de las partículas una velocidad V_0 perpendicular a la línea que une las partículas. Determine V_0 si después de un tiempo muy largo, el largo del resorte es 2a.*

Solución. Mirado desde el centro de masas, que por viajar a velocidad constante $v_G = \frac{1}{2}V_0$ es un sistema inercial, tenemos que las partículas al comienzo y al final (una vez que las oscilaciones terminan) giran en circunferencias alrededor de el. Así al comienzo

$$\begin{aligned} L_G &= m\frac{1}{2}V_0\frac{a}{2} + m\frac{1}{2}V_0\frac{a}{2} \\ &= \frac{1}{2}mV_0 a. \end{aligned}$$

Al final, si V son las rapideces respecto a G, entonces

$$L_G = mVa + mVa = 2mVa.$$

Como el momentum angular es constante

$$V = \frac{1}{4}V_0.$$

Además, para el movimiento circular de cada partícula

$$m\frac{V^2}{a} = K(2a - a),$$

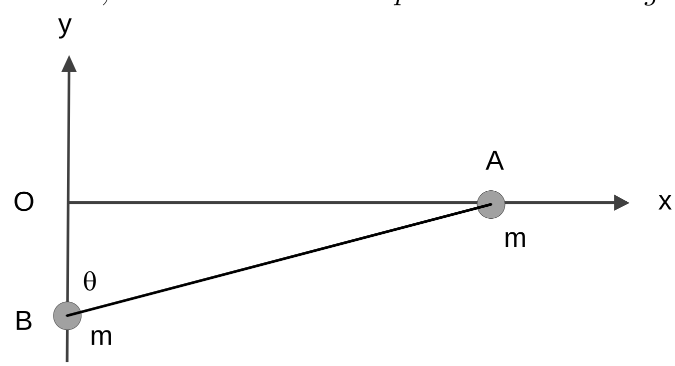
luego

$$V = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$$

y finalmente

$$V_0 = 4V = 4a\sqrt{\frac{K}{m}}.$$

EJERCICIO 2.8.43 *Dos partículas A y B de idéntica masa m, están unidas entre sí por una cuerda inextensible de largo a. La partícula A se mueve por una corredera horizontal lisa OX, mientras que la partícula B se mueve por una corredera vertical lisa OY, ambas en un plano vertical. Inicialmente B está en O y OA = a, con el sistema en reposo. Si θ es el ángulo en B:*



a) Calcular en función de θ las reacciones que ejercen las correderas sobre las partículas. b) Calcular la tensión en la cuerda en función de θ.

Solución. Llamemos N_A, N_B, las reacciones normales de las correderas sobre las partículas y T la tensión de la cuerda. Tenemos

$$x_A = a\sin\theta, \qquad y_B = -a\cos\theta,$$

de allí calculamos

$$\dot{x}_A = a\dot{\theta}\cos\theta, \qquad \dot{y}_B = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

y conservación de energía da

$$E = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - mga\cos\theta = 0,$$

de donde despejamos

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}\cos\theta.$$

La segunda ley aplicada a cada partícula da

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_A &= -T\sin\theta, \\ 0 &= N_A - mg - T\cos\theta, \\ 0 &= N_B + T\sin\theta \\ m\ddot{y}_B &= T\cos\theta - mg \end{aligned}$$

de la primera

$$T = -\frac{m}{\sin\theta}\ddot{x}_A = -\frac{m}{\sin\theta}\frac{d^2}{dt^2}a\sin\theta,$$

como se conoce $\dot{\theta}$ estas derivadas se hacen resultando

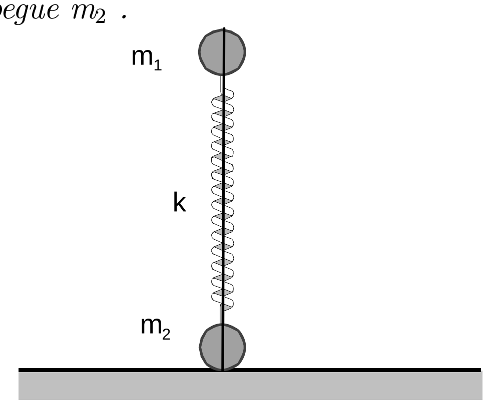
$$T = 3mg\cos\theta,$$

y entonces

$$\begin{aligned} N_A &= mg + 3mg\cos^2\theta, \\ N_B &= -3mg\cos\theta\sin\theta. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.8.44 *Se tiene el sistema de dos partículas m_1 y m_2 de la figura en que el resorte, de constante k no tiene masa. Determinar el valor mínimo de la compresión X del resorte, medido respecto de su largo natural, para que al soltar m_1 se despegue m_2 .*



Solución. Llamemos y a la coordenada de m_1. Inicialmente

$$y(0) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} - X, \qquad \dot{y}(0) = 0.$$

Esto porque el peso de m_1 ya comprime el resorte en $\frac{m_1 g}{k}$. Sea N_2 la reacción del suelo sobre m_2, entonces las ecuaciones de movimiento (antes que m_2 despegue) son

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -m_1 g + k(l_0 - y), \\ 0 &= -k(l_0 - y) - m_2 g + N_2. \end{aligned}$$

Debemos integrar la primera que la reescribimos así

$$\ddot{y}_1 + \frac{k}{m_1} y = -g + \frac{k l_0}{m_1},$$

que tiene solución particular

$$y_{1p} = l_0 - \frac{m_1 g}{k},$$

y solución homogénea

$$y_{1h} = A \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m_1}} t,$$

luego la solución general es

$$y(t) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} + A \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m_1}} t,$$

derivando

$$\dot{y}(t) = -A \sqrt{\frac{k}{m_1}} \sin \sqrt{\frac{k}{m_1}} t + B \sqrt{\frac{k}{m_1}} \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t.$$

Como la velocidad inicial es cero debe ser $B = 0$, luego

$$y(t) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} + A \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t,$$

imponiendo condición inicial resulta

$$l_0 - \frac{m_1 g}{k} + A = l_0 - \frac{m_1 g}{k} - X$$

de donde $A = -X$ entonces

$$y(t) = l_0 - \frac{m_1 g}{k} - X \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t.$$

Ahora podemos evaluar la reacción normal en función del tiempo

$$\begin{aligned} N_2 &= k(l_0 - y) + m_2 g \\ &= k(\frac{m_1 g}{k} + X \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t) + m_2 g \\ &= (m_1 + m_2)g + kX \cos \sqrt{\frac{k}{m_1}} t, \end{aligned}$$

que muestra que N_2 comienza a disminuir con el tiempo y que se anularía con el mínimo valor de X si

$$(m_1 + m_2)g - kX_{\text{mín}} = 0,$$

luego

$$X_{\text{mín}} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}.$$

▲

EJERCICIO 2.8.45 *Tres partículas iguales están inicialmente en línea recta, igualmente espaciadas sobre un plano horizontal liso y unidas por dos hilos de largos "a". La partícula del medio está inicialmente está en reposo, y a las partículas externas se les da una velocidad V_0 perpendicular a la línea que las une. Calcule la velocidad con que chocan las partículas.*

Solución. Al partir si x es la dirección perpendicular a la línea que une las partículas entonces

$$\begin{aligned} P_x &= 2mV_0 \\ K &= \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 \\ &= mV_0^2. \end{aligned}$$

Justo antes del choque, Las tres partículas tienen la misma componente de velocidad en x, llamémosla u, y dos partículas tienen la misma rapidez v en el eje y entonces

$$\begin{aligned} P_x &= 3mu \\ K &= 3\frac{1}{2}mu^2 + 2\frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

Conservación de P_x y K implica

$$u = \frac{2}{3}V_0$$

y

$$\frac{3}{2}(\frac{2}{3}V_0)^2 + v^2 = V_0^2$$

entonces

$$v = \frac{1}{3}\sqrt{3}V_0.$$

▲

2.8.4. Movimiento en un campo central de Fuerza

EJERCICIO 2.8.46 *Una partícula describe una órbita circular en un campo de fuerzas dado por*

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}.$$

Demostrar que si k disminuye bruscamente a la mitad de su valor inicial, la órbita de la partícula se hace parabólica.

Solución. Sea k_0 el valor inicial de la constante. Para una órbita circular

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{r} &= \frac{k_0}{r^2}, \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k_0}{r} = -\frac{k_0}{2r} < 0. \end{aligned}$$

Si k disminuye a la mitad, la energía cinética queda igual

$$K = \frac{k_0}{2r},$$

y la energía potencial sera

$$V = -\frac{k_0}{2r},$$

luego la energía es cero, por lo tanto la órbita es parabólica.

▲

Ejercicio 2.8.47 *Calcular explícitamente la media temporal (o sea, la media en un periodo completo) de la energía potencial de una partícula que se mueve sobre una órbita elíptica en un campo central en el que la fuerza obedece la ley inversa del cuadrado de la distancia. Expresar el resultado en función de la constante de proporcionalidad de la fuerza y del semieje mayor de la elipse. Efectuar un cálculo similar para la energía cinética.*

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} r &= \frac{l_0^2}{mk}\frac{1}{1-e\cos\theta}, \\ l_0 &= mr^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} V &= -\frac{k}{r}, \\ K &= \frac{1}{2}(mv^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right)\frac{l_0^2}{m} \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -\frac{l_0^2 e\sin\theta}{mk\left(1-e\cos\theta\right)^2} \\ &= -\frac{mk}{l_0^2}e\sin\theta r^2 \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2k^2}{l_0^4}e^2\sin^2\theta + \frac{1}{r^2}\right)\frac{l_0^2}{m}$$

entonces

$$\begin{aligned} <\ V >&= \frac{1}{T}\int_0^T V dt = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{V}{\dot{\theta}}d\theta \\ &= -\frac{mk}{Tl_0}\int_0^{2\pi} r d\theta \\ &= -\frac{l_0}{T}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-e\cos\theta}d\theta = -\frac{l_0}{T}\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}. \end{aligned}$$

Similarmente para la energía cinética resulta

$$< K >= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{K}{\dot{\theta}} d\theta = \frac{1}{2}\frac{l_0}{T}\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}$$

▲

EJERCICIO 2.8.48 *Dos partículas iguales que se mueven bajo la influencia de la atracción gravitacional mutua, describen órbitas circulares una en torno de la otra con un período τ. Si repentinamente se detienen y caen una sobre la otra, demostrar que chocarán después de un tiempo*

$$\frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

Solución. Si k representa la constante de la ley de fuerza, y $2a$ la distancia inicial, entonces inicialmente

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{a} &= \frac{k}{4a^2}, \\ v &= \sqrt{\frac{k}{4ma}}, \end{aligned}$$

de modo que el periodo es

$$\tau = \frac{2\pi a}{v} = 2\pi a\sqrt{\frac{4ma}{k}}.$$

Si se detienen, caen una hacia la otra de manera que

$$m\ddot{r} = -\frac{k}{4r^2},\ \dot{r}(0) = 0,\ r(0) = a.$$

Podemos integrar porque

$$\ddot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\dot{r}^2,$$

luego

$$\begin{aligned} m\frac{1}{2}\dot{r}^2 &= \frac{k}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right), \\ \dot{r} &= -\sqrt{\frac{k}{2m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}, \end{aligned}$$

separamos variables

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{2m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}}=-dt,$$

entonces

$$t=\int_0^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{2m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}},$$

sea $r=az$

$$\begin{aligned} t &= a\sqrt{\frac{2ma}{k}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z}-1}} \\ &= \frac{\tau}{2\pi\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z}-1}} \\ &= \frac{\tau}{2\pi\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{\tau}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.8.49 *Dos masas que se atraen, m_1 y m_2 ($m_1+m_2=M$), están separadas una distancia r_0 y se las suelta a partir del reposo. Demostrar que cuando la distancia sea r menor que r_0, las velocidades serán*

$$\begin{aligned} v_1 &= m_2\sqrt{\frac{2G}{M}(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0})}, \\ v_2 &= m_1\sqrt{\frac{2G}{M}(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0})}. \end{aligned}$$

Solución. Tenemos, para un origen en el centro de masa

$$\begin{aligned} m_1\ddot{r}_1 &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \\ m_2\ddot{r}_2 &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \end{aligned}$$

donde $r=r_1+r_2$ y

$$r_1=\frac{m_2}{M}r,\ r_2=\frac{m_1}{M}r,$$

de manera que las dos ecuaciones se reducen a una sola

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2},$$

como

$$\ddot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\dot{r}^2,$$

integramos la ultima obteniendo

$$\dot{r} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)},$$

y de aquí se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= \frac{m_2}{M}\dot{r} = -\frac{m_2}{M}\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = -m_2\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}, \\
\dot{r}_2 &= \frac{m_1}{M}\dot{r} = -\frac{m_1}{M}\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = -m_1\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)},
\end{aligned}$$

que prueban el resultado.

▲

Ejercicio 2.8.50 *Demuestre que la velocidad aerolar es constante en el caso de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza atractiva dada por $F(r) = -kr$. Calcule las medias temporales de las energías cinética y potencial y comparar con los resultados que da el teorema del virial.*

Solución. Lo primero es cierto para todas las fuerzas centrales porque se conserva $\vec{l}_0$. Para obtener las órbitas es preferible usar coordenadas cartesianas siendo

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -kx, \\
m\ddot{y} &= -ky,
\end{aligned}$$

de donde las soluciones son

$$\begin{aligned}
x &= A\cos(\omega t - \alpha), \\
y &= B\cos(\omega t - \beta),
\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega A\sin(\omega t-\alpha),\\ \dot{y} &= -\omega B\sin(\omega t-\beta),\end{aligned}$$

con $\omega=\sqrt{k/m}$. El periodo será $T=2\pi/\omega$ y los promedios solicitados serán

$$\begin{aligned}&< \ V >=\frac{1}{2}K<r^2>=\frac{1}{2}k<A^2\cos^2(\omega t-\alpha)+B^2\cos^2(\omega t-\beta)>,\\ &< \ K >=\frac{1}{2}m<v^2>=\frac{1}{2}m<\omega^2A^2\sin^2(\omega t-\alpha)+\omega^2B^2\sin^2(\omega t-\beta)>\end{aligned}$$

pero

$$<\cos^2\omega t>=<\sin^2\omega t>=\frac{1}{2},$$

resultando

$$\begin{aligned}&< \ V >=\frac{1}{4}k(A^2+B^2),\\ &< \ K >=\frac{1}{4}m\omega^2(A^2+B^2)=<V>.\end{aligned}$$

Las constantes A y B pueden relacionarse con la energía E de acuerdo a

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2\sin^2(\omega t-\alpha)+B^2\sin^2(\omega t-\beta))+\frac{1}{2}k(A^2\cos^2(\omega t-\alpha)+B^2\cos^2(\omega t-\beta))\\ &= \frac{1}{2}k(A^2\sin^2(\omega t-\alpha)+B^2\sin^2(\omega t-\beta))+\frac{1}{2}k(A^2\cos^2(\omega t-\alpha)+B^2\cos^2(\omega t-\beta))\\ &= \frac{1}{2}kA^2+\frac{1}{2}kB^2\end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$<K>=<V>=\frac{1}{2}E.$$

▲

EJERCICIO 2.8.51 *Estudiar el movimiento de una partícula repelida por un centro de fuerzas de acuerdo con la ley $F(r)=kr$ con $k>0$. Demostrar que la órbita sólo puede ser hiperbólica.*

Solución. Aquí también conviene usar coordenada cartesianas

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= kr\cos\theta = kx, \\ m\ddot{y} &= kr\sin\theta = ky. \end{aligned}$$

Ambas pueden integrarse siendo $k/m = p$ en la forma

$$\begin{aligned} x &= Ae^{pt} + Be^{-pt}, \\ y &= Ce^{pt} + De^{-pt}. \end{aligned}$$

Para determinar la trayectoria, debemos eliminar t entre esas dos ecuaciones. Para ello las escribimos

$$\begin{aligned} Ae^{2pt} - xe^{pt} + B &= 0, \\ Ce^{2pt} - ye^{pt} + D &= 0, \end{aligned}$$

y resolviendo ecuaciones de segundo grado tenemos

$$e^{pt} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4AB}}{2A} = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4CD}}{2C},$$

y haciendo algo de álgebra

$$\begin{aligned} \frac{x}{2A} - \frac{y}{2C} &= \frac{\sqrt{y^2 - 4CD}}{2C} - \frac{\sqrt{x^2 - 4AB}}{2A}, \\ -\frac{1}{2}\frac{xy}{AC} &= -\frac{D}{C} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(y^2 - 4CD)}}{C}\frac{\sqrt{(x^2 - 4AB)}}{A} - \frac{B}{A}, \end{aligned}$$

reordenando

$$2BC + 2AD - xy = -\sqrt{(y^2 - 4CD)}\sqrt{(x^2 - 4AB)}$$

elevando al cuadrado y reordenando

$$4ABy^2 + 4CDx^2 - 4(BC + AD)xy = -4\left(AD - BC\right)^2,$$

que es la ecuación de una hipérbola porque el lado derecho es negativo.

Ejercicio 2.8.52 *Una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza central dada por*

$$F(r) = -\frac{k}{r^n}.$$

Demuestre que si la órbita es circular y pasa por el centro de fuerzas, entonces $n = 5$.

Solución. La ecuación de Binet para $u = 1/r$ es

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2}.$$

Si la partícula describe una circunferencia de radio R donde está el centro de fuerza, la ecuación puede escribirse

$$r = 2R\cos\theta,$$

o sea

$$u = \frac{1}{2R\cos\theta},$$

derivando

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{2R\cos^2\theta}\sin\theta, \\
\frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{1}{2R\cos\theta} + \frac{1}{R\cos^3\theta}\sin^2\theta \\
&= \frac{1}{2R\cos\theta} + \frac{1-\cos^2\theta}{R\cos^3\theta} \\
&= -\frac{1}{2R\cos\theta} + \frac{1}{R\cos^3\theta} \\
&= -u + 8R^2u^3,
\end{aligned}$$

de aquí sigue

$$8R^2u^3 = -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2},$$

$$\begin{aligned}
F(\frac{1}{u}) &= -\frac{8R^2l_0^2}{m}u^5, \\
F(r) &= -\frac{8R^2l_0^2}{mr^5}.
\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.53 *Suponga un cometa que describe una órbita parabólica en el mismo plano que la órbita terrestre. Si la menor distancia del cometa al Sol es γR_T donde R_T es el radio de la órbita de la Tierra (supuesta circular) y $\gamma < 1$, demostrar que el tiempo que el cometa pasa dentro de la órbita terrestre viene dado por*

$$\sqrt{2(1-\gamma)}(1+2\gamma)/3\pi \ \textit{años}$$

Solución. La ecuación de la órbita del cometa será de la forma (una parábola)

$$r = \frac{c}{1-\cos\theta},$$

pero debe ser

$$r_{\text{mín}} = \frac{c}{2} = \gamma R_T,$$

o sea

$$r = \frac{2\gamma R_T}{1-\cos\theta}.$$

Los puntos (θ_1 y $2\pi - \theta_1$) donde la órbita del cometa cruza la órbita terrestre están dados por

$$R_T = \frac{2\gamma R_T}{1-\cos\theta_1},$$

de donde

$$\cos\theta_1 = 1 - 2\gamma.$$

Por otro lado, el elemento de área barrida por el cometa es

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| dt = \frac{l_0}{2m}dt,$$

donde

$$\frac{l_0^2}{mk} = 2\gamma R_T,$$

y

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta,$$

de modo que

$$\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{l_0}{2m}dt,$$

de aquí sigue

$$dt = \frac{m}{l_0} r^2 dt = \frac{l_0^3}{mk^2} (\frac{1}{1-\cos\theta})^2 d\theta,$$

luego el tiempo será

$$t = \frac{l_0^3}{mk^2} \int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} (\frac{1}{1-\cos\theta})^2 d\theta = \frac{l_0^3}{mk^2} \frac{1}{3} \frac{1+3\tan^2\frac{1}{2}\theta_1}{\tan^3\frac{1}{2}\theta_1}$$

El factor que multiplica lo anterior está relacionado con el período terrestre. En efecto

$$\frac{l_0^2}{mk} = 2\gamma R_T \Longrightarrow l_0 = \sqrt{mk2\gamma R_T},$$

entonces

$$\frac{l_0^3}{mk^2} = \sqrt{\frac{m2\gamma R_T}{k}} 2\gamma R_T = \sqrt{\frac{2\gamma R_T}{GM_S}} 2\gamma R_T,$$

y el periodo terrestre está dado por

$$T_T = \frac{2\pi R_T}{\sqrt{GM_S}} \sqrt{R_T},$$

luego

$$t = \gamma\sqrt{2\gamma} \frac{T_T}{\pi} \frac{1}{3} \frac{1+3\tan^2\frac{1}{2}\theta_1}{\tan^3\frac{1}{2}\theta_1}$$

pero

$$\cos\theta_1 = 1-2\gamma, \ \ \tan\frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{2-2\gamma}}$$

y reemplazando $\tan\frac{\theta_1}{2}$ resulta finalmente

$$t = T_T\,(1+2\gamma)\,\frac{\sqrt{2(1-\gamma)}}{3\pi}.$$

▲

Ejercicio 2.8.54 *Estudiar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales que sigue la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia, si además se superpone otra fuerza de magnitud inversamente proporcional al cubo de la distancia entre la partícula y el centro de fuerzas. Es decir,*

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}$$

con $k > 0$.Demuestre que la trayectoria es una elipse que rota o precesa.

Solución. La ecuación de Binet para la órbita será

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2}+u &= -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2}=\frac{m}{l_0^2u^2}(ku^2+\lambda u^3)\\ &= \frac{mk}{l_0^2}+\frac{\lambda m}{l_0^2}u.\end{aligned}$$

De aquí sigue

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+(1-\frac{\lambda m}{l_0^2})u=\frac{mk}{l_0^2}$$

cuya solución es

$$u=\frac{1}{r}=\frac{mk}{(l_0^2-\lambda m)}+A\cos\sqrt{(1-\frac{\lambda m}{l_0^2})}\theta,$$

y si $\frac{\lambda m}{l_0^2}\ll 1$ corresponde a una curva parecida a una elipse pero que no se cierra en una vuelta completa.

EJERCICIO 2.8.55 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral dada por $r=k\theta$, siendo k una constante positiva.*

Solución. De nuevo, la ecuación de Binet es la clave

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2},$$

siendo

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{r}=\frac{1}{k\theta},\\ \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{k\theta^2},\\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{2}{k\theta^3}=2k^2u^3,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$-\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2}=2k^2u^3+u,$$

despejando

$$\begin{aligned} F(\frac{1}{u}) &= -\frac{l_0^2}{m}(2k^2u^5 + u^3), \\ F(r) &= --\frac{l_0^2}{m}(\frac{2k^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}). \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.56 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral logarítmica dada por* $r = Ke^{a\theta}$ *siendo* k *y* a *constantes.*

Solución. Es análogo, donde ahora

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} = \frac{1}{K}e^{-a\theta}, \\ \frac{du}{d\theta} &= -\frac{a}{K}e^{-a\theta} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{a^2}{K}e^{-a\theta} = a^2u, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$-\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2} = a^2u + u,$$

despejando

$$\begin{aligned} F(\frac{1}{u}) &= -\frac{l_0^2}{m}(a^2+1)u^3, \\ F(r) &= -\frac{l_0^2}{m}(a^2+1)\frac{1}{r^3}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.57 *Una partícula de masa unidad se desplaza desde el infinito a lo largo de una recta que, de seguir, haría que la partícula pasase a una distancia* $b\sqrt{2}$ *de un punto* P. *Si la partícula es atraída hacia* P *con una fuerza proporcional a* $\frac{k}{r^5}$ *y el momento angular respecto de* P *es* $\sqrt{k}/b$ *, demuestre que la trayectoria está dada por*

$$r = b\coth(\theta/\sqrt{2}).$$

Solución. La ecuación de Binet será

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2}+u &= -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2} \\ &= \frac{ku^5}{\frac{k}{b^2}u^2}=b^2u^3,\end{aligned}$$

o sea

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u-b^2u^3=0.$$

O la resolvemos, problema dificil, o comprobamos que

$$u=\frac{1}{b}\tanh(\theta/\sqrt{2}),$$

es solución. Comprobaremos:

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{b\sqrt{2}}(1-\tanh^2(\theta/\sqrt{2}))=\frac{1}{b\sqrt{2}}(1-b^2u^2),$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-2bu)\frac{1}{b\sqrt{2}}(1-b^2u^2)=u\left(-1+b^2u^2\right),$$

que prueba que se trata de una solución. Faltaría probar que la asíntota de la trayectoria pasa a distancia $b\sqrt{2}$ del origen. Notemos que $r=\infty\Longrightarrow u=0$ o $\theta\Longrightarrow 0$ sea la asíntota es una recta paralela al eje OX (el eje polar). La distancia al origen de esa recta se obtiene haciendo $\theta\to 0$ en $r\sin\theta$ esto es la distancia es

$$d=\lim_{\theta\to 0}(b\coth\frac{\theta}{\sqrt{2}}\sin\theta)=b\sqrt{2}.$$

▲

EJERCICIO 2.8.58 *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerzas con una fuerza proporcional a la distancia de la partícula al centro. Demuestre que la trayectoria es una curva plana que puede ser representada por las ecuaciones:*

$$\begin{aligned}x &= A\cos(nt+\alpha),\\ y &= B\sin(nt+\beta)\end{aligned}$$

Solución. Las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas serán

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{y} &= -ky, \end{aligned}$$

que tienen soluciones de la forma dada si $k/m = n^2$.

▲

EJERCICIO 2.8.59 *Determine la fuera central si la órbita es una circunferencia y el centro de fuerza está situado sobre la circunferencia.*

Solución. *En realidad este problema está repetido. La ecuación de Binet para $u = 1/r$ es*

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2}.$$

Si la partícula describe una circunferencia de radio R donde está el centro de fuerza, la ecuación puede escribirse

$$r = 2R\cos\theta,$$

o sea

$$u = \frac{1}{2R\cos\theta},$$

derivando

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{2R\cos^2\theta}\sin\theta, \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{1}{2R\cos\theta} + \frac{1}{R\cos^3\theta}\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2R\cos\theta} + \frac{1-\cos^2\theta}{R\cos^3\theta} \\ &= -\frac{1}{2R\cos\theta} + \frac{1}{R\cos^3\theta} \\ &= -u + 8R^2u^3, \end{aligned}$$

de aquí sigue

$$8R^2u^3 = -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2},$$

$$\begin{aligned} F(\frac{1}{u}) &= -\frac{8R^2 l_0^2}{m} u^5, \\ F(r) &= -\frac{8R^2 l_0^2}{mr^5}. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.8.60 *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerza 0 por una fuerza de forma k/r^2. La partícula es lanzada desde un punto P con una velocidad. de magnitud V_0 en un ángulo α respecto de OP. Demuestre que la órbita es una elipse si $OP \leq 2k/(mV_0^2)$. Determine además, en términos de m, k, V_0 ,α , y $OP = r_0$ la excentricidad de la órbita y la inclinación del eje mayor respecto de OP.*

Solución. Evaluamos según las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{k}{r_0}, \\ l_0 &= m r_0 V_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

La excentricidad es

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2El_0^2}{mk^2} \\ &= 1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0})l_0^2}{mk^2}. \end{aligned}$$

La órbita será una elipse si $E < 0$, es decir si

$$(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0}) < 0 \Longrightarrow r_0 < \frac{2k}{mV_0^2}.$$

Si además reemplazamos l_0 se obtiene

$$e = \sqrt{1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0})mr_0^2 V_0^2 \sin^2 \alpha}{k^2}}.$$

La ecuación de la órbita es

$$\begin{aligned} r &= \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)} \\ &= \frac{mr_0^2 V_0^2 \sin^2 \alpha}{k} \frac{1}{1 - e\cos(\theta - \beta)}, \end{aligned}$$

y el ángulo β queda determinado de

$$r_0 = \frac{mr_0^2 V_0^2 \sin^2 \alpha}{k} \frac{1}{1 - e\cos(\beta)},$$

que es una ecuación que dejamos planteada por si alguien quiere resolverla.

▲

Ejercicio 2.8.61 *Admitiendo que la tierra es una esfera fija de radio R y despreciando la resistencia del aire, considere el lanzamiento de un proyectil con rapidez inicial V_0 formando un ángulo ξ_0 con la vertical del lugar. Si*

$$V_e^2 = \frac{2GM}{R},$$

donde G es la constante de gravitación, M la masa terrestre y $V_0 < V_e$, demuestre que la excentricidad y la ecuación de la trayectoria del proyectil son:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{1 - \sin^2(2\beta)\sin^2(\xi_0)}, \\ R/r &= \frac{(1 - e\cos(\theta - \alpha))}{2\sin^2(\beta)\sin^2(\xi_0)} \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \sin\beta &= V_0/V_e, \\ \sin\alpha &= \sin^2\beta\sin(2\xi_0)/e. \end{aligned}$$

Aquí: α representa la inclinación del semieje mayor, ξ_0 ángulo de lanzamiento respecto a la vertical.

Solución. Podemos usar los resultados del problema anterior pero colocando $k = GMm$ y $r_0 = R$. Así tenemos

$$\begin{aligned}
e &= \sqrt{1 + \frac{(mV_0^2 - \frac{2GMm}{R})mR^2V_0^2 \sin^2 \xi_0}{G^2M^2m^2}} \\
&= \sqrt{1 + \frac{4(V_0^2 - \frac{2GM}{R})R^2V_0^2 \sin^2 \xi_0}{4G^2M^2}} \\
&= \sqrt{1 + \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2 \sin^2 \xi_0}{V_e^4}} \\
&= \sqrt{1 - 4(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2})\frac{V_0^2}{V_e^2} \sin^2 \xi_0} \\
&= \sqrt{1 - 4(1 - \sin^2 \beta) \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0} \\
e &= \sqrt{1 - \sin^2 2\beta \sin^2 \xi_0}.
\end{aligned}$$

Pura álgebra. Además

$$\begin{aligned}
\frac{l_0^2}{mk} &= \frac{2R^2V_0^2 \sin^2 \xi_0}{2GM} \\
&= \frac{2RV_0^2 \sin^2 \xi_0}{V_*^2} \\
&= 2R \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0,
\end{aligned}$$

por lo cual la ecuación de la trayectoria será

$$r = \frac{2R \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}$$

Aquí α representa la inclinación del semi eje mayor de la cónica.

Para $\theta = 0$, $r = R$

$$1 = \frac{2 \sin^2 \beta \sin^2 \xi_0}{1 - e \cos \alpha} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
1-2\sin^2\beta\sin^2\xi_0 &= e\cos\alpha \\
\cos\alpha &= \frac{1-2\sin^2\beta\sin^2\xi_0}{\sqrt{1-\sin^2 2\beta\sin^2\xi_0}} \\
\sin^2\alpha &= 1-\frac{(1-2\sin^2\beta\sin^2\xi_0)^2}{1-\sin^2 2\beta\sin^2\xi_0} \\
&= \frac{1-\sin^2 2\beta\sin^2\xi_0-(1-2\sin^2\beta\sin^2\xi_0)^2}{e^2} \\
\text{bastante álgebra}\cdots &\Longrightarrow \\
\sin\alpha &= \frac{\sin^2\beta\sin 2\xi_0}{e}.
\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.8.62 *Con respecto al problema anterior, $V_0 < V_e/\sqrt{2}$ demuestre que el ángulo de disparo para tener un alcance máximo está dado por:*

$$\sin\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-(V_0/V_e)^2}},$$

y el ángulo para la altura máxima por

$$\sin(\alpha) = \frac{(V_0/V_e)^2}{1-(V_0/V_e)^2}.$$

¿ Qué ocurre sí $V_0 \geq V_e/\sqrt{2}$?

Solución. *Debemos maximizar*

$$\sin\alpha = \frac{\sin^2\beta\sin 2\xi_0}{e},$$

respecto a ξ_0 siendo

$$e = \sqrt{1-\sin^2 2\beta\sin^2\xi_0}.$$

Derivamos

$$\frac{d}{d\xi_0}\frac{\sin 2\xi_0}{\sqrt{1-\sin^2 2\beta\sin^2\xi_0}} = 0,$$

▲

es bastante trabajo, pero resulta

$$\sin \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - V_0^2/V_e^2}}.$$

El máximo resultará al reemplazar en

$$\sin\alpha = \frac{\sin^2\beta\sin 2\xi_0}{\sqrt{1 - \sin^2 2\beta\sin^2\xi_0}},$$

con más álgebra resulta

$$\sin\alpha = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{V_0^2/V_e^2}{1 - V_0^2/V_e^2}$$

Ejercicio 2.8.63 *Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R con rapidez V_0 atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporciona al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez se reduce a la mitad, determine en términos de R_0 y V_0: la ecuación de la nueva órbita, su excentricidad y la distancia mínima de la partícula al centro durante el movimiento siguiente.*

Solución. Para la órbita circular

$$m\frac{v_0^2}{R_0} = \frac{k}{R_0^2},$$

entonces

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{mR_0}}$$

que reducida a la mitad implica

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\frac{k}{mR_0} - \frac{k}{R_0} \\
&= -\frac{7}{8}\frac{k}{R_0} \\
l_0 &= mR_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mR_0}} = \frac{1}{2}\sqrt{mR_0k},
\end{aligned}$$

luego

$$e^2 = 1 + \frac{2(-\frac{7}{8}\frac{k}{R_0})\frac{1}{4}mR_0k}{mk^2} = \frac{9}{16} \Longrightarrow e = \frac{3}{4},$$

y

$$\frac{l_0^2}{mK} = \frac{\frac{1}{4}mR_0k}{mk} = \frac{1}{4}R_0,$$

luego la nueva órbita es (tomando $\alpha = 0$)

$$r = \frac{1}{4}R_0\frac{1}{1-\frac{3}{4}\cos\theta} = \frac{R_0}{4-3\cos\theta}.$$

▲

EJERCICIO 2.8.64 *Una partícula de masa $m = 1$ es atraída por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a un punto fijo 0 y se mueve describiendo la elipse:*

$$r = \frac{100}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}.$$

Si en el punto más alejado de su trayectoria, la rapidez de la partícula es $V = 1$, determine la constante de la ley de fuerza. Si en el punto más alejado, la rapidez de la partícula es duplicada, determine la ecuación de la nueva órbita.

Solución. Aquí como $m = 1$

$$\frac{l_0^2}{k} = 100,$$

el punto más alejado es

$$r_{\text{máx}} = \frac{100}{1-\frac{1}{2}} = 200,$$

luego

$$\begin{aligned} l_0 &= |m\vec{r}\times\vec{v}| = 200 \Longrightarrow \\ k &= \frac{(l_0)^2}{100} = \frac{200^2}{100} = 400. \end{aligned}$$

Si en el punto más alejado la rapidez se hace $V = 2$,calculamos

$$\begin{aligned} l_0 &= |m\vec{r}\times\vec{v}| = 200\times 2 = 400, \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}4 - \frac{400}{200} = 0 \rightarrow \\ e &= 1, \\ \frac{l_0^2}{mk} &= \frac{(400)^2}{400} = 400, \end{aligned}$$

de modo que la nueva órbita es

$$r = \frac{400}{1 - \cos(\theta - \alpha)},$$

una parábola. Para determinar el ángulo α consideramos que en $\theta = 0$, $r = 200$ de modo que

$$200 = \frac{400}{1 - \cos(\alpha)}$$

de donde $\alpha = \pi$ y finalmente

$$r = \frac{400}{1 + \cos(\theta)}.$$

▲

Ejercicio 2.8.65 *Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R_0 con rapidez V_0 atraída hacía el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez de la partícula se aumenta a $V = \sqrt{\alpha} V_0$ siendo $\alpha > 1$, demuestre que si $\alpha \geq 2$ la partícula se aleja hasta el infinito. Para $\alpha < 2$, determine la ecuación de la nueva órbita en términos de R_0, V_0 y α.*

Solución. Tenemos para la órbita circular

$$V_0 = \sqrt{\frac{k}{mR_0}},$$

la nueva rapidez

$$V = \sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{k}{mR_0}},$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\alpha\frac{k}{R_0} - \frac{k}{R_0}, \\ l_0 &= mR_0\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{k}{mR_0}}. \end{aligned}$$

La excentricidad es

$$e^2 = 1 + \frac{2(\frac{1}{2}\alpha\frac{k}{R_0} - \frac{k}{R_0})(mR_0\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{k}{mR_0}})^2}{mk^2} = (\alpha - 1)^2 .$$

Entonces

$$e = \alpha - 1,$$

que es una parábola o hipérbola si $\alpha \geq 2$. Si $\alpha < 2$ resultará

$$\begin{aligned} r &= \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - (\alpha - 1)\cos\theta} \\ &= \frac{R_0 \alpha}{1 - (\alpha - 1)\cos\theta}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.66 *Determine las posibles leyes de fuerza central si una partícula describe bajo su acción una circunferencia, con el centro de fuerzas en el interior del círculo.*

Solución. Si el origen está sobre un diámetro a distancia d del centro, la ecuación de la circunferencia será (teorema del coseno)

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2dr\cos\theta,$$

de

$$\begin{aligned} 0 &= r\frac{dr}{d\theta} + dr\sin\theta - d\cos\theta\frac{dr}{d\theta}, \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{dr\sin\theta}{d\cos\theta - r}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\frac{dr\sin\theta}{d\cos\theta - r}$$

$$r = d\cos\theta + \sqrt{(d^2\cos^2\theta + R^2 - d^2)},$$

de aquí

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{d\cos\theta + \sqrt{(d^2\cos^2\theta + R^2 - d^2)}}$$

Lo dejaremos hasta aquí, por ser demasiada el álgebra necesaria. Calcule

$$\frac{du}{d\theta}, \ \frac{d^2u}{d\theta^2},$$

expréselas en términos de u y reemplace en la ecuación de Binet.

▲

EJERCICIO 2.8.67 *Considere una partícula que se mueve en un campo central atractivo k/r^2 con $k < 0$. Demuestre que para un momentum angular dado, la mínima energía que puede tener la partícula es:*

$$E = -\frac{mk^2}{2l_0^2}.$$

Solución. *Sabemos que la energía es*

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r},$$

y

$$l_0 = mr^2\dot{\theta},$$

de modo que la energía puede escribirse

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} - \frac{k}{r},$$

a la distancia r_1 donde r es mínimo $\dot{r} = 0$ y entonces

$$E = \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr_1^2} - \frac{k}{r_1},$$

función que tiene un mínimo donde

$$-\frac{l_0^2}{mr_1^3} + \frac{k}{r_1^2} = 0 \Longrightarrow r_1 = \frac{l_0^2}{mk},$$

y luego

$$E_{\text{mín}} = \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{m}\frac{m^2k^2}{l_0^4} - k\frac{mk}{l_0^2} = -\frac{mk^2}{2l_0^2}.$$

▲

EJERCICIO 2.8.68 *Un cohete de masa m es disparado desde un punto de la superficie de la tierra con una rapidez inicial V_0 haciendo un ángulo ξ_0 con la vertical del lugar. Despreciando la rotación terrestre, la resistencia del aire y el movimiento de la tierra, demuestre que la excentricidad de la trayectoria está dada por:*

$$e^2 = 1 + \frac{R^2V_o^2 sen^2\xi_0}{G^2M^2}\left(V_0^2 - \frac{2GM}{R}\right),$$

y la trayectoria es:

$$r = \frac{R^2 V_o^2 sen^2 \xi_0}{GM(1 - e\cos(\theta - \alpha))}.$$

Aquí R es el radio terrestre, M la masa de la tierra y G la constante de gravitación. ¿Cuál es la ubicación del eje polar?

Solución. *Tenemos que*

$$\begin{aligned} l_0 &= mV_0 R \sin \xi_0, \\ E &= \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GMm}{R}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{(mV_0^2 - \frac{2GMm}{R}) m^2 V_0^2 R^2 \sin^2 \xi_0}{mG^2 M^2 m^2} \\ &= 1 + \frac{V_0^2 R^2 \sin^2 \xi_0}{G^2 M^2} (V_0^2 - \frac{2GM}{R}). \end{aligned}$$

Además

$$\frac{l_0^2}{mK} = \frac{m^2 V_0^2 R^2 \sin^2 \xi_0}{GMm^2} = \frac{R^2 V_0^2 \sin^2 \xi_0}{GM},$$

que prueban lo solicitado.

▲

EJERCICIO 2.8.69 *Respecto al problema anterior, suponga que $V_0 = \sqrt{GM/R}$ y $\xi_0 = 30^o$. Demuestre entonces que el proyectil caerá de regreso a la tierra en un punto situado a una distancia $R\pi/3$ del punto de partida, medida sobre la superficie de la tierra. Demuestre además que la altura máxima del proyectil sobre la superficie terrestre es de alrededor de $0{,}866\,R$.*

Solución. *Particularizamos a $V_0 = \sqrt{GM/R}$ y $\xi_0 = 30^o$ resultando*

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 - \frac{R^2 \sin^2 \frac{\pi}{6}}{G^2 M^2} (\frac{G^2 M^2}{R^2}), \\ &= 1 - \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}, \\ \frac{l_0^2}{mK} &= R \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{R}{4}, \end{aligned}$$

luego

$$r = \frac{R}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\theta - \alpha)},$$

en $\theta = 0$, $r = R$ *luego*

$$R = \frac{R}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\alpha)} \Rightarrow \alpha = 30^o,$$

evidentemente el proyectil caerá de nuevo a la Tierra en $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^o$ *y eso corresponde a un arco* $R\frac{\pi}{3}$. *Además el máximo* r *será*

$$r = \frac{R}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} = 1.866\,03R,$$

y eso corresponde a una altura máxima de $1.866\,03R - R = 0{,}866\,03R$

Ejercicio 2.8.70 *Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio* R_0 *con rapidez* V_0 *atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la velocidad se reduce a la mitad, determine en términos de* R_0 *y* V_0 *la ecuación de la nueva órbita.*

Solución. Sabemos que

$$V_0 = \sqrt{\frac{k}{mR_0}},$$

luego

$$k = mR_0V_0^2,$$

la nueva energía será

$$E = \frac{1}{2}m\frac{1}{4}V_0^2 - \frac{mR_0V_0^2}{R_0} = -\frac{7}{8}mV_0^2,$$

el nuevo momentum angular

$$l_0 = mR_0\frac{V_0}{2},$$

luego

$$e^2 = 1 + \frac{-\frac{7}{4}mV_0^2m^2R_0^2\frac{V_0^2}{4}}{m(m^2R_0^2V_0^4)} = \frac{9}{16},$$

luego

$$\begin{aligned} r &= \frac{(mR_0\frac{V_0}{2})^2}{m^2R_0V_0^2}\frac{1}{1-\frac{3}{4}\cos\theta} \\ &= \frac{\frac{1}{4}R_0}{1-\frac{3}{4}\cos\theta}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.71 *Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre M, la constante de gravitación G, Ω la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente aumentada al doble.*

Solución. Si Ω denota la velocidad angular terrestre entonces órbita geo estacionaria significa

$$v_0 = \Omega r_0$$

además de (problema anterior)

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

con estas se puede obtener:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{\Omega}\sqrt[3]{(GM\Omega)}, \\ v_0 &= \sqrt[3]{(GM\Omega)}. \end{aligned}$$

Sea por un momento $v_0 = 2\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ la velocidad inicial. Entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m4\frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= G\frac{Mm}{r_0} \\ l_0 &= mr_0 2\sqrt{\frac{GM}{r_0}} \end{aligned}$$

entonces

$$e^2 = 1 + \frac{2G\frac{Mm}{r_0}4m^2r_0^2\frac{GM}{r_0}}{mG^2M^2m^2} = 9$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{4m^2 r_0^2 \frac{GM}{r_0}}{mGMm} \frac{1}{1 - 3\cos(\theta - \alpha)} \\ &= \frac{4r_0}{1 - 3\cos(\theta - \alpha)} \end{aligned}$$

Si el ángulo polar se mide desde donde cambió la velocidad entonces debe ser $\alpha = \pi$ y finalmente

$$\begin{aligned} r &= \frac{4r_0}{1 + 3\cos\theta} \\ &= \frac{4}{\Omega}\sqrt[3]{(GM\Omega)} \frac{1}{1 + 3\cos\theta} \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.8.72 *Un satélite de masa m está en órbita circular de radio* $2R$ *en torno a la tierra supuesta esférica, de masa* M *y radio* R*, en reposo y sin atmósfera. Si la velocidad se altera en un punto de la órbita en un factor* f*, determine: a) la ecuación de la nueva órbita. b) el rango de valores de f para los cuales el satélite chocará con la tierra. c) el rango de valores de f para los cuales el satélite se aleja indefinidamente.*

Solución. Para la órbita circular

$$v = \sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

la nueva rapidez es

$$v = f\sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

la nueva energía es

$$E = \frac{1}{2} m f^2 \frac{GM}{2R} - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{4} GMm \frac{f^2 - 2}{R},$$

el nuevo momentum angular es

$$l_0 = m(2R) f \sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

la excentricidad será dada por

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{m(GMm)^2} = \left(f^2 - 1\right)^2,$$

de donde

$$e = \left|f^2 - 1\right|.$$

además

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{(m(2R)f\sqrt{\frac{GM}{2R}})^2}{mGMm} = 2Rf^2,$$

de manera que la nueva órbita es

$$r = \frac{2Rf^2}{1 - |f^2 - 1| \cos(\theta - \alpha)}.$$

Si el cambio de la rapidez ocurre en $\theta = 0$ debe ser

$$2R = \frac{2Rf^2}{1 - |f^2 - 1| \cos(\alpha)},$$

de donde

$$\begin{aligned} 1 - \left|f^2 - 1\right| \cos(\alpha) &= f^2, \\ \cos\alpha &= \frac{1 - f^2}{|1 - f^2|}. \end{aligned}$$

Si $f < 1 \Longrightarrow \cos\alpha = 1$ entonces

$$r = \frac{2Rf^2}{1 - (1 - f^2)\cos\theta}.$$

Si $f > 1 \Longrightarrow \cos\alpha = -1$ entonces

$$r = \frac{2Rf^2}{1 + (f^2 - 1)\cos\theta}.$$

El satélite puede chocar con la Tierra sólo si $f < 1$ y para saberlo hay que ver si la ecuación

$$r = \frac{2Rf^2}{1 - (1 - f^2)\cos\theta} = R,$$

tiene o no solución. Esta es

$$2f^2 = 1 - (1 - f^2)\cos\theta,$$

despejando

$$\cos\theta = \frac{1-2f^2}{1-f^2} > -1,$$

debe ser

$$1 - 2f^2 > f^2 - 1$$

de donde

$$f < \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Para este caso, el satélite chocará con la Tierra. Por último, el satélite no regresa si $e = |f^2 - 1| > 1$ o sea si $f > \sqrt{2}$.

▲

Ejercicio 2.8.73 *Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre M, la constante de gravitación G, Ω la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente reducida a la mitad.*

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= -\frac{7}{8}\frac{GMm}{r_0} \\ l_0 &= mr_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{r_0}} \end{aligned}$$

entonces

$$e^2 = 1 + \frac{2(-\frac{7}{8}\frac{GMm}{r_0})\frac{1}{4}m^2r_0^2\frac{GM}{r_0}}{mG^2M^2m^2} = \frac{9}{16}$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{m^2 r_0^2 \frac{1}{4}\frac{GM}{r_0}}{mGMm} \frac{1}{1-\frac{3}{4}\cos(\theta-\alpha)} \\ &= \frac{1}{4} r_0 \frac{1}{1-\frac{3}{4}\cos(\theta-\alpha)} \\ &= \frac{1}{\Omega}\sqrt[3]{(GM\Omega)}\frac{1}{4-3\cos\theta} \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.8.74 *Considere la tierra como esférica, en reposo de masa M y radio R, sin atmósfera. Se lanza un proyectil con rapidez inicial V_0 formando un ángulo β respecto a la horizontal. Determine el arco que el proyectil recorre hasta llegar al suelo (si lo hace). Discuta las condiciones bajo las cuales el proyectil cae nuevamente al suelo. La constante de gravitación es G.*

Solución. La energía es

$$E = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GMm}{R},$$

el momentum angular es

$$l_0 = mRV_0 \cos\beta,$$

la excentricidad será

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R})m^2R^2V_0^2\cos^2\beta}{m(GMm)^2} \\ &= 1 + \frac{(V_0^2 - \frac{2GM}{R})R^2V_0^2\cos^2\beta}{(GM)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{m^2R^2V_0^2\cos^2\beta}{mGMm} = \frac{R^2V_0^2\cos^2\beta}{GM},$$

de modo que la trayectoria es

$$r = \frac{R^2V_0^2\cos^2\beta}{GM}\frac{1}{1-e\cos(\theta-\alpha)}.$$

Para la notación, introducimos la velocidad de escape

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

de manera que

$$e^2 = 1 - \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^4},$$

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{2RV_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2},$$

de modo que la trayectoria es

$$r = \frac{2RV_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2} \frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}.$$

Si $r(0) = R$ hay necesariamente dos puntos donde la trayectoria intersecta a la superficie de la Tierra. Esos ángulos son $\theta = 0$ y $\theta = 2\alpha$, además de $e < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} R &= \frac{2RV_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2} \frac{1}{1 - e\cos\alpha}, \\ R &= \frac{2RV_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2} \frac{1}{1 - e\cos(\theta_1 - \alpha)}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\theta_1 - \alpha = \alpha \Longrightarrow \theta_1 = 2\alpha,$$

y de cualquiera de las anteriores

$$1 - e\cos\alpha = \frac{2V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2},$$

o sea

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1 - \frac{2V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2}}{e} \\ \cos\alpha &= \frac{1 - \frac{2V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^2}}{\sqrt{1 - \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^4}}}. \end{aligned}$$

Esta expresión la hemos visto de diversas forma en otros problemas. Si

$$z = V_0^2 / V_e^2$$

entonces

$$\cos\alpha = \frac{1 - 2z\cos^2\beta}{\sqrt{1 - 4(1-z)z\cos^2\beta}},$$

que puede escribirse

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1 - 2z\cos^2\beta}{\sqrt{(1 - 2z\cos^2\beta)^2 + z^2\sin^2 2\beta}} \\ &= \frac{1 - 2z\cos^2\beta}{|1 - 2z\cos^2\beta|}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2\sin^2 2\beta}{(1-2z\cos^2\beta)^2}}}.\end{aligned}$$

Hay dos casos

a) Si $1 - 2z\cos^2\beta > 0$, o sea

$$z < \frac{1}{2\cos^2\beta},$$

ángulos de disparo grandes, entonces

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2\sin^2 2\beta}{(1-2z\cos^2\beta)^2}}}.$$

b) Si $1 - 2z\cos^2\beta < 0$, o sea

$$1 > z > \frac{1}{2\cos^2\beta}$$

ángulos de disparo pequeños, entonces

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2\sin^2 2\beta}{(1-2z\cos^2\beta)^2}}}.$$

Note que si $1 - 2z\cos^2\beta = 0$

$$\cos\alpha = 0,$$

esto es el semieje mayor está a 90^o del punto de lanzamiento, y el proyectil cae diametralmente opuesto por la Tierra al punto de lanzamiento.

Capítulo 3

TRABAJO Y ENERGÍA

Consideremos un cuerpo sobre le cual actúan fuerzas. Si el cuerpo es una partícula, las fuerzas se pueden sumar vectorialmente para obtener la fuerza resultante y mediante la segunda ley de Newton, se determina la aceleración y usando las herramientas del cálculo finalmente podremos obtener la posición futura de la partícula en términos de las condiciones iniciales de posición y de velocidad. Si el cuerpo es un sólido rígido son relevantes los puntos de aplicación de cada fuerza y no es tan simple determinar el movimiento y el futuro de tal cuerpo. Mucho más dificil será si el sistema es un fluido. Por ahora nos limitaremos a ver lo que ocurre en relación a una partícula en relación al concepto de energía. El concepto de energía se origina al tratar de integrar la segunda ley de Newton escrita en la forma

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

de donde sigue al multiplicar escalarmente por un vector desplazamiento infinitésimo $d\vec{r}$ dado por

$$d\vec{r} = \hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy + \hat{k}dz,$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

pero el lado izquierdo puede modificarse a

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = md\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d(\frac{1}{2}mv^2),$$

o sea es la diferencial de una función. Luego

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{3.1}$$

Aquí se define.

3.0.5. Energía cinética

Se define la energía cinética de una partícula mediante

$$K = \frac{1}{2}mv^2,$$

siendo su unidad llamada Joule: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$.

3.0.6. Trabajo diferencial realizado por una fuerza

Si una fuerza $\vec{F}$ se desplaza un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ se define el trabajo realizado por ella en ese desplazamiento mediante

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

por lo tanto (3.1) se llama teorema energía- cinética trabajo en su versión diferencial.

▶ Teorema 3.1
Un trabajo infinitesimal causa una variación de la energía cinética de acuerdo a

$$dK = dW.$$

Debe que la letra d en dK y la letra d en dW tienen distinto significado. La primera indica una diferencial. La segunda es simplemente parte del nombre dado al trabajo infinitésimo.

▶ Teorema 3.2
Teorema energía cinética−trabajo. Si el teorema anterior se integra entre dos puntos (i) y (f) de la trayectoria, entonces se obtiene

$$K_f - K_i = W_{i\to f.}$$

donde se ha definido

$$W_{i\to f.} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

3.0.7. Fuerzas conservativas (C) y no conservativas (NC)

El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ escrita en componentes cartesianas

$$\vec{F} = \hat{\imath}F_x + \hat{\jmath}F_y + \hat{k}F_z, \tag{3.2}$$

es

$$W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}, \tag{3.3}$$

y como el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ es

$$d\vec{r} = \hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy + \hat{k}dz,$$

resulta

$$W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \tag{3.4}$$

Este trabajo será independiente del camino si el integrando es la diferencial de alguna función, es decir si

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV.$$

El signo menos es convencional. La existencia de esa función V llamada energía potencial define a lo que se denomina una fuerza conservativa. Para estas fuerzas se tiene que

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

y su trabajo será en este caso

$$W_{i\to f}^{C} = \int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -(V_f - V_i). \tag{3.6}$$

que es obviamente independiente del camino.

3.0.8. Energías potenciales

Para algunas fuerzas conservativas importantes, se listan a continuación sus energías potenciales.

Fuerza peso

Para la fuerza constante peso, si el eje OY es vertical hacia arriba, ella puede escribirse

$$\vec{F} = -mg\hat{\jmath}$$

y la energía potencial asociada al peso es

$$V = mgy. \tag{3.7}$$

Fuerza elástica

Para la fuerza elástica

$$\vec{F} = -kx\hat{\imath}, \tag{3.8}$$

la energía potencial resulta ser

$$V = \frac{1}{2}kx^2. \tag{3.9}$$

Fuerza gravitacional

Para la fuerza gravitacional

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}, \tag{3.10}$$

sus componentes son

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}x, \\ F_y &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}y, \\ F_z &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}z, \end{aligned}$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pero es simple establecer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} &= -\frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} &= -\frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} &= -\frac{x}{r^3}, \end{aligned}$$

luego las componentes de la fuerza gravitacional pueden escribirse

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{Gm_1m_2}{r}), \\ F_y &= -\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{Gm_1m_2}{r}), \\ F_z &= -\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{Gm_1m_2}{r}) \end{aligned}$$

de donde identificamos la energía potencial asociada a la fuerza gravitacional

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \tag{3.11}$$

Fuerza electrostática

Para la fuerza electrostática

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}, \tag{3.12}$$

la energía potencial resulta ser

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}, \tag{3.13}$$

con explicación similar dada para la fuerza gravitacional.

NOTA 3.1 Para el lector que domine matemáticas más avanzadas. Hemos buscado energía potenciales mediante un método que podríamos llamar de simple inspección. Sin embargo existe un método más general. La fuerza es conservativa si

$$\nabla \times \vec{F} = 0.$$

Luego, si ese es el caso, se tiene que

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(V(\vec{r}) - V(\vec{r}_1),$$

para cualquier camino que vaya de $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}$. Como la fuerza es conocida esa integral puede hacerse y se obtiene

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Si $\vec{r}_1$ se elige adecuadamente como punto de referencia puede tomarse $V(\vec{r}_1) = 0$.

3.0.9. Teoremas sobre la energía

Por su importancia se agrupan aquí los teoremas relativos a la energía y al trabajo.

▶ TEOREMA 3.3
Teorema energía–trabajo. Si $E = K + V$ representa la energía mecánica de la partícula entonces

$$E_f - E_i = W_{i\to f}^{NC}. \tag{3.14}$$

DEMOSTRACION 12
Se ha demostrado que

$$K_f - K_i = W_{i\to f},$$

si la fuerza se separa en sus posibles partes conservativas y no conservativas entonces

$$W_{i\to f} = W_{i\to f}^{C} + W_{i\to f}^{NC} = -(V_f - V_i) + W_{i\to f}^{NC},$$

luego se obtiene

$$\begin{aligned} K_f - K_i &= -(V_f - V_i) + W_{i\to f}^{NC}, \\ K_f + V_f - (K_i + V_i) &= W_{i\to f}^{NC}, \end{aligned}$$

que prueba el teorema.

▶ TEOREMA 3.4
Teorema de conservación de la energía cinética. Si $W_{i\to f} = 0$ entonces

$$K_i = K_f.$$

DEMOSTRACION 13
Este teorema sigue directamente de

$$K_f - K_i = W_{i\to f}, \tag{3.15}$$

haciendo $W_{i\to f} = 0$

▶ Teorema 3.5
Teorema de conservación de la energía mecánica. Si $W_{i\to f}^{NC} = 0$ *entonces*

$$E_i = E_f.$$

Demostracion 14
Este teorema sigue directamente de

$$E_f - E_i = W_{i\to f}^{NC}, \tag{3.16}$$

haciendo $W_{i\to f}^{NC} = 0$. *Debe remarcarse que la energía se conservará en todos los casos donde no hay fuerzas no conservativas o bien si existen, ellas no realizan trabajo. Por ejemplo, las reacciones normales que son fuerzas no conservativas, no realizan trabajo por ser el desplazamiento del cuerpo perpendicular a la fuerza.*

3.1. Sobre la energía

En general, el hombre desea poner en movimiento las cosas para satisfacer diferentes necesidades. En otras palabras se desea que los cuerpos adquieran energía cinética. De acuerdo a lo explicado, una forma de lograrlo es mediante una fuerza que realice algún trabajo. Pero obtener una fuerza que realice trabajo no es tan simple. Por ejemplo para mover un automóvil, un tren, un avión o simplemente mover un motor, de donde sacar la fuerza que lo haga. De acuerdo al teorema de conservación de energía, que se supone válido en esta discusión, si un cuerpo gana energía, entonces otro la pierde. Afortunadamente existen en la Tierra muchas fuentes de energía. Estas en general son sistemas que tienen energía potencial acumulada. Por ejemplo una cantidad de agua a cierta altura tiene energía potencial acumulada. Los núcleos de los átomos tienen energía eléctrica almacenada. Los combustible fósiles tienen energía potencial acumulada, de naturaleza química. Otra pregunta surge. ¿Quién realizó el trabajo necesario para acumular esas cantidades de energía? Casi sin excepción la respuesta es: nuestro Sol. La enorme energía liberada por el Sol y parcialmente recibida en la Tierra, causa a lo largo del tiempo esas acumulaciones de energía potencial. Los árboles crecen, se transforman eventualmente en Carbón que posee una enorme cantidad de energía acumulada. O, los mares se evaporan, llueve sobre la cordillera y allí tenemos una enorme cantidad de energía potencial acumulada. Hay una enorme cantidad de otros ejemplos: la energía del viento, la energía de las mareas del mar, la energía de las tempestades, etcétera.

Mención aparte recibe la energía acumulada en los núcleos atómicos. Fue necesario vencer la enorme repulsión eléctrica de los protones para formar los núcleos de los átomos, que al formarse, tienen una enorme cantidad de energía acumulada. Al final, la fuerza responsable de que eso haya ocurrido largo tiempo atrás en alguna estrella, es la enorme fuerza gravitacional presente en los núcleos de las estrellas como consecuencia de su enorme masa. Sin embargo para que esa energía quede acumulada, se requiere de algo que mantenga al núcleo unido. La fuerza responsable de que ello ocurra es la fuerza nuclear.

Utilizar esas energías acumuladas ha sido posible gracias al gran desarrollo de la tecnología.

El desafió actual consiste en tratar de utilizar la mayor de las fuerzas conocidas por el hombre para estos fines: la fuerza nuclear. La fuerza nuclear es la responsable de la estabilidad de los núcleos atómicos, es siempre atractiva, de enorme magnitud y de muy corto alcance y se manifiesta entre los componentes del núcleo atómico, protones y neutrones.

De manera que para que la fuerza nuclear se manifieste y realice algún trabajo, se hace necesario acercar protones a muy corta distancia, tarea muy dificil porque ellos se repelen y muy intensamente cuando se tratan de acercar. Los intentos de realizar este proceso en la Tierra en forma controlada han avanzado, pero no hay certeza de cuando se logrará. Este proceso, llamado de fusión nuclear, es logrado en los centros de las estrellas y el agente responsable de que esto ocurra es la enorme presión que ejerce la masa de la estrella sobre su centro producto de la fuerza gravitacional.

3.1.1. La energía cinética de los asteroides

Hace aproximadamente 65 millones de años atrás un asteroide de alrededor de $R = 20\,\mathrm{km}$ de radio y una velocidad del orden $v = 20\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ impactó la Tierra y causó el fin de la mayor parte de la vida en la Tierra. Si suponemos una densidad del orden de $\rho = 5000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ (5 veces la del agua) su energía cinética sería

$$K = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\pi R^3\rho)v^2 = 8.38 \times 10^{24}\,\mathrm{J},$$

y como 1 megaton $= 4{,}2 \times 10^{15}$ J esa energía equivale aproximadamente a

$$K = 2 \times 10^9 \text{ megatones},$$

quizás la explosión de todo el arsenal nuclear actual. La bomba atómica de Hiroshima fue del orden $\frac{1}{60}$ megaton. Vea más detalles sobre las consecuencias de ese impacto en http://www.eas.purdue.edu/eas109/ Day %20the %20 Dinosaurs %20Died.htm

3.1.2. Integración de la ecuación de movimiento

El propósito de la dinámica es: dadas las condiciones iniciales de un sistema y las fuerzas, determinar mediante la segunda ley de Newton las posición y velocidad futura del sistema. La segunda ley de Newton, también llamada ecuación de movimiento, determina la aceleración del sistema $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$. Luego hay un problema matemático. Conocida la fuerza resultante deberemos integrar la ecuación de movimiento y obtener la velocidad $\vec{v}(t)$ y posición $\vec{r}(t)$ si se conocen las condiciones iniciales del movimiento, es decir la velocidad y posición iniciales $\vec{v}(0)$ y $\vec{r}(0)$. Como veremos dependiendo de las fuerzas actuando, la integración de la ecuación de movimiento es más o menos simple.

Para el caso de la dinámica de *un* cuerpo la fuerza podría depender del tiempo, de su posición y de su velocidad, es decir la ecuación que resulta es

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}), \tag{3.17}$$

que en general no puede integrarse directamente porque el lado derecho, la fuerza, depende precisamente de la incógnita $\vec{r}(t)$ y de su derivada $\vec{v}(t)$. En el apéndice se profundiza más sobre diversos casos integrable y aquí nos limitamos a los principales. En el capítulo de sistemas de partículas se explican las dificultades adicionales que se presentan en el caso de la dinámica de varios cuerpos.

Como posiblemente los alumnos de este curso aún no dominan el tema de las integrales y menos el de las ecuaciones diferenciales, deje para más adelante la comprensión de todos los pasos intermedios, pero analice los resultados y sus aplicaciones.

Fuerza constante

De la segunda ley

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

es inmediato obtener por dos integraciones sucesivas

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \frac{\vec{F}}{m}t, \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{F}}{2m}t^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Estos resultados coinciden con lo establecido en la sección de cinemática para el caso en que la aceleración es constante.

Fuerza dependiente del tiempo $\vec{F}(t)$

Aquí se puede dejar expresado

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \frac{1}{m}\int_0^t \vec{F}(t')dt', \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{m}\int_0^t dt'' \int_0^{t''} \vec{F}(t')dt', \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde las integrales se podrán hacer cuando la fuerza sea dada en forma explícita.

Fuerza dependiente de la posición

En movimiento unidimensional. Si $\vec{F} = F(x)\hat{\imath}$ tenemos que

$$m\ddot{x} = F(x), \tag{3.20}$$

pero existe la identidad

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\dot{x}^2,$$

de modo que se tiene una ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\dot{x}^2 = \frac{1}{m}F(x),$$

de donde

$$\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(0) = \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)dx,$$

o bien

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)dx} = \frac{dx}{dt}, \tag{3.21}$$

y podemos finalmente separar variables en la forma

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)dx}},$$

e integrar por segunda vez

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x} F(x)dx}}. \tag{3.22}$$

El problema estaría resuelto si dada $F(x)$, la integral la realizamos y es posible de allí despejar $x(t)$. Tarea no necesariamente simple.

Lo anterior puede simplificarse o calcularse para casos específicos de fuerzas.

Por ejemplo la fuerza elástica

$$F(x) = -kx,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} t &= \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{2}{m}\int_{x(0)}^{x} kxdx}} \\ &= \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{k}{m}(x^2 - x^2(0))}}. \end{aligned}$$

Sin perder demasiado podemos suponer que $x(0) = 0$ de modo que

$$\begin{aligned}
t &= \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{k}{m}x^2}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{m}{k}\dot{x}^2(0) - x^2}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0)}
\end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t. \tag{3.23}$$

Más detalles serán dados al estudiar más adelante el llamado movimiento armónico simple.

Para el último caso particular, existe un método alternativo más fácil. En efecto de

$$m\ddot{x} = -kx,$$

y si se define

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

tenemos que

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

y usted puede fácilmente comprobar que una solución general es de la forma

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi).$$

La evaluación de las constantes C y ϕ según sean las condiciones iniciales $x(0)$, $\dot{x}(0)$, se hará más adelante al estudiar el movimiento armónico simple.

3.1.3. Energía en el movimiento armónico simple

Para la situación de la figura donde no hay roce la energía potencial elástica es

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

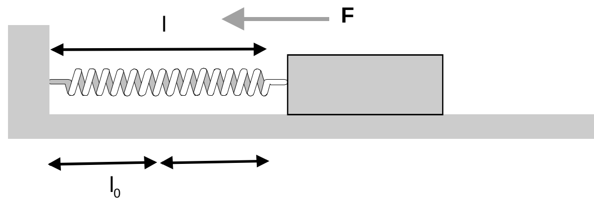


Figura 3.1:

y si no hay otras fuerzas actuando o ellas no realizan trabajo (peso y Normal) entonces la energía total E se conserva, esto es

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}. \tag{3.24}$$

3.1.4. Amplitud del movimiento

La constante A se conoce como la amplitud del movimiento. Se caracteriza que cuando x tiene ese valor, entonces la partícula se detiene e invierte su movimiento. Si usamos la conservación de la energía podemos relacionar la posición con la velocidad en la forma

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{3.25}$$

Esta última relación entre velocidad y posición puede escribirse con $v = \dot{x}$

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2, \tag{3.26}$$

$$\left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1, \tag{3.27}$$

que es la ecuación de una elipse sobre la cual se destacan las velocidades máximas $v = \pm\omega A$ y desplazamientos máximos $x = \pm A$.

3.1.5. Dinámica del movimiento circular

Cuando un cuerpo está restringido a moverse en una trayectoria circunferencial, es mejor utilizar coordenadas polares. Aquí el radio será constante y

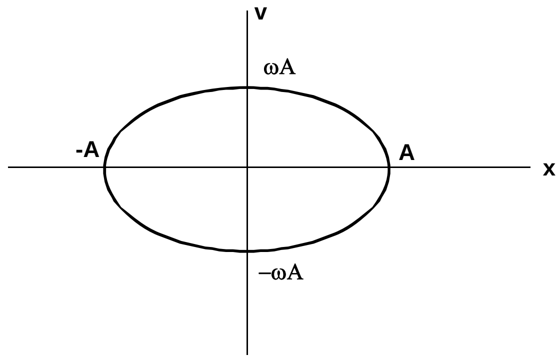
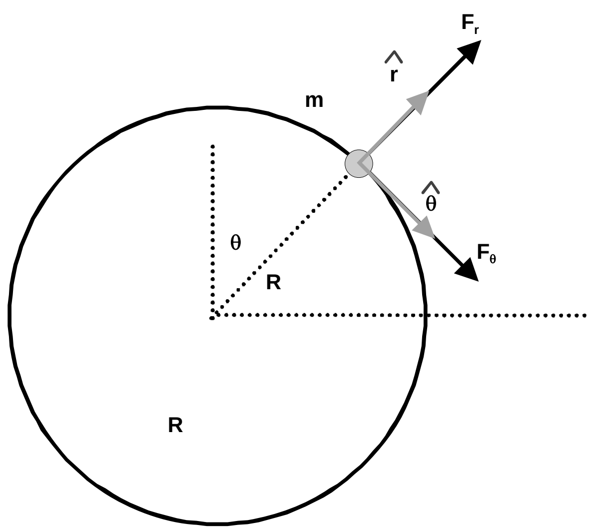


Figura 3.2:

variará solamente la coordenada angular θ. En la figura se ilustran las componentes polares de la fuerza que actúa sobre la partícula F_r y F_θ. Recordando lo establecido en el capítulo de cinemática

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}, \tag{3.28}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}, \tag{3.29}$$



la segunda ley de Newton en componentes polares será

$$F_r = m(-R\dot{\theta}^2), \tag{3.30}$$

$$F_\theta = mR\ddot{\theta}. \tag{3.31}$$

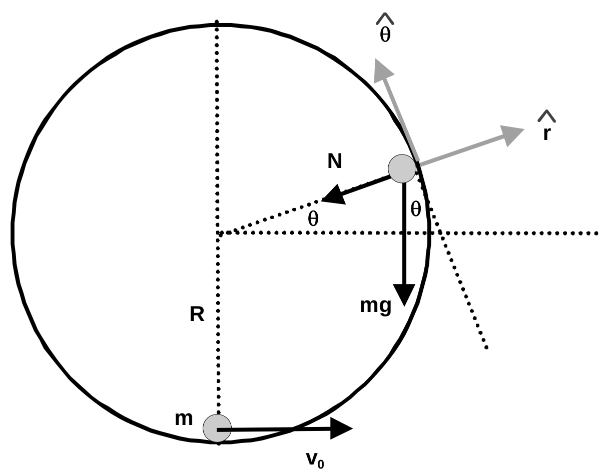


Figura 3.3:

En los desplazamientos de la partícula la componente F_r por ser perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo. Si la componente F_θ es una fuerza conservativa la energía será constante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \text{ constante.} \tag{3.32}$$

Si hay roce entonces la energía no es constante.

Ejemplo 3.1.1 *Una partícula de masa m puede moverse por el interior de una superficie circular lisa de radio R cuyo plano está vertical. Inicialmente la partícula parte del punto más bajo con una rapidez inicial v_0. Analice las diversas posibilidades que tiene el movimiento de la partícula en función de la rapidez inicial.*

Solución. La figura ilustra las dos fuerzas que actúan sobre la partícula mientras ella permanezca en contacto con la superficie. Antes de plantear nada matemático usted debe darse cuenta de las posibilidades y luego que eso esté claro, proceder a un análisis más detallado. Es más o menos evidente que si la rapidez inicial es pequeña, la partícula efectuará oscilaciones. Si ella es más grande, la partícula puede perder el contacto pasado los noventa grados. Si es mayor aún, podrá dar vueltas completas. Las ecuaciones generales se reducen en este caso a

$$\begin{aligned} F_r &= -N - mg\sin\theta = m(-R\dot{\theta}^2), && (3.33)\\ F_\theta &= -mg\cos\theta = mR\ddot{\theta}, && (3.34)\\ E &= \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mg(R + R\sin\theta). && (3.35) \end{aligned}$$

De la tercera

$$\frac{v_0^2}{R} - 2g(1+\sin\theta) = R\dot{\theta}^2$$

De la primera, eliminando $\dot{\theta}^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} N &= -mg\sin\theta + m(\frac{v_0^2}{R} - 2g(1+\sin\theta)),\\ N &= \frac{mv_0^2}{R} - mg(3\sin\theta + 2). \end{aligned}$$

de la primera

$$N - mR\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta \qquad (3.36)$$

- Vueltas completas. La partícula realizará vueltas completas si N permanece positiva para todo θ. Observando la expresión para N es caso más desfavorable ocurre si $\theta = \pi$, luego la condición será

  $$\frac{mv_0^2}{R} + mg(-3-2) \geqq 0,$$

  o sea

  $$v_0 \geqq \sqrt{5gR}.$$

- Oscilaciones. Para que esto ocurra la partícula debe detenerse antes que la normal se anule. Esto significa que $\dot{\theta} = 0$ antes que N se anule. Pero si $\theta > 0$ la ecuación (3.36) indica que

  $$\begin{aligned} N - mR\dot{\theta}^2 &= -mg\sin\theta < 0,\\ N &< mR\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

  o sea no puede anularse $\dot{\theta}$ primero. Luego pueden haber oscilaciones sólo si $\dot{\theta} = 0$ para $\theta < 0$, y eso requiere que

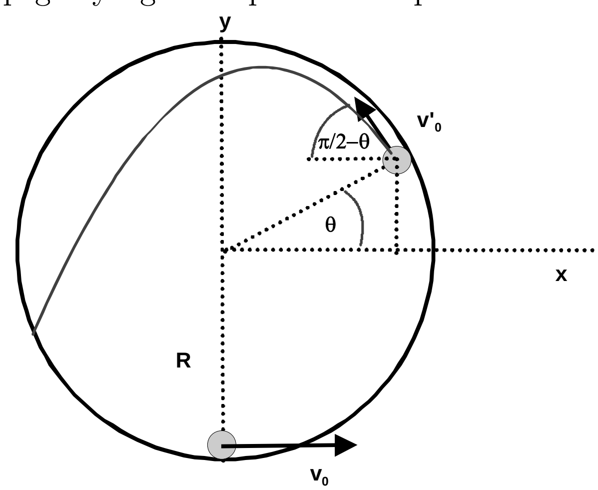
  $$\frac{v_0^2}{R} - 2g(1+\sin\theta) = 0 \text{ para } \theta < 0,$$

de donde
$$v_0 = \sqrt{2gR(1+\sin\theta)} \leqslant \sqrt{2gR}.$$

- Despegues. Para que la partícula despegue, pierda el contacto, debe ser $N = 0$ con $0 < \theta < \pi/2$ luego

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{mv_0^2}{R} - mg(3\sin\theta + 2), \\ v_0 &= \sqrt{gR(2+3\sin\theta)}, \\ \sqrt{2gR} &< v_0 < \sqrt{5gR}. \end{aligned}$$

- Análisis del despegue y siguiente punto de impacto



Sea $\theta > 0$ el ángulo del despegue. De $N - mR\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta$ para $N = 0$ podemos evaluar
$$v_0' = R\dot{\theta} = \sqrt{gR\sin\theta},$$
y usando las ecuaciones de los proyectiles

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta - v_0' t\cos(\pi/2 - \theta), \\ y &= R\sin\theta + v_0' t\sin(\pi/2 - \theta) - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

reduciendo

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta - \sqrt{gR\sin\theta}\, t\sin\theta, \\ y &= R\sin\theta + \sqrt{gR}\sqrt{\sin\theta}\, t\cos\theta - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

calculemos

$$x^2 + y^2 = R^2 - g\sqrt{gR}\sqrt{\sin\theta}t^3\cos\theta + \frac{1}{4}g^2t^4$$

y para $x^2 + y^2 = R^2$ que caracteriza al punto de caída, se obtiene el tiempo

$$t = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt{\sin\theta}\cos\theta$$

y así evaluamos las coordenadas del punto de caída resultando después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} x &= R\cos 3\theta = R\cos(-3\theta), \\ y &= -R\sin 3\theta = R\sin(-3\theta). \end{aligned}$$

Esto es el punto de caída se produce en el ángulo -3θ.

3.1.6. Bonus Track

Como se sabe, la mecánica clásica falla en varios ámbitos. Especialmente en el mundo atómico y a velocidades muy cercanas a la velocidad de la luz. Pero ¿cómo? si no andamos ni cerca de la velocidad de la luz. Sin embargo algunos datos del reactor LHC del Cern nos dicen otra cosa.

Algunos datos. Se acelerarán protones hasta que adquieran una energía (cinética) de $7\ T\,\mathrm{eV}$ y el número de protones de cada haz (habrán dos) es de $3.\,229\,2 \times 10^{14}$ protones. Con estos dos datos se pueden calcular varias cosas, pero se necesitan versiones apropiadas (relativistas) de alguna fórmula y ciertos datos.

Energía cinética (relativista)

$$K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \tag{Krel}$$

Velocidad de la luz

$$c = 2{,}99792458 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Masa en reposo de un protón

$$m_0 = 1{,}6726231 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Algunas conversiones

$$\begin{aligned}
1\ T\,\mathrm{eV} &= 10^{12}\,\mathrm{eV} = 1{,}60217646 \times 10^{-7}\,\mathrm{J} \\
1\ Megaton &= 4{,}184 \times 10^{15}\,\mathrm{J} \\
& \quad 1\,\mathrm{y} = 31\,556\,926\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Cálculos

Energía cinética de cada protón

$$K = 7 \times 1{,}60217646 \times 10^{-7}\,\mathrm{J} = 1.\,121\,523\,522 \times 10^{-6}\,\mathrm{J}.$$

Esta energía cinética de cada protón corresponde a una rapidez que se calcula en la sección siguiente.

Rapidez de los protones

Hay que despejar v de la ecuación **??**

$$v_P = \frac{\sqrt{2Km_0c^2 + K^2}}{K + m_0c^2}c,$$

o reordenando

$$\begin{aligned}
v_P &= \sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{K + m_0c^2}\right)^2}\,c = \\
&= 0{,}999\,999\,991\,c
\end{aligned}$$

Caaaaaaaaaaaaaassssssssssssssssssiiiiiiiiiiii la velocidad de la luz.

Una Carrera

En una carrera con la luz hasta α centauro que está a 4,36 años luz, la luz demora

$$T_{luz} = 4{,}36 \times 31\,556\,926\,\mathrm{s} = 1\,375\,881\,97{,}4\,\mathrm{s}$$

los protones del acelerador CERN demorarían

$$T_{protones} = \frac{d}{v_p} = \frac{1\,375\,881\,97{,}4c}{0{,}999\,999\,991\,c} = 1\,375\,881\,98{,}6\,\mathrm{s}$$

es decir llegan $1\,375\,881\,98{,}6 - 1\,375\,881\,97{,}4 = 1.\,2\,\mathrm{s}$ más tarde. La luz ¿gana por nariz? En realidad una nariz bastante larga. Calcule su longitud.

La energía cinética total del haz de protones es

$$\begin{aligned} K &= 7 \times 2808 \times 1{,}15 \times 10^{11} \times 1{,}60217646 \times 10^{-7}\,\mathrm{J} \\ &= 3{,}62162375\,7 \times 10^{8}\,\mathrm{J} \\ &= \frac{3{,}62162375\,7 \times 10^{8}}{4{,}184 \times 10^{15}} = 8.\,655\,888\,521 \times 10^{-8} \quad Megatones. \end{aligned}$$

Una energía cinética insignificante comparada por ejemplo a una liberada por la explosión de una bomba de Hidrógeno o de la colisión del asteroide que mató a los dinosaurios.

Equivalencia en masa

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{3{,}62162375\,7 \times 10^{8}}{(2{,}99792458 \times 10^{8})^2} = 4.\,029\,599\,876 \times 10^{-9}\,\mathrm{kg}$$

Asteoride

Como un ejemplo clásico (no relativista) un asteroide de 10 km de diámetro viene hacia la Tierra a una rapidez de $20\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ y con una densidad de

$\rho = 6000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Su energía cinética, que después de la colisión se transformará en diversas formas de energía, puede calcularse

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho(\frac{4}{3}\pi R^3)v^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 6000(\frac{4}{3}\pi)(5000)^3(20000)^2 \\ &= 6.\,283\,185\,307 \times 10^{23}\,\mathrm{J} \\ &= 1{,}501 \times 1\,0^8 \text{ Megatones,} \end{aligned}$$

pobres dinosaurios.

Otras curiosidades

Si una nave viajara a α centauro que está a distancia de dos años luz con esa velocidad de los protones, para los terrícolas el viaje demoraría digamos dos años. Para el piloto transcurriría un tiempo

$$\begin{aligned} T_{piloto} &= 63113852{,}0\sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}\,\mathrm{s} \\ &= 63113852{,}0\sqrt{1 - (0{,}999\,999\,991)^2} \\ &= 8467.\,611\,785\,\mathrm{s} \\ &= 2{,}35\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Si la nave tuviera en total una masa en reposo de $M = 200000\,\mathrm{kg}$, la energía necesaria para acelerar la nave hasta esa rapidez de los protones sería a lo menos

$$\begin{aligned} K &= \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}} - Mc^2 \\ &= 1.\,339\,6 \times 10^{26}\,\mathrm{J} \\ &= 3.\,201\,7 \times 10^{10} \text{ Megatones} \end{aligned}$$

¿Dispondremos algún combustible con tal energía? Si la masa total del cohete se convirtiera en energía tendríamos apenas

$$Mc^2 = 200000c^2 = 1.\,798 \times 10^{22}\,\mathrm{J}$$

3.2. Ejercicios resueltos trabajo energía

EJERCICIO 3.2.1 *Una partícula se mueve sobre el eje X de un sistema de coordenadas, sometido a una fuerza de atracción hacia el origen de magnitud k/x^2, donde k es una constante positiva. Si la partícula parte del reposo en $x = a$, demuestre que ella llegará al origen en un tiempo t , dado por*

$$t = \frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{ma}{2k}}.$$

Solución. La fuerza dada es conservativa porque

$$F = -\frac{k}{x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{k}{x}),$$

de donde se deduce que

$$V = -\frac{k}{x},$$

y como no hay otra fuerza tenemos que la energía se conserva

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{x} = -\frac{k}{a}$$

con condiciones iniciales $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$. Luego

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}),$$

de donde

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a})},$$

separe variables e integre

$$t = -\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a})}} = \frac{1}{2}\pi a\sqrt{\frac{ma}{2k}}.$$

Nota: $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})}}$, $x = a\sin^2\theta$, $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2a\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{\frac{2k}{ma}}}$.

▲

Ejercicio 3.2.2 *Demuestre que la ecuación de movimiento de un péndulo simple, formado por una partícula de masa m suspendida de un hilo liviano de largo L, es :*

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\sin\theta=0$$

Solución. Hay varios caminos. Si usamos conservación de energía, con energía potencial definida como cero en el punto más bajo, tenemos que

$$E=\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2+mgL(1-\cos\theta)$$

que si se deriva respecto al tiempo da

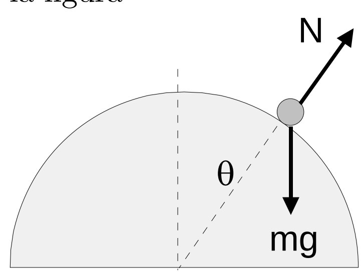
$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgL\sin\theta\dot{\theta}=0$$

o bien

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\sin\theta=0.$$

Ejercicio 3.2.3 *Una partícula de masa m se coloca en el punto más alto de un hemisferio liso de radio R y se perturba levemente de modo que ella comienza a caer deslizando. Determine el punto sobre el hemisferio donde la partícula pierde el contacto con él.*

Solución. Considere la figura



la componente radial de la segunda Ley de Newton es

$$m\frac{v^2}{R}=-N+mg\cos\theta,$$

y conservación de energía

$$E=\frac{1}{2}mv^2+mgR\cos\theta=mgR$$

o sea

$$v^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

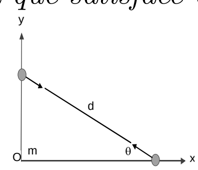
que sustituida en la primera da

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\theta - 2mg(1 - \cos\theta) \\ &= (3\cos\theta - 2)mg \end{aligned}$$

que se anula donde $\cos\theta = \frac{2}{3}$ o sea el punto de despegue es $\theta = 48{,}19^o$.

▲

EJERCICIO 3.2.4 *Se tiene un péndulo constituido por una partícula de masa m unida por un hilo de largo L a un punto fijo. Si la rapidez de la partícula en el punto más bajo es v_0 determine la energía mecánica de la partícula considerando que en el punto más bajo la energía potencial es cero. Determine además la ecuación diferencial que satisface el ángulo θ.*



Solución. Si tomamos como nivel de referencia de la energía potencial el punto más bajo, entonces

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta).$$

Si además derivamos respecto al tiempo se obtiene

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL(\sin\theta)\dot{\theta} = 0,$$

o sea

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}(\sin\theta) = 0.$$

▲

EJERCICIO 3.2.5 *Un proyectil de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$, se lanza desde el origen de un sistema de coordenadas, con rapidez $v_0 = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, formando un ángulo $\alpha = 37^o$ con la horizontal. Si se desprecia la resistencia del aire, calcule:*

a) La energía mecánica del proyectil después del lanzamiento. b) El trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre el proyectil, desde que se lanza hasta que adquiere la altura máxima. c) La energía cinética del proyectil en el punto de impacto contra el suelo.

Solución. Si el nivel de referencia para la energía potencial corresponde al punto de lanzamiento, entonces la energía mecánica (que es constante) es

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}1(100)^2 = 5000\,\mathrm{J}.$$

La altura máxima se calcula de

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = 164.\,62\,8\,\mathrm{m}.$$

El trabajo realizado por la fuerza neta, el peso, es igual a menos la variación de la energía potencial, es decir

$$W = -mg(y_{\text{máx}} - 0) = -1646{,}28\,\mathrm{J},$$

y la energía en el punto de llegada es la misma que al salir.

EJERCICIO 3.2.6 *Sea*

$$\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{\imath} + 2xyz^3\hat{\jmath} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}.$$

Encuentre la función potencial escalar asociada a F.

Solución. Debemos verificar primero que $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$. Calcule entonces

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F} &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{bmatrix} \\ &= \hat{\imath}(6xyz^2 - 6xyz^2) + \cdots \\ &= (0,0,0).\end{aligned}$$

Sea entonces $V(0,0,0) = 0$. Además sabemos que

$$V(x,y,z) = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

y como camino tomamos tres segmentos a lo largo de los ejes. $C_1 : y = 0$, $z = 0$, $x : 0 \to x$; $C_2 : z = 0$, $x =$ constante, $y : 0 \to y$; $C_3 : x, y =$ constantes, $z : 0 \to z$. Entonces

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= -\int (y^2z^3 - 6xz^2)dx + 2xyz^3dy + (3xy^2z^2 - 6x^2z)dz \\ &= -\int_{C_1}(0) - \int_{C_2}(0) - \int_{C_3}(3xy^2z^2 - 6x^2z)dz \\ &= -xy^2z^2 + 3x^2z^2. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 3.2.7 *Una partícula de masa m se mueve en el plano XY tal que:*

$$\vec{r} = a\hat{\imath}\cos\omega t + b\hat{\jmath}\sin\omega t,$$

donde a y b son constantes positivas. a) Encuentre la trayectoria de la partícula. b) Calcule la fuerza que actúa sobre la partículas. c) Demuestre que la fuerza es conservativa. d) ¿Cuál es la energía potencial en $x = a$ e $y = b$? e) Calcule el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve de A hacia B. f) La energía total de la partícula.

Solución. Del vector posición,

$$x = a\cos\omega t,\ \ y = b\sin\omega t,$$

de donde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a),$$

(es una elipse). Además

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} \qquad (b),$$

se trata de una fuerza conservativa porque es evidente que

$$\vec{F} = -\nabla\frac{1}{2}m\omega^2r^2,$$

y luego la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Las coordenada de los puntos son $A(a,0)$ y $B(0,b)$ de manera que

$$U_A = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2,\ U_B = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \qquad (d),$$

de modo que el trabajo es

$$W = -(U_B - U_A) = -\frac{1}{2}m\omega^2(b^2 - a^2) \qquad (f).$$

La energía total de la partícula será

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + U \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 3.2.8 *Una partícula de masa m, se mueve por la acción de una fuerza conservativa cuyo potencial es $U(x)$. Si en t_1 la partícula está en x_1 y en t_2 está en x_2, demuestre que: a)*

$$t_2 - t_1 = \sqrt{m/2}\int_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

donde E es la energía total. b) Si $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ y en $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$. Demuestre que:

$$x = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Solución. Tenemos que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x),$$

de donde

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}\\ \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}\\ dt &= \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}},\end{aligned}$$

integrando

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}.$$

Si $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E-\frac{1}{2}kx^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k}-x^2}},$$

pero $E = K + U = \frac{1}{2}ka^2$ de manera que

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{\frac{m}{k}}\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\\ &= \sqrt{\frac{m}{k}}(\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{\pi}{2}),\end{aligned}$$

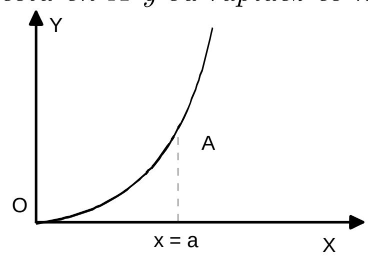
y finalmente

$$x(t) = a\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{\pi}{2}) = a\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

Ejercicio 3.2.9 *En la parábola $y = x^2/a$ que está colocada verticalmente según la figura, además del peso, de la fuerza de reacción normal, actúa sobre la argolla una fuerza dada por:*

$$\vec{F} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}.$$

Inicialmente, la argolla está en A y su rapidez es nula.



a) Determinar el trabajo que hace la fuerza F cuando la argolla se mueve desde A hasta O. b) Calcule la rapidez de la argolla en O.

Solución. Deseamos saber si la fuerza dada es conservativa, calculamos

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F} &= \begin{bmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & 0\end{bmatrix}\\ &= \hat{k}(-1-1)=(0,0,-2)\neq 0.\end{aligned}$$

No lo es. De modo que debemos calcular su trabajo directamente

$$\begin{aligned}W_{\vec{F}} &= \int_A^O \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^O (ydx - xdy)\\ &= \int_a^0 \frac{x^2}{a}dx - \int_a^0 x\frac{2xdx}{a}\\ &= -\frac{a^2}{3}+\frac{2}{3}a^2=\frac{a^2}{3}.\end{aligned}$$

Usamos ahora el teorema energía trabajo

$$\begin{aligned}E_O - E_A &= \frac{a^2}{3},\\ \frac{1}{2}mv_O^2-(mgy_A) &= \frac{a^2}{3},\\ \frac{1}{2}mv_O^2-(mga) &= \frac{a^2}{3},\end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$v_O=\frac{1}{3m}\sqrt{6}\sqrt{(ma\,(a+3mg))}=\sqrt{2ag+\frac{2a^2}{3m}}.$$

EJERCICIO 3.2.10 *Una partícula de masa m, se lanza con rapidez inicial v_0 sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad k. Calcule: a) La distancia total que recorre la partícula. b) La energía cinética de la partícula en la mitad del recorrido. c) El trabajo total que realiza la fuerza resistente.*

Solución. Tenemos

$$m\frac{dv}{dt} = -kv,$$

separando variables e integrando

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \Longrightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{kt}{m},$$

de donde

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{kt}{m}},$$

integrando nuevamente

$$x(t) = \int_0^t v_0 e^{-\frac{kt}{m}} dt = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}).$$

como la partícula se detiene cuando $t \to \infty$, resulta que la distancia recorrida es

$$x = \frac{mv_0}{k} \qquad (a).$$

En la mitad del recorrido el tiempo será dado por

$$\frac{1}{2}\frac{mv_0}{k} = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \Longrightarrow t = \frac{m}{k}(\ln 2),$$

y la energía cinética será

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-2\frac{kt}{m}} \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\frac{1}{4} = \frac{1}{8}mv_0^2. \quad (b) \end{aligned}$$

Por último según el teorema energía trabajo, el trabajo total que realiza la fuerza resistente es

$$W_{\vec{f}} = K_f - K_i = -\frac{1}{2}mv_0^2. \quad (c)$$

Ejercicio 3.2.11 *Sobre una partícula de masa* $m = 2$ kg*, actúa una fuerza* F *desconocida. La partícula se mueve sobre un plano horizontal áspero, de acuerdo a la ecuación itinerario* $x = 3 + t^2$ *donde* x *está en metros y* t *en segundos. El coeficiente de roce cinético entre el plano y la partícula es* $\mu_k = 0{,}3$*. Calcule: a) La energía cinética de la partícula en el instante* $t = 3\,\mathrm{s}$*. b) El trabajo realizado por la fuerza* F *en el intervalo* $0 - 3\,\mathrm{s}$*.*

Solución. Tenemos que la rapidez es

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t.$$

La energía cinética en $t = 3\,\mathrm{s}$ será

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2(36) = 36\,\mathrm{J}.$$

La fuerza de roce realiza un trabajo

$$\begin{aligned} W &= -\mu_k Mg(x_2 - x_1) \\ &= -0{,}3 \times 2 \times 10(12 - 3) = -54{,}0\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

El trabajo total es la variación de la energía cinética, es decir

$$W_F - 54{,}0 = 36,$$

de donde

$$W_F = 90\,\mathrm{J}.$$

Ejercicio 3.2.12 *Un bloque de masa* $m = 4\,\mathrm{kg}$*, inicialmente en reposo, asciende a lo largo de un plano inclinado áspero de largo* $1\,\mathrm{m}$ *e inclinación respecto de la horizontal* $\alpha = 53^o$*, debido a la acción de una fuerza horizontal constante de magnitud* $60\,\mathrm{N}$*. Si al término del recorrido el bloque tiene una rapidez de* $1{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*, calcule: a) El trabajo realizado por la fuerza de roce. b) El trabajo neto resultante. c) El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano.*

Solución. La normal es $N = mg\cos 53 = 24.\,073\,\mathrm{N}$, la altura que sube es $h = 1 \times \sin 53 = 0{,}798\,6\,\mathrm{m}$, el desplazamiento horizontal del bloque es $x = 1 \times \sin 53 = 0{,}601\,8\,\mathrm{m}$. Podemos entonces calcular los siguientes trabajos y el cambio de la energía cinética

$$\begin{aligned} W_N &= 0, \\ W_{mg} &= -4 \times 10 \times 0{,}798\,6 = -31.\,944\,\mathrm{J}, \\ W_F &= 60 \times 0{,}601\,8 = 36.\,108\,\mathrm{J}, \\ K_2 - K_1 &= \frac{1}{2}4(1{,}2)^2 = 2.\,88\,\mathrm{J} \text{ (trabajo neto resultante)} \end{aligned}$$

El trabajo W_f realizado por la fuerza de roce satisface

$$W_f + W_F + W_{mg} = K_2 - K_1,$$

de manera que el trabajo realizado por el roce será

$$W_f = 2.\,88 - 36{,}108 + 31{,}944 = -1.\,284\,\mathrm{J},$$

y finalmente el coeficiente de roce lo despejamos de

$$W_f = -\mu_K N L,$$

o sea

$$\mu_K = \frac{1.\,284}{24.\,073} = 0{,}053\,.$$

Capítulo 4

MOVIMIENTO ARMÓNICO

4.1. Movimiento armónico simple

El movimiento de un cuerpo sometido la acción de una fuerza elástica da lugar a un movimiento conocido como movimiento armónico simple. Esta fuerza se manifiesta cuando un cuerpo oscila unido a un resorte ideal. Un resorte ideal tiene dos características, su longitud natural l_0 que es su longitud sin estar sometido a fuerzas y su constante elástica k. La deformación del resorte es proporcional a la fuerza aplicada según

$$F = k(l - l_0), \tag{4.1}$$

donde l es la longitud del resorte deformado, como se indica en la figura

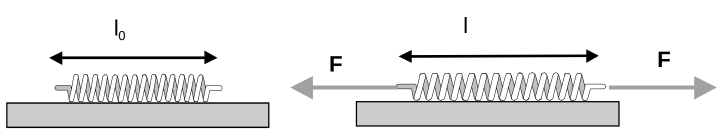


Figura 4.1:

Si una partícula de masa M se mueve en una dimensión, digamos el eje OX sometido a una única fuerza restauradora elástica de la forma, conviene medir la coordenada de posición x a partir de la longitud natural del resorte de manera que

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\hat{\imath} = -kx\hat{\imath}, \tag{4.2}$$

entonces la segunda ley de Newton nos da

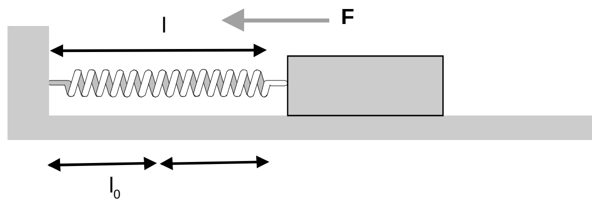


Figura 4.2:

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x} &= -kx, \\
\ddot{x} + \omega^2 x &= 0,
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

donde se ha definido

$$\omega^2 = \frac{k}{M}. \tag{4.4}$$

La coordenada x satisface la célebre ecuación del movimiento armónico simple (MAS) cuya solución puede escribirse en términos de dos constantes A y ϕ como

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \tag{4.5}$$

La constante A se conoce como la amplitud del movimiento y ϕ se conoce como la fase inicial.

4.1.1. Evaluación de las constantes

Si las condiciones iniciales son

$$
\begin{aligned}
x(0) &= x_0, \\
\dot{x}(0) &= v_0,
\end{aligned}
$$

entonces al imponer dichas condiciones en (4.5) y su primera derivada resulta

$$
\begin{aligned}
x_0 &= A\cos\phi, \\
v_0 &= -A\omega\sin\phi,
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, && (4.7)\\
\tan\phi &= -\frac{v_0}{\omega x_0}. && (4.8)
\end{aligned}
$$

4.1.2. Periodo y frecuencia

Evidentemente la función

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi).$$

es periódica con periodo T dado por

$$\omega T = 2\pi, \tag{4.9}$$

de modo que el periodo del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}, \tag{4.10}$$

y la frecuencia, es el recíproco del periodo, es decir

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{4.11}$$

La frecuencia angular será

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{4.12}$$

Como veremos en el ejemplo que sigue, movimientos armónico simples pueden darse en variadas situaciones, aún sin resortes.

4.2. Movimiento armónico amortiguado.

En nuestro mundo siempre existe roce de manera que el tratamiento del movimiento armónico simple no refleja exactamente lo que ocurre. Por ejemplo si el movimiento se realiza en presencia de aire y suponemos que además

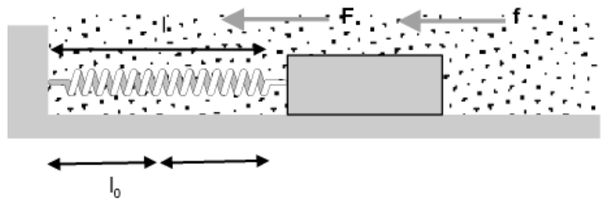


Figura 4.3:

de la fuerza elástica actúa una fuerza de roce viscosa contraria a la velocidad de la forma

$$\vec{f} = -2\beta\dot{x}\hat{\imath}, \tag{4.13}$$

con β alguna constante, la ecuación de movimiento será

$$\vec{f} = -2\beta\dot{x}\hat{\imath},$$

la ecuación de movimiento será

$$M\ddot{x} = -kx - 2\beta\dot{x},$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = 0.$$

Ahora llamaremos

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M},$$

de modo que la ecuación para el movimiento amortiguado es

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{4.14}$$

La solución de esta ecuación se obtiene suponiendo una solución exponencial de la forma

$$x(t) = Ae^{pt},$$

que al ser sustituida conduce a

$$p^2 + \frac{2\beta}{M}p + \omega_0^2 = 0$$

es decir hay a lo más dos valores de p para los cuales la solución tratada lo es. Estos valores son

$$p = -\frac{\beta}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)}$$

La naturaleza de las soluciones dependen crucialmente del signo de la cantidad subradical. Así distinguimos tres casos:

4.2.1. Caso sub amortiguado.

Si el roce es pequeño, en forma más precisa si

$$\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2 < 0,$$

definamos

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{M^2}},$$

y la solución puede escribirse en términos de dos constantes A y ϕ así

$$x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} \cos(\omega t - \phi),$$

es decir hay oscilaciones cada vez de menor amplitud. El movimiento se denomina cuasi periódico y el cuasi período está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{M^2}}}. \tag{4.15}$$

4.2.2. Caso amortiguado crítico.

Aquí

$$\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2 = 0,$$

los dos valores de p son iguales y la solución es

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\beta}{M}t}, \tag{4.16}$$

donde dependiendo de los signos de las constantes A y B puede haber a lo más una oscilación y luego la amplitud decae asintóticamente a cero.

4.2.3. Caso sobre amortiguado.

Si el roce es muy grande, es decir si

$$\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2 > 0,$$

los dos valores de p son reales y distintos luego la solución es $p = -\frac{\beta}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)}$

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{M}t}(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2}-\omega_0^2\right)}t} + Be^{-\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2}-\omega_0^2\right)}t}), \tag{4.17}$$

la coordenada cae asintóticamente a cero.

4.3. Movimiento oscilatorio forzado forzado.

Si se agrega una fuerza externa forzadora de la forma $F(t)$, la ecuación de movimiento será sin amortiguación será

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = F(t). \tag{4.18}$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden, no homogénea. Un teorema de las matemáticas nos informa que la solución es la suma de una solución particular de esa ecuación más la solución de la parte homogénea, la encontrada en la sección anterior. La solución de la parte homogénea, en cualquiera de los tres casos explicados a la larga decae a cero, luego si nos olvidamos de los transientes iniciales, el cuerpo terminará moviéndose de acuerdo a la solución particular.

Una solución particular.

Si la fuerza forzadora es periódica de la forma

$$F(t) = A\cos\Omega t, \tag{4.19}$$

es conveniente darse cuenta que

$$F(t) = A\cos\Omega t = \mathrm{Re}(Ae^{i\Omega t}),$$

y mejor resolver la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = Ae^{i\Omega t}, \tag{4.20}$$

en el entendido que de la solución que encontremos debemos quedarnos con la parte real.

La solución puede adivinarse de la forma

$$x(t) = Ce^{i\Omega t},$$

que si es sustituida en (4.20) conduce a

$$-\Omega^2 C + \omega_0^2 C = A,$$

de donde

$$C = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2},$$

es la amplitud de la respuesta del sistema. Finalmente la solución puede escribirse como una combinación lineal de la solución oscilatoria sin forzamiento y la solución particular forzada

$$x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t).$$

Supongamos condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

luego al imponerlas

$$\begin{aligned} 0 &= B + \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \\ 0 &= C\omega_0. \end{aligned}$$

Finalmente

$$x(t) = -\frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\Omega t,$$

que puede escribirse en la forma

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2}\left(\cos\Omega t - \cos\omega_0 t\right). \tag{4.21}$$

Ahora es posible determinar la conducta del sistema si la frecuencia de la fuerza forzadora Ω se acerca a la frecuencia propia o natural de oscilación del sistema ω_0.

4.3.1. Resonancia

Si $\Omega \to \omega_0$ podemos tomar el límite mediante el teorema de L´Hopital resultando

$$x(t) \to \frac{A}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t,$$

o sea la amplitud tiende a infinito pero creciendo linealmente con el tiempo.

4.3.2. Movimiento amortiguado forzado.

Si se agregamos al caso anterior la fuerza amortiguadora , la ecuación de movimiento será

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = A\cos\Omega t. \tag{4.22}$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden, no homogénea. Un teorema de las matemáticas nos informa que la solución es la suma de una solución particular de esa ecuación más la solución de la parte homogénea, la encontrada en la sección anterior. La solución de la parte homogénea, en cualquiera de los tres casos explicados a la larga decae a cero por causa del amortiguamiento, luego si nos olvidamos de los transientes iniciales, el cuerpo terminará moviéndose de acuerdo a la solución particular.

Una solución particular.

Si la fuerza forzadora es periódica de la forma

$$F(t) = A\cos\Omega t, \tag{4.23}$$

es conveniente darse cuenta que

$$F(t) = A\cos\Omega t = \mathrm{Re}(Ae^{i\Omega t}),$$

y resolver mejor la ecuación

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \omega_0^2 x = Ae^{i\Omega t}, \tag{4.24}$$

en el entendido que a la solución que encontremos debemos quedarnos con la parte real.

La solución puede adivinarse de la forma

$$x(t) = Ce^{i\Omega t},$$

que si es sustituida en (4.24) conduce a

$$-\Omega^2 C + \frac{2\beta}{M} i\Omega + \omega_0^2 C = A,$$

de donde

$$C = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2i\beta\Omega}{M}},$$

es la amplitud de la respuesta del sistema. Finalmente la solución puede escribirse

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2i\beta\Omega}{M}} e^{i\Omega t}\right),$$

que puede escribirse en la forma

$$x(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\frac{2\beta\Omega}{M})^2}} \cos(\Omega t - \phi). \tag{4.25}$$

4.4. Equilibrio estable

Un sistema unidimensional donde la fuerza que actúa es derivable de un potencial $V(x)$ mediante

$$F = -\frac{\partial V(x)}{\partial x},$$

tiene puntos de equilibrio, o sea donde la partícula puede permanecer en reposo, donde $F = 0$, es decir esos puntos corresponden a máximos o mínimos o valores constantes de potencial. Si el origen de la coordenada x se coloca donde $V(x)$ tenga un mínimo y consideramos pequeños desplazamientos podemos expandir mediante el teorema de Taylor hasta términos cuadráticos

$$V(x) \simeq V(0) + \frac{x}{1!} V'(0) + \frac{x^2}{2!} V''(0),$$

donde la primera derivada del potencial $V'(0) = 0$ y la segunda derivada $V''(0) > 0$. Luego la fuerza aproximada para x pequeño es

$$F = -xV''(0),$$

y tiene signo contrario a x, es decir la fuerza trata de acelerar la partícula hacia el punto de equilibrio. Este punto de equilibrio donde la energía potencial es un mínimo, se denomina estable. Al revés, si se trata de un máximo, $V''(0) < 0$ y la fuerza

$$F = -xV''(0),$$

tiene el mismo signo que x. La partícula tiende a alejarse del punto de equilibrio apenas se salga de el. Este punto de equilibrio donde la energía potencial es un máximo, se denomina inestable. Finalmente si el potencia es constante, la partícula se quedará donde se la coloque en reposo. Este punto de equilibrio donde la energía potencial es constante, se denomina indiferente.

El movimiento que tendrá entonces lugar cerca de una posición de equilibrio estable, será armónico simple

$$m\ddot{x} = -xV''(0),$$

o bien

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

donde se ha definido

$$\omega^2 = \frac{V''(0)}{m}. \tag{4.26}$$

4.5. Osciladores acoplados

En general los sistemas tienen una, dos, tres o más coordenadas necesarias para especificar su posición. Ese numero de coordenadas se denomina número de grados de libertad del sistema. Analizaremos mediante ejemplos, las oscilaciones libres de sistemas de dos grados de libertad. Oscilaciones forzadas de sistemas de dos grados de libertad. Los conceptos de frecuencias propias de oscilación, las llamadas coordenadas normales y el fenómeno de resonancia. Para sistemas complejos de un mayor número de grados de libertad, el problema se torna matemáticamente más complejo pero las ideas son las mismas. Veremos que los sistemas que oscilan tienen en general un cierto número de frecuencias llamadas frecuencias propias de oscilación y que el sistema puede oscilar con cada una de estas frecuencias en formas o modos llamados propios de oscilación. Estos modos normales pueden excitarse independientemente con las condiciones iniciales adecuadas. Con condiciones iniciales arbitrarias, el sistema tendrá un modo de oscilación consistente en una cierta superposición de los modos normales. Además se verá que si el sistema se excita con fuerzas perturbadoras forzantes cuya frecuencia coincida con alguna de las frecuencias propias, se manifiesta el fenómeno de resonancia, donde la amplitud del modo de esa frecuencia, crece.

Ejemplo 4.5.1 *Considere el péndulo doble indicado en la figura (4.4), donde el largo natural del resorte sin masa es L_0, que coincide con la separación de las masas en su posición de equilibrio. La constante elástica es k y la longitud de los hilos es L. Estudie las oscilaciones pequeñas en torno a los valores de equilibrio $\theta = 0$ y $\phi = 0$. Para simplificar algo tome $mgL = kL^2$.*

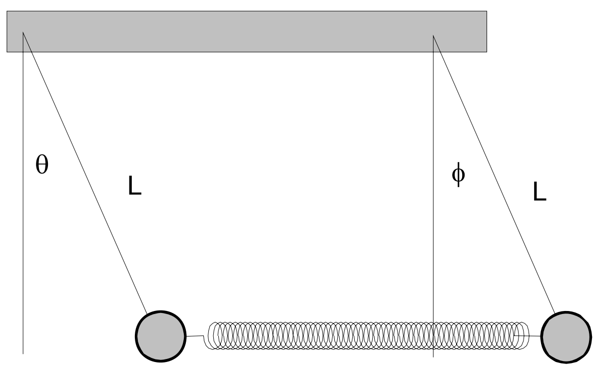


Figura 4.4:

Solución. La energía potencial es

$$V = -mgL\cos\theta - mgL\cos\phi + \frac{1}{2}kL^2(l - l_0)^2,$$

que evidentemente tiene un mínimo para $\theta = 0$, $\phi = 0$, la posición de equilibrio estable. Para valores pequeños de θ y ϕ, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2),$$

y la energía potencial puede aproximarse a

$$V = \frac{1}{2}mgL(\theta^2 + \phi^2) + \frac{1}{2}mgL(\theta - \phi)^2 = mgL\left(\theta^2 + \phi^2 - \theta\phi\right),$$

de aquí se deducen las ecuaciones de movimiento aproximadas

$$mL\ddot{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad mL\ddot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi},$$

o bien:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}(2\theta - \phi) = 0, \quad \ddot{\phi} + \frac{g}{L}(2\phi - \theta) = 0,$$

que si las sumamos y restamos se desacoplan

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \ddot{\phi} + \frac{g}{L}(\theta + \phi) &= 0, \\ \ddot{\theta} - \ddot{\phi} + \frac{3g}{L}(\theta - \phi) &= 0, \end{aligned}$$

con las frecuencias propias : :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

correspondientes a las coordenadas normales que se reducen (salvo un factor irrelevante) a

$$\varsigma_1 = \theta + \phi, \quad \varsigma_2 = \theta - \phi.$$

Estos dos modos son independientes, por lo cual se pueden establecer cada uno de ellos independientemente, y variarán con las frecuencias propias ω_1 y ω_2. Es decir

$$\begin{aligned} \theta + \phi &= D\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t - \delta\right), \\ \theta - \phi &= E\cos\left(\sqrt{\frac{3g}{L}}t - \varepsilon\right), \end{aligned}$$

con constantes D, E, δ, ε determinables con las condiciones iniciales que se tengan. Debe notarse que la diferencia de los ángulos es el modo de mayor frecuencia.

▲

EJEMPLO 4.5.2 *Con relación a la figura (4.5), dos partículas de igual masa m oscilan horizontalmente unidos a resortes iguales con constante elástica k, de modo que los extremos exteriores de los resortes están fijos. Analice las oscilaciones pequeñas de las partículas en torno a sus posiciones de equilibrio estable.*

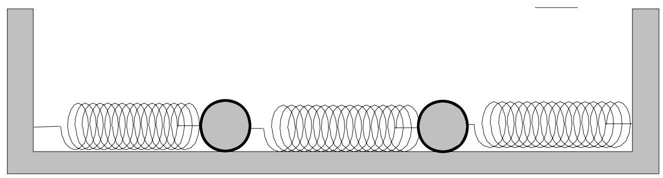


Figura 4.5:

Solución. Si x_1 y x_2 indican las desviaciones de las partículas respecto a sus posiciones de equilibrio, la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2.$$

y la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2),$$

Las ecuaciones de movimiento para las dos partículas resultan ser

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1) - kx_1, \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - kx_2, \end{aligned}$$

o bien con $\omega^2 = k/m$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \omega^2(x_2 - 2x_1), \\ \ddot{x}_2 &= -\omega^2(2x_2 - 2x_1) \end{aligned}$$

y, debido a la simetría, se observa que las ecuaciones se desacoplan sumándolas y restándolas

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 &= -3\omega^2\left(x_2 - x_1\right) \\ \ddot{x}_2 + \ddot{x}_1 &= -\omega^2\left(x_2 + x_1\right), \end{aligned}$$

por lo cual las frecuencias propias son

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{3\frac{k}{m}}.$$

y las coordenadas normales resultan ser

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= x_2 + x_1, \\ \varsigma_2 &= x_2 - x_1. \end{aligned}$$

▲

EJEMPLO 4.5.3 *Con relación a la figura (4.5), dos partículas de igual masa m oscilan horizontalmente unidos a resortes iguales con constante elástica k los de los extremos y k_1 el central, de modo que los extremos exteriores de los resortes están fijos. Analice las oscilaciones pequeñas de las partículas en torno a sus posiciones de equilibrio estable.*

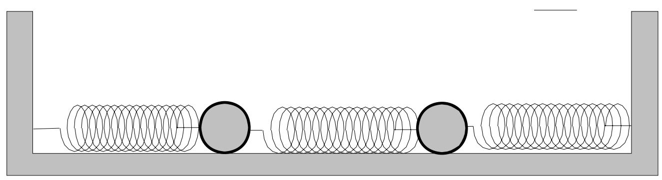


Figura 4.6:

Solución. Si x_1 y x_2 indican las desviaciones de las partículas respecto a sus posiciones de equilibrio. Las ecuaciones de movimiento para las dos partículas resultan ser

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k_1(x_2 - x_1) - kx_1, \\ m\ddot{x}_2 &= -k_1(x_2 - x_1) - kx_2, \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{k_1}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}x_1, \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{k_1}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}x_2, \end{aligned}$$

y nuevamente, debido a la simetría, se observa que las ecuaciones se desacoplan sumándolas y restándolas

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 &= -\frac{(2k_1 + k)}{m}(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 + \ddot{x}_1 &= -\frac{k}{m}(x_2 + x_1) \end{aligned}$$

por lo cual las frecuencias propias son

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k_1 + k}{m}}.$$

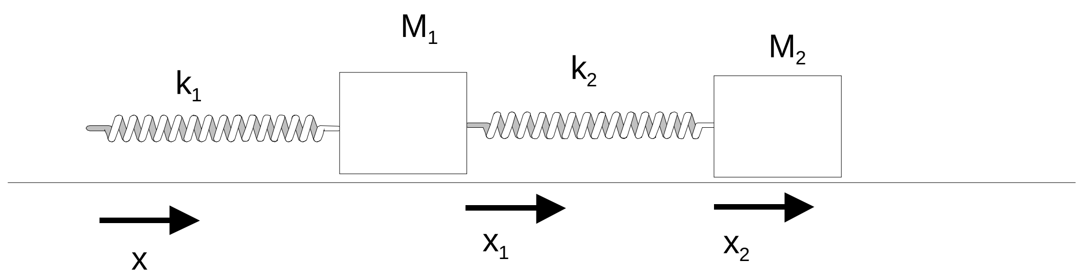


Figura 4.7:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{3\frac{k}{m}}.$$

y las coordenadas normales resultan ser

$$\varsigma_1 = x_2 + x_1, \quad \varsigma_2 = x_2 - x_1.$$

4.5.1. Movimiento forzado

Considere dos osciladores acoplados donde el resorte izquierdo de contante elástica k_1 estará en un caso unido a una pared fija $(x = 0)$ y en el segundo caso, tendrá un movimiento dado o forzado.

Oscilaciones libres. Mantenemos primer resorte con extremo izquierdo fijo, es decir

$$x = 0.$$

Considerando las fuerzas elásticas actuando en cada bloque, podemos escribir

$$\begin{aligned} M_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ M_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

Para simplificar algo tomemos $M_1 = M_2$ y $k_1 = k_2 = k$ resultando

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{k}{M}x_1 - \frac{k}{M}(x_2 - x_1) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{M}(x_2 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$

Que es lo típico que sucede. Se obtienen ecuaciones (dos), lineales, de segundo orden (derivada superior 2), homogéneas y acopladas. Lo último significa que ambas incógnitas de posición x_1 y x_2 aparecen en ambas ecuaciones. Una forma de solución, explicada para este ejemplo, que tiene siempre los mismos pasos consiste en. Suponga soluciones exponenciales con exponente imaginario, la solución física es la parte real de ella

$$x_1 = Ae^{i\omega t},\ x_2 = Be^{i\omega t}.$$

Si se hacen las segundas derivadas

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 Ae^{i\omega t},\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 Be^{i\omega t},$$

y se reemplaza resultan

$$\begin{aligned}
(\frac{2k}{M} - \omega^2)A - \frac{k}{M}B &= 0, \\
-\frac{k}{M}A + (\frac{k}{M} - \omega^2)B &= 0,
\end{aligned}$$

dos ecuaciones lineales homogéneas para los coeficientes A y B. Como usted debe saber, sólo hay solución distinta de la trivial si el determinante de los coeficientes es cero, o sea

$$\omega^4 - (\frac{3k}{M})\omega^2 + \frac{k^2}{M^2} = 0,$$

sean cuyas raíces son

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\frac{k}{M}, \\
\omega_2^2 &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\frac{k}{M},
\end{aligned}$$

En términos de esas frecuencias ω_1 y ω_2,llamadas frecuencias propias de oscilación las soluciones son

$$\begin{aligned}
x_1 &= \mathrm{Re}(A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}), \\
x_2 &= \mathrm{Re}(B_1 e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t}),
\end{aligned}$$

donde

$$\Omega_2^2 A = \Omega_2^2 B - \omega^2 B$$
$$\frac{A}{B} = \frac{\left(\frac{k}{M} - \omega^2\right)}{\frac{k}{M}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{B_1} &= \frac{\left(\frac{k}{M} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\frac{k}{M}\right)}{\frac{k}{M}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = r_1, \\
\frac{A_2}{B_2} &= \frac{\left(\frac{k}{M} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\frac{k}{M}\right)}{\frac{k}{M}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = r_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \operatorname{Re}(r_1 B_1 e^{i\omega_1 t} + r_2 B_2 e^{i\omega_2 t}), \\
x_2 &= \operatorname{Re}(B_1 e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t}),
\end{aligned}$$

donde B_1, B_2 son complejos determinados de acuerdo a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
x_1(0) &= r_1 \operatorname{Re} B_1 + r_2 \operatorname{Re} B_2, \\
x_2(0) &= \operatorname{Re} B_1 + \operatorname{Re} B_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(0) &= -r_1 \omega_1 \operatorname{Im} B_1 - r_2 \omega_2 \operatorname{Im} B_2, \\
\dot{x}_2(0) &= -\omega_1 \operatorname{Im} B_1 - \omega_2 \operatorname{Im} B_2,
\end{aligned}$$

cuatro ecuaciones para las partes reales e imaginarias de B_1 y B_2. En general resultarán

$$B_1 = |B_1| e^{i\phi_1}, \quad B_2 = |B_2| e^{i\phi_2},$$

luego

$$\begin{aligned}
x_1 &= r_1 |B_1| \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 |B_2| \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\
x_2 &= |B_1| \cos(\omega_1 t + \phi_1) + |B_2| \cos(\omega_2 t + \phi_2)
\end{aligned}$$

4.5.2. Modos normales

Los modos normales se despejan de

$$\begin{aligned}
x_1 &= r_1 B_1 e^{i\omega_1 t} + r_2 B_2 e^{i\omega_2 t} = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2, \\
x_2 &= B_1 e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t} = \xi_1 + \xi_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \frac{-x_1 + r_1 x_2}{r_1 - r_2} = \frac{1}{10}\left(2x_1 + x_2 + x_2\sqrt{5}\right)\sqrt{5}, \\
\xi_1 &= \frac{x_1 - r_2 x_2}{r_1 - r_2} = \frac{1}{10}\left(-2x_1 - x_2 + x_2\sqrt{5}\right)\sqrt{5},
\end{aligned}$$

4.5.3. Movimiento forzado

Las ecuaciones de movimiento son esencialmente las mismas, pero el primer resorte se estira $x_1 - x$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \frac{k}{M}(x_1 - x) - \frac{k}{M}(x_2 - x_1) &= 0, \\
\ddot{x}_2 + \frac{k}{M}(x_2 - x_1) &= 0, \\
x &= C \sin \Omega t,
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \frac{k}{M}x_1 - \frac{k}{M}(x_2 - x_1) &= \frac{k}{M}C \sin \Omega t \\
\ddot{x}_2 + \frac{k}{M}(x_2 - x_1) &= 0
\end{aligned}$$

busquemos solución particular

$$x_1 = D \sin \Omega t, \quad x_2 = E \sin \Omega t,$$

reemplace

$$\begin{aligned}
-\Omega^2 D + \frac{k}{M}D - \frac{k}{M}(E - D) &= \frac{k}{M}C, \\
-\Omega^2 E + \frac{k}{M}(E - D) &= 0,
\end{aligned}$$

que tiene por soluciones

$$\begin{aligned}
E &= \frac{k^2}{M^2}\frac{C}{\Omega^4 - 3\Omega^2 \frac{k}{M} + \frac{k^2}{M^2}} \\
D &= -\frac{C}{\Omega^4 - 3\Omega^2 \frac{k}{M} + \frac{k^2}{M^2}}\frac{k}{M}\left(\Omega^2 - \frac{k}{M}\right)
\end{aligned}$$

el denominador puede verse es

$$\Omega^4 - 3\Omega^2 \frac{k}{M} + \frac{k^2}{M^2} = (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} E &= \frac{k^2}{M^2} \frac{C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}, \\ D &= -\frac{C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \frac{k}{M} \left(\Omega^2 - \frac{k}{M} \right), \end{aligned}$$

amplitudes forzadas que se van a infinito si Ω coincide con algunas de las frecuencias propias. ¿Cómo se van a infinito?

La solución general, parte forzada más solución no forzada es

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 |B_1| \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 |B_2| \cos(\omega_2 t + \phi_2) - \frac{C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \frac{k}{M} \left(\Omega^2 - \frac{k}{M} \right) \sin \Omega t, \\ x_2 &= |B_1| \cos(\omega_1 t + \phi_1) + |B_2| \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{k^2}{M^2} \frac{C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Supongamos que inicialmente

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0)$$

$$\begin{aligned} 0 &= r_1 |B_1| \cos(\phi_1) + r_2 |B_2| \cos(\phi_2) \\ 0 &= |B_1| \cos(\phi_1) + |B_2| \cos(\phi_2) \\ 0 &= -r_1 |B_1| \omega_1 \sin(\phi_1) - r_2 |B_2| \omega_2 \sin(\phi_2) - \frac{C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \frac{k}{M} \left(\Omega^2 - \frac{k}{M} \right) \Omega \\ 0 &= - |B_1| \omega_1 \sin(\phi_1) - |B_2| \omega_2 \sin(\phi_2) + \frac{k^2}{M^2} \frac{C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \Omega \end{aligned}$$

se observa que deben ser $\phi_1 = \frac{\pi}{2}, \ \ \phi_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} 0 &= -r_1 |B_1| \omega_1 - r_2 |B_2| \omega_2 - \frac{C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \frac{k}{M} \left(\Omega^2 - \frac{k}{M} \right) \Omega \\ 0 &= - |B_1| \omega_1 - |B_2| \omega_2 + \frac{k^2}{M^2} \frac{C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \Omega \end{aligned}$$

que tienen por solución

$$
\begin{aligned}
|B_1| &= \frac{k}{M}\Omega\frac{\Omega^2+\frac{k}{M}(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})}{\omega_1\sqrt{5}}\frac{C}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)},\\
|B_2| &= -\frac{k}{M}\Omega\frac{(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})\frac{k}{M}+\Omega^2}{\omega_2\sqrt{5}}\frac{C}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)}.
\end{aligned}
$$

Con esto usted tiene una solución totalmente determinada pero complicada. Tarea. Pruebe que para las condiciones de resonancia, a la larga (tiempos largos)

resonancias $\Omega = \omega_1$

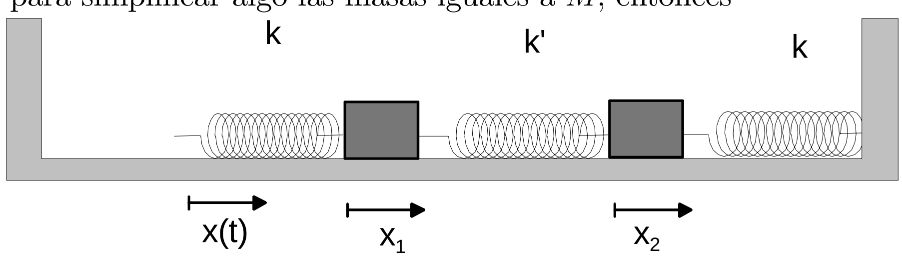
$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{C\frac{k}{M}\left(\frac{k}{M}-\omega_1^2\right)}{2\omega_1\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}t\cos\omega_1 t,\\
x_2 &= -\frac{C\frac{k^2}{M^2}}{2\omega_1\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}t\cos\omega_1 t,
\end{aligned}
$$

resonancias $\Omega = \omega_2$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{C\frac{k}{M}\left(\frac{k}{M}-\omega_2^2\right)}{2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\omega_2}t\left(\cos\omega_2 t\right),\\
x_2 &= \frac{C\frac{k^2}{M^2}}{2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\omega_2}t\cos\omega_2 t.
\end{aligned}
$$

4.5.4. Otro caso

Ahora agregamos un tercer resorte fijo a un muro en su extremo derecho. Sean para simplificar algo las masas iguales a M, entonces



$$
\begin{aligned}
M\ddot{x}_1 &= -k_1(x_1 - x(t)) + k'(x_2 - x_1),\\
M\ddot{x}_2 &= -k'(x_2 - x_1) - kx_2,
\end{aligned}
$$

reordenando

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{M}x_1 - \frac{k'}{M}x_2 &= \frac{k_1}{M}x(t), \\
\ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{M}x_2 - \frac{k'}{M}x_1 &= 0,
\end{aligned}$$

De acuerdo a un teorema de las matemáticas las solución general es la solución de la ecuación homogénea (oscilaciones libres) más una solución particular de la ecuación completa.

4.5.5. Oscilaciones libres

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{M}x_1 - \frac{k'}{M}x_2 &= 0, \\
\ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{M}x_2 - \frac{k'}{M}x_1 &= 0,
\end{aligned}$$

Nuevamentente suponga soluciones exponenciales con exponente imaginario, la solución física es la parte real de ella

$$x_1 = Ae^{i\omega t},\ x_2 = Be^{i\omega t}.$$

Si se hacen las segundas derivadas

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 Ae^{i\omega t},\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 Be^{i\omega t},$$

y se reemplaza resultan

$$\begin{aligned}
(-\omega^2 + \frac{k+k'}{M})A - \frac{k'}{M}B &= 0, \\
-\frac{k'}{M}A + (-\omega^2 + \frac{k+k'}{M})B &= 0,
\end{aligned}$$

dos ecuaciones lineales homogéneas para los coeficientes A y B. Como usted ya debe saber, sólo hay solución distinta de la trivial si el determinante de los coeficientes es cero, o sea

$$\left(-\omega^2 + \frac{k+k'}{M}\right)^2 - \left(\frac{k'}{M}\right)^2 = 0,$$

sean cuyas raíces son

$$\begin{aligned}
-\omega^2 + \frac{k+k'}{M} &= +\frac{k'}{M} \\
-\omega^2 + \frac{k+k'}{M} &= -\frac{k'}{M}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \frac{k}{M}, \\
\omega_2^2 &= \frac{k+2k'}{M},
\end{aligned}$$

En términos de esas frecuencias ω_1 y ω_2,llamadas frecuencias propias de oscilación las soluciones son

$$\begin{aligned}
x_1 &= \mathrm{Re}(A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}), \\
x_2 &= \mathrm{Re}(B_1 e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t}),
\end{aligned}$$

donde la razón entre los coeficientes es

$$\frac{A}{B} = \frac{(-\omega^2 + \frac{k+k'}{M})}{\frac{k'}{M}},$$

que tiene sólo dos valores según cada una de las dos frecuencias propias

$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{B_1} &= \frac{(-\frac{k}{M} + \frac{k+k'}{M})}{\frac{k'}{M}} = 1, \\
\frac{A_2}{B_2} &= \frac{(-\frac{k+2k'}{M} + \frac{k+k'}{M})}{\frac{k'}{M}} = -1,
\end{aligned}$$

luego las solución de la ecuación homogénea es

$$\begin{aligned}
x_1 &= \mathrm{Re}(B_1 e^{i\omega_1 t} - B_2 e^{i\omega_2 t}), \\
x_2 &= \mathrm{Re}(B_1 e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t}),
\end{aligned}$$

donde B_1, B_2 son complejos que deberán ser determinados de acuerdo a las condiciones iniciales impuestas en la solución completa.

4.5.6. Movimiento forzado

La ecuaciones del movimiento forzado pueden ser resueltas para el caso de una perturbación armónica de la forma

$$x(t) = C \sin \Omega t$$

luego las ecuaciones son

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{M} x_1 - \frac{k'}{M} x_2 &= \frac{k_1}{M} C \sin \Omega t, \\
\ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{M} x_2 - \frac{k'}{M} x_1 &= 0,
\end{aligned}$$

y sus soluciones pueden adivinarse

$$x_1 = D \sin \Omega t, \quad x_2 = E \sin \Omega t,$$

reemplazando

$$\begin{aligned}
(-\Omega^2 + \frac{k+k'}{M}) D - \frac{k'}{M} E &= \frac{k}{M} C, \\
-\frac{k'}{M} D + (-\Omega^2 + \frac{k+k'}{M}) E &= 0.
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones algebraicas no homogéneas pueden resolverse. Note que el determinante de los coeficientes es el mismo de la ecuación homogénea con ω^2 que tiene por raices que tiene por soluciones ω_1^2 y ω_2^2 es decir

$$Det = \left(-\Omega^2 + \frac{k+k'}{M}\right)^2 - \left(\frac{k'}{M}\right)^2 = (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2).$$

Resolviendo las ecuaciones por medio de determinantes resultan

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\det \begin{pmatrix} \frac{k}{M} C & -\frac{k'}{M} \\ 0 & -\Omega^2 + \frac{k+k'}{M} \end{pmatrix}}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \\
&= \frac{\frac{k}{M}\left(-\Omega^2 + \frac{k+k'}{M}\right) C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \\
E &= \frac{\frac{kk'}{M^2} C}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}
\end{aligned}$$

amplitudes forzadas que se van a infinito si Ω coincide con algunas de las frecuencias propias. ¿Cómo se van a infinito?

La solución general, parte forzada más solución no forzada es

$$
\begin{aligned}
x_1 &= |B_1|\cos(\omega_1 t+\phi_1) - |B_2|\cos(\omega_2 t+\phi_2) + \frac{\frac{k}{M}\left(-\Omega^2+\frac{k+k'}{M}\right)C}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)}\sin\Omega t,\\
x_2 &= |B_1|\cos(\omega_1 t+\phi_1) + |B_2|\cos(\omega_2 t+\phi_2) + \frac{\frac{kk'}{M^2}C}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)}\sin\Omega t.
\end{aligned}
$$

Supongamos que inicialmente

$$x_1(0)=0, x_2(0)=0, \dot{x}_1(0)=0, \dot{x}_2(0)$$

$$
\begin{aligned}
0 &= |B_1|\cos(\phi_1) - |B_2|\cos(\phi_2)\\
0 &= |B_1|\cos(\phi_1) + |B_2|\cos(\phi_2)\\
0 &= -|B_1|\,\omega_1\sin(\phi_1) + |B_2|\,\omega_2\sin(\phi_2) + \frac{\frac{k}{M}\left(-\Omega^2+\frac{k+k'}{M}\right)C}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)}\Omega\\
0 &= -|B_1|\,\omega_1\sin(\phi_1) - |B_2|\,\omega_2\sin(\phi_2) + \frac{\frac{kk'}{M^2}C}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)}\Omega
\end{aligned}
$$

se observa que deben ser $\phi_1=\frac{\pi}{2},\;\; \phi_2=\frac{\pi}{2}$ y

$$
\begin{aligned}
0 &= -|B_1|\,\omega_1 + |B_2|\,\omega_2 + \frac{\frac{k}{M}\left(-\Omega^2+\frac{k+k'}{M}\right)C}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)}\Omega\\
0 &= -|B_1|\,\omega_1 - |B_2|\,\omega_2 + \frac{\frac{kk'}{M^2}C}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)}\Omega
\end{aligned}
$$

que tienen por solución

$$
\begin{aligned}
|B_1| &= \frac{kC\Omega}{2\omega_1}\frac{-\Omega^2M+k+2k'}{M^2(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)}\\
|B_2| &= -\frac{kC\Omega}{2\omega_2}\frac{-\Omega^2M+k}{M^2\left(\Omega^2-\omega_1^2\right)\left(\Omega^2-\omega_2^2\right)}
\end{aligned}
$$

Con esto usted tiene una solución totalmente determinada pero complicada.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\frac{C\Omega}{2}\omega_1(-\Omega^2+\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)+\frac{C\Omega}{2\omega_2}\omega_1^2(-\Omega^2+\omega_1^2)\sin(\omega_2 t)+\omega_1^2\left(-\Omega^2+\frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)\right)C\sin\Omega t}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)},\\
x_2 &= \frac{\frac{C\Omega}{2}\omega_1(-\Omega^2+\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)-\frac{C\Omega}{2\omega_2}\omega_1^2(-\Omega^2+\omega_1^2)\sin(\omega_2 t)+\frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\omega_1^2 C\sin\Omega t}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \frac{k}{M},\\
\omega_2^2 &= \frac{k+2k'}{M},
\end{aligned}
$$

Tarea. Pruebe que para las condiciones de resonancia, a la larga (tiempos largos)

resonancias $\Omega=\omega_1$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\frac{C\Omega}{2}\omega_1(-\omega_1^2+\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)+\frac{C\Omega}{2\omega_2}\omega_1^2(-\omega_1^2+\omega_1^2)\sin(\omega_2 t)+\omega_1^2\left(-\omega_1^2+\frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)\right)C\sin\Omega t}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)}\\
&= \frac{\frac{C\Omega}{2}\omega_1(-\omega_1^2+\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)+\omega_1^2\frac{1}{2}\left(-\omega_1^2+\omega_2^2\right)C\sin\Omega t}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)},\ \textbf{revisar signo}\\
x_2 &= \frac{\frac{C\Omega}{2}\omega_1(-\Omega^2+\omega_2^2)\sin(\omega_1 t)-\frac{C\Omega}{2\omega_2}\omega_1^2(-\Omega^2+\omega_1^2)\sin(\omega_2 t)+\frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\omega_1^2 C\sin\Omega t}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\Omega^2-\omega_2^2)},\\
&= \frac{\frac{C\Omega}{2}\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2+)\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\omega_1^2 C\sin\Omega t}{(\Omega^2-\omega_1^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)},\ \textbf{revisar signo}
\end{aligned}
$$

resonancias $\Omega=\omega_2$

Capítulo 5

Sistema de referencia no inercial

5.1. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de Newton para un sistema de partículas deben ser formuladas respecto a un sistema inercial de referencia. De ser necesario utilizar un sistema no inercial, ya sea porque esté acelerado o tenga rotaciones respecto al inercial, podemos establecer las relaciones entre el movimiento absoluto, respecto al sistema inercial, y el movimiento relativo respecto al sistema no inercial en uso, como se explica a continuación. Respecto a la figura (5.1) si $\vec{r}$ indica el vector posición absoluto y $\vec{r}\,'$ indica el vector posición relativo de una de las partículas del sistema, tenemos que

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}\,'. \tag{5.1}$$

Para relacionar velocidades y aceleraciones, debemos considerar que la velocidad relativa y aceleración relativas son las derivadas del vector posición relativo con vectores unitarios considerados constantes, entonces si

$$\vec{r}\,' = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}',$$

la velocidad y aceleración relativas son

$$\vec{v}^{\,rel} = \dot{x}'\hat{\imath}' + \dot{y}'\hat{\jmath}' + \dot{z}'\hat{k}',$$

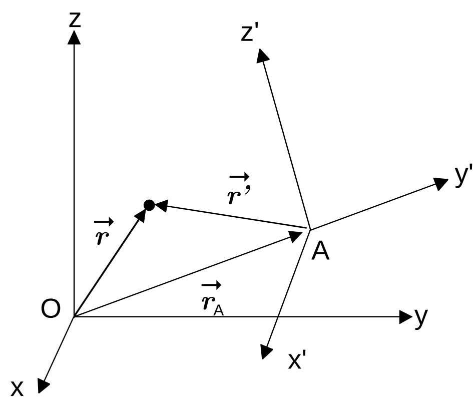


Figura 5.1: Sistema no inercial

$$\vec{a}^{\,rel} = \ddot{x}'\hat{\imath}' + \ddot{y}'\hat{\jmath}' + \ddot{z}'\hat{k}'.$$

La existencia del denominado vector velocidad angular $\vec{\omega}$ del sistema móvil, será justificada en el capítulo sobre rotaciones, por ahora bastará aceptar que las derivadas de los vectores unitarios móviles están dadas por $\vec{\omega}\times$ el respectivo vector unitario, de modo que se puede obtener

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{r}'), \\
&= \vec{v}_A + \frac{d}{dt}(x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}'), \\
&= \vec{v}_A + \vec{v}_A + (x'\frac{d}{dt}\hat{\imath}' + y'\frac{d}{dt}\hat{\jmath}' + z'\frac{d}{dt}\hat{k}') + (\dot{x}'\hat{\imath}' + \dot{y}'\hat{\jmath}' + \dot{z}'\hat{k}'),
\end{aligned}$$

es decir

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}^{\,rel}, \tag{5.2}$$

de manera similar puede demostrarse que

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{\,rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \vec{a}^{\,rel}. \tag{5.3}$$

Esta expresión es conocida como teorema de Coriolis. Aquí $\vec{\alpha}$ representa la aceleración angular o sea la derivada respecto al tiempo de la velocidad angular. En esta expresión los términos $2\vec{\omega}\times\vec{v}^{\,rel}$ y $\vec{a}_A+\vec{\alpha}\times\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$ son conocidos como la aceleración de Coriolis y la aceleración de arrastre de la partícula respectivamente. Considerando lo anterior, la *Segunda Ley de Newton* en el sistema no inercial de referencia tiene la expresión

$$m\vec{a}^{\,rel} = \vec{F} - m(\vec{a_A} + \vec{\alpha} \times \vec{r}^{\,\prime} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{\,rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,\prime})), \tag{5.4}$$

que puede interpretarse diciendo que la partícula obedece la segunda Ley en un sistema no inercial, pero a la fuerza real $\vec{F}$ hay que agregarle *fuerzas ficticias* dadas por

$$\vec{F}^{arrastre} = -m(\vec{a_A} + \vec{\alpha} \times \vec{r}^{\,\prime} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,\prime})),$$

y

$$\vec{F}^{coriolis} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}^{\,rel}.$$

5.2. Movimiento relativo a la tierra

Un ejemplo bastante cotidiano de sistema no inercial de referencia lo constituye la Tierra. Su no inercialidad se debe principalmente a la rotación terrestre respecto a su eje, que es muy aproximadamente constante y equivalente a una vuelta completa en 24 horas. Su valor en consecuencia es bastante pequeño

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.\,272\,2 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Ello justifica la denominada aproximación $\omega^2 \approx 0$, donde se desprecian los términos en ω^2. Si se considera como modelo a la tierra como perfectamente esférica de masa M y radio R, podemos elegir como sistema no inercial fijo en la tierra un sistema con origen en la superficie terrestre en una latitud que denominaremos λ. El eje z se elije vertical–no necesariamente radial– el eje x perpendicular a z dirigido hacia el Sur, el eje y perpendicular a los anteriores, o sea hacia el Este, como se indica en la figura (5.2). La desviación entre la vertical del lugar y la dirección radial ε está exagerada en la figura. Su estimación se hace en la sección siguiente.

5.2.1. Vertical y aceleración de gravedad del lugar

Un primer efecto de la no inercialidad del sistema de referencia terrestre es que la vertical del lugar se desvía de la dirección radial terrestre y que

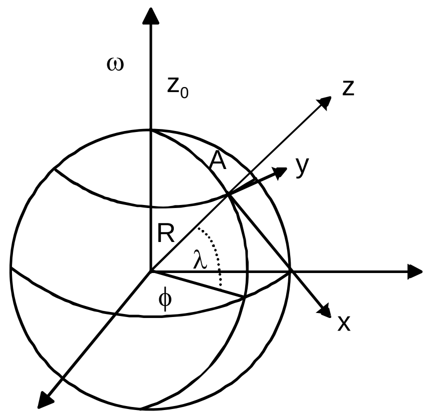


Figura 5.2: Sistema fijo a la Tierra

la aceleración de gravedad depende de la latitud. En efecto, la definición de peso y de vertical se hacen de acuerdo a una *plomada* de masa m en situación estacionaria en la Tierra. Así la vertical es la dirección de la plomada y el peso es de magnitud definida como la tensión en el hilo de la plomada. Para esa situación estacionaria, la aceleración y velocidad relativas son cero, por lo tanto una aplicación de la ecuación 5.4 a esta situación implica

$$0 = \vec{T} - \frac{GMm}{R^2}\hat{r} - m\vec{a}_A,$$

donde se ha considerado que además de la fuerza gravitacional actúa la tensión del hilo, la velocidad angular es constante y $\vec{r}\ ' = 0$. De acuerdo a lo explicado la dirección de $\vec{T}$ es el eje z y su magnitud se define como mg, el peso del cuerpo y g la aceleración local de gravedad. Entonces tenemos que

$$mg\hat{z} = \frac{GMm}{R^2}\hat{r} + m\vec{a}_A. \tag{5.5}$$

Además, la aceleración del origen A está dada por

$$\vec{a}_A = \omega\hat{k}_0 \times (\omega\hat{k}_0 \times R\hat{r}) = R\omega^2(\sin\lambda\ \hat{k}_0 - \hat{r}). \tag{5.6}$$

De modo que si se toma la magnitud de la ecuación (5.5) se obtiene

$$g = \sqrt{\left(\frac{GM}{R^2}\right)^2 - \frac{2GM}{R^2}R\omega^2\cos^2\lambda + R^2\omega^4\cos^2\lambda}, \tag{5.7}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{GM}{R^2}\right)^2 - (\frac{2GM}{R} - R^2\omega^2)\omega^2\cos^2\lambda} \tag{5.8}$$

que se reduce en el Polo a

$$g_p = \frac{GM}{R^2},$$

y en el Ecuador a

$$g_e = \left(\frac{GM}{R^2}\right) - R\omega^2.$$

La razón entre la aceleración centrípeta en el ecuador $R\omega^2$ y la aceleración de gravedad en el polo usualmente designada por β está dada por

$$\beta = \frac{R\omega^2}{GM/R^2} = 3.\,425\,7 \times 10^{-3},$$

de modo que

$$g_e = g_p(1 - \beta).$$

Para el caso de nuestro planeta (Serway, [**?**]), los valores numéricos para radio promedio terrestre $R = 6{,}37 \times 10^6$ m, masa de la tierra $M = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg, constante de gravitación $G = 6{,}67259 \times 10^{-11}$ $\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$, $\omega = \frac{2\pi}{24\times3600}$ $\mathrm{s^{-1}}$ permiten estimar g_p, g_e numéricamente y aproximar la expresión (5.7) como sigue

$$\begin{aligned} g_p &= 9.\,833\,7\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ g_e &= 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

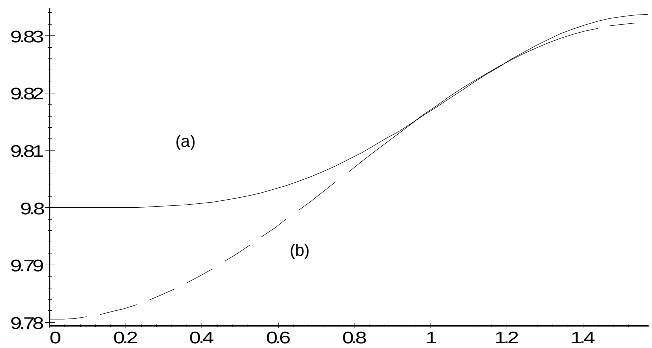


Figura 5.3: Gravedad local, tierra esférica (a) y real (b)

$$\begin{aligned}
g &= \sqrt{\left(\frac{GM}{R^2}\right)^2 - \frac{2GM}{R^2}R\omega^2\cos^2\lambda + R^2\omega^4\cos^2\lambda} \qquad \text{((a))}\\
&= \frac{GM}{R^2}\sqrt{1-\frac{2R\omega^2\cos^2\lambda}{\frac{GM}{R^2}}+\frac{R^2\omega^4\cos^2\lambda}{\frac{G^2M^2}{R^4}}}\\
&= g_p\sqrt{1-2\beta\cos^2\lambda+\beta^2\cos^2\lambda}\\
&\approx g_p(1-\beta\cos^2\lambda) = g_e(1+\beta\sin^2\lambda)\\
&= 9{,}8(1+0{,}003\,425\,7\times\sin^2\lambda)
\end{aligned}$$

Sin embargo, la tierra no es esférica y de acuerdo a la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica de 1967, (pag. [?]) el valor de g al nivel del mar varía con la latitud de acuerdo a

$$g = 9{,}780309(1+0{,}00530238\sin^2\lambda - 0{,}000005850\sin^2(2\lambda) + 0{,}00000032\sin^2\lambda\sin^2 2\lambda). \qquad \text{((b))}$$

Ambas expresiones están graficadas en función de λ (de $0 \longrightarrow \pi/2 = 1.\,570\,8$) por las curvas superior (a) e inferior (b) respectivamente en la figura (5.3). Para propósitos prácticos las antiguas fórmulas todavía se usan, la llamada fórmula de Cassinis se cita como referencia

$$g = 9{,}780490(1+0{,}0052884\sin^2\lambda - 0{,}0000059\sin^2(2\lambda)).$$

Desviación de la vertical

Una estimación del ángulo ε , entre la vertical y la dirección radial, puede obtenerse de la misma ecuación referida anteriormente haciendo un producto cruz de ella con $\hat{r}$. El resultado que se obtiene es

$$\sin\varepsilon = \frac{R\omega^2}{g}\sin\lambda\cos\lambda, \tag{5.9}$$

o sea desviación cero en el Ecuador y en el Polo y desviación máxima para latitud de 45 grados del orden de 0,1 grados. De acuerdo a los valores numéricos señalados la última expresión puede ser aproximada a

$$\varepsilon \approx 0{,}003\sin\lambda\cos\lambda. \tag{5.10}$$

5.2.2. Ecuación de movimiento aproximada

Para movimientos en la vecindad del origen A, la ecuación (5.4) con la ayuda de la ecuación (5.5) puede ser escrita como

$$m\vec{a} = \vec{F} - mg\hat{k} + \frac{GMm}{R^2}\hat{r} - m(\vec{\alpha}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})).$$

Hemos suprimido las $(')$ y se entiende que las posiciones, velocidades y aceleraciones son de ahora en adelante relativas a la Tierra. Además si consideramos que $\vec{\alpha} = 0$ y denotamos por $\vec{f}$ la fuerza actuante, fuera de la gravitacional, la aproximación considerada es

$$m\vec{a} = \vec{f} - mg\hat{k} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}. \tag{5.11}$$

El movimiento de una partícula bajo la influencia de la aceleración local de gravedad solamente ($\vec{f} = 0$) dado por la ecuación (5.11) está determinado en esta aproximación ($\omega^2 \approx 0$) por

$$\vec{a} = -g\hat{k} - 2\vec{\omega}\times\vec{v},$$

de donde por integración

$$\vec{v} = \vec{v}(0) - gt\hat{k} - 2\vec{\omega}\times(\vec{r} - \vec{r}(0)),$$

que si es sustituida en la expresión de la aceleración haciendo $\omega^2 = 0$ e integrada dos veces, conduce a

$$\begin{aligned}\vec{a} &= -g\hat{k} - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}(0) - gt\hat{k}) \\ &= -g\hat{k} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}(0) + 2gt\vec{\omega} \times \hat{k}\end{aligned}$$

de donde la velocidad está dada por

$$\vec{v} = \vec{v}(0) - gt\hat{k} - 2t\vec{\omega} \times \vec{v}(0) + gt^2\vec{\omega} \times \hat{k},$$

y la posición por

$$\vec{r} = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t - \frac{1}{2}gt^2\hat{k} - t^2\vec{\omega} \times \vec{v}(0) + \frac{1}{3}gt^3\vec{\omega} \times \hat{k}.$$

Esta expresión constituye la solución para el movimiento de un proyectil en las cercanía de la Tierra para condiciones iniciales arbitrarias. Debe observarse que para cualquier caso se tiene que

$$\vec{\omega} \times \hat{k} = \omega \cos \lambda \hat{\jmath}$$

o sea ese término contribuye siempre a desviar la partícula hacia el Este. Ese término puede ser compensado para tiempos no muy grandes por el cuarto término si la partícula parte hacia arriba.

5.2.3. Péndulo de Foucault

Respecto al sistema de referencia Terrestre una masa puntual m se une mediante una cuerda liviana inextensible L a un punto fijo de coordenadas $(0, 0, L)$ de modo que la partícula está en equilibrio relativa a la tierra (estacionaria) en el origen del sistema. Para una perturbación pequeña de la posición más baja, la ecuación de movimiento (5.11), escrita en coordenadas cartesianas tiene por componentes

$$\begin{aligned}ma_x &= T_x - 2m(-\omega(\sin\lambda)\dot{y}), \\ ma_y &= T_y - 2m((\omega\sin\lambda)\dot{x} - (-\omega\cos\lambda))\dot{z}, \\ ma_z &= T_z - mg - 2m(-\omega\cos\lambda)\dot{y}.\end{aligned}$$

La tensión en la cuerda puede ser escrita como

$$\vec{T} = \left(-\frac{x}{L}T, -\frac{y}{L}T, \frac{L-z}{L}T\right),$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{x}{mL}T + 2\omega\dot{y}\sin\lambda, \\
\ddot{y} &= -\frac{y}{mL}T - 2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda), \\
\ddot{z} &= \frac{L-z}{mL}T - g + 2\omega\dot{y}\cos\lambda.
\end{aligned}$$

De la tercera ecuación del último grupo, si z es pequeño, entonces $T \approx mg - 2m\omega\dot{y}\cos\lambda$. De modo que las ecuaciones aproximadas de movimiento en el plano xy serán

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}x - 2\omega\dot{y}\sin\lambda = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{L}y + 2\omega\dot{x}\sin\lambda = 0.$$

Si denotamos por $\vec{\Omega} = (-\omega\sin\lambda)\hat{k}$ y por $\vec{R} = (x, y)$ al vector posición en el plano, las dos últimas ecuaciones pueden ser escritas en una sola como

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{R} - 2\vec{\Omega}\times\frac{d}{dt}\vec{R} + \frac{g}{L}\vec{R} = 0, \tag{5.12}$$

donde se derivan solamente las coordenadas. En términos simples, esas derivadas son la velocidad y aceleración del punto del plano relativas al sistema (x, y, z). Podemos relacionar con las velocidades y aceleraciones relativas a otro sistema que tiene el mismo origen y rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$, pero despreciando términos en Ω^2, de acuerdo a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{R} &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{R} + \vec{\Omega}\times\vec{R}, \\
\frac{d^2}{dt^2}\vec{R} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{R} + 2\vec{\Omega}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{R},
\end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación para la variación relativa de las coordenadas es

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{R} + 2\vec{\Omega}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{R} - 2\vec{\Omega}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{R} + \frac{g}{L}\vec{R} \approx 0,$$

o bien

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{R} + \frac{g}{L}\vec{R} \approx 0. \tag{5.13}$$

Esto es, oscilaciones de frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/L}$ respecto a un sistema que rota respecto a la vertical del lugar con la frecuencia angular (precesión de Foucault) $(-\omega \sin \lambda)\hat{k}$. El movimiento de este péndulo ha sido iniciado desde el origen con alguna velocidad inicial pequeña. Si el movimiento es iniciado desde un punto alejado de la vertical, se manifiesta otro efecto (precesión del péndulo esférico) que se describe en la sección siguiente y con más detalles en el apéndice.

5.2.4. Péndulo esférico

Un efecto similar al de Foucault pero de menor magnitud ocurre cuando el movimiento del péndulo se inicia desde una posición alejada de la vertical con alguna velocidad inicial de precesión o nula, aun cuando este movimiento sea respecto a un sistema inercial. Este efecto de "área" es deducido en el apéndice y en la referencia Synge, p.56 [**?**], " la velocidad angular aerolar es $(3/8)\alpha^2\omega \sin \lambda$". En el movimiento relativo a la tierra que rota, si el movimiento de la partícula se inicia desde un punto alejado de la vertical *quemando* un hilito que la sostiene (en reposo relativo a la tierra), la rotación terrestre causa que exista una velocidad absoluta de precesión inicial distinta de cero, por lo cual el efecto de precesión proporcional al área de la elipse se manifestará. Sin rotación terrestre el movimiento estaría en un plano vertical. Considerando la rotación terrestre veremos que si la amplitud angular inicial es pequeña, la órbita proyectada en un plano horizontal es una elipse que precesa en torno de la vertical con una velocidad angular de precesión mucho menor que la de Foucault.

5.3. Teorema de Larmor

Respecto a un sistema inercial, si parte de la fuerza que actúa sobre una partícula es perpendicular a la velocidad y a una dirección fija $\hat{k}_0$ de modo que

$$\vec{F} = \vec{f} + \alpha\vec{v} \times \hat{k}_0,$$

una simplificación de la ecuación de movimiento en el sistema de referencia inercial se logra si se utiliza un sistema de referencia (no inercial) que rota con velocidad angular constante en la dirección fija $\hat{k}_0$. La segunda ley de Newton nos daría, para un origen A fijo

$$m\vec{a}^{\,rel} = \vec{f} + \alpha\vec{v} \times \hat{k}_0 - m(2\vec{\omega} \times \vec{v}^{\,rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})),$$

pero aquí conviene elegir $\vec{\omega} = \omega\hat{k}_0$, resultando

$$m\vec{a}^{\,rel} = \vec{f} + \alpha(\vec{v}^{\,rel} + \omega\hat{k}_0 \times \vec{r}) \times \hat{k}_0 - 2m\omega\hat{k}_0 \times \vec{v}^{\,rel} - m\omega\hat{k}_0 \times (\omega\hat{k}_0 \times \vec{r}),$$

o bien

$$\begin{aligned} m\vec{a}^{\,rel} &= \vec{f} + \alpha\vec{v}^{\,rel} \times \hat{k}_0 + \alpha\omega(\hat{k}_0 \times \vec{r}) \times \hat{k}_0 + 2m\omega\vec{v}^{\,rel} \times \hat{k}_0 \\ &\quad -m\omega\hat{k}_0 \times (\omega\hat{k}_0 \times \vec{r}), \end{aligned}$$

y si se escoge ω de modo que los términos dependientes de la velocidad relativa se cancelen, o sea

$$\omega = -\frac{\alpha}{2m}, \tag{5.14}$$

se obtiene que la ecuación de movimiento en ese sistema rotante de referencia es

$$m\vec{a}^{\,rel} = \vec{f} + \frac{\alpha^2}{4}(\hat{k}_0 \times (\hat{k}_0 \times \vec{r})),$$

ecuación que puede ser aproximada, si el término en α^2 puede ser despreciado, a la siguiente ecuación

$$m\vec{a}^{\,rel} = \vec{f}.$$

O sea, el efecto de una fuerza perturbadora pequeña ($\alpha \lll 1$) del tipo considerada equivale a resolver el problema dado por la fuerza $\vec{f}$ en un sistema que rota con la velocidad angular adecuada (5.14). Un ejemplo lo constituyen electrones o cargas e que están describiendo órbitas debido a la presencia de alguna fuerza central $\vec{f}$. Si se aplica un campo magnético de magnitud constante B en una dirección fija $\hat{k}_0$ la fuerza adicional llamada fuerza de *Lorentz* está dada por

$$e\vec{v} \times \vec{B} = eB\vec{v} \times \hat{k}_0.$$

Por lo tanto, la influencia de un campo magnético pequeño es hacer precesar las órbitas en torno a un eje en la dirección del campo magnético con la velocidad angular de *Larmor*

$$\omega = -\frac{eB}{2m},$$

si el campo magnético es pequeño.

5.4. Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.4.1 *Una barra lisa OM de largo $2a$, ubicada en el plano vertical que contiene al Este, está inclinado en un ángulo α respecto de la horizontal. Por ella se desliza una argolla pequeña P, partiendo desde el extremo M. Calcular la reacción de la barra sobre la argolla cuando ella pasa por el punto medio de la barra si se toma en cuenta la rotación de la tierra.*

Solución. Para este caso utilizamos

$$m\vec{a} = \vec{f} - mg\hat{k} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v},$$

donde $\vec{f}$ será la reacción normal que no tiene componente a lo largo de $\vec{v}$. Las coordenadas de la partícula serán

$$x = 0,\ y,\ z = y\tan\alpha,$$

luego

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= y\hat{\jmath} + y\tan\alpha\hat{k},\\
\vec{v} &= \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{y}\tan\alpha\hat{k},\\
\vec{a} &= \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{y}\tan\alpha\hat{k},
\end{aligned}$$

Proyectando la ecuación de movimiento a lo largo de $\vec{v}$

$$\vec{a}\cdot\hat{v} = -g\hat{k}\cdot\hat{v},$$

o sea

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + \ddot{y}\tan^2\alpha &= -g\tan\alpha,\\
\ddot{y} &= -\frac{g\tan\alpha}{\sec^2\alpha} = -g\sin\alpha\cos\alpha,\ y(0) = 2a\cos\alpha,\quad \dot{y}(0) = 0.
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
y &= 2a\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha,\\
\dot{y} &= -gt\sin\alpha\cos\alpha
\end{aligned}$$

además

$$\vec{\omega} = -\omega\cos\lambda\hat{\imath} + \omega\sin\lambda\hat{k},$$

si despejamos $\vec{f}$ y reemplazamos

$$\vec{f} = m\ddot{y}(\hat{\jmath} + \tan\alpha\hat{k}) + mg\hat{k} + 2m\dot{y}\omega(-\cos\lambda\hat{\imath} + \sin\lambda\hat{k}) \times (\hat{\jmath} + \tan\alpha\hat{k}),$$

o en componentes

$$\begin{aligned} f_x &= 2mg\omega t \sin\alpha\cos\alpha\sin\lambda, \\ f_y &= -mg\sin\alpha\cos\alpha - 2mg\omega t\sin^2\alpha\cos\lambda, \\ f_z &= mg\cos^2\alpha + 2mg\omega t\sin\alpha\cos\alpha\cos\lambda, \end{aligned}$$

el tiempo será obtenido de

$$y = 2a\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha = a\cos\alpha,$$

luego

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g\sin\alpha}}.$$

▲

Ejercicio 5.4.2 *Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad Vo en un punto de latitud λ. Encontrar el punto sobre el que vuelve a caer si se toma en cuenta la rotación de la tierra en la aproximación usual de primer orden en ω.*

Solución. Usamos

$$\vec{r} = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t - \frac{1}{2}gt^2\hat{k} - t^2\vec{\omega}\times\vec{v}(0) + \frac{1}{3}gt^3\vec{\omega}\times\hat{k},$$

con $\vec{v}(0) = V_0\hat{k}$, $\vec{r}(0) = 0$, además que $\vec{\omega}\times\hat{k} = -\omega\cos\lambda\hat{\jmath}$, $\vec{\omega}\times\vec{v}(0) = \vec{\omega}\times V_0\hat{k}$ resultando

$$\begin{aligned} \vec{r} &= V_0t\hat{k} - \frac{1}{2}gt^2\hat{k} - V_0t^2\vec{\omega}\times\hat{k} + \frac{1}{3}gt^3\vec{\omega}\times\hat{k}, \\ &= V_0t\hat{k} - \frac{1}{2}gt^2\hat{k} + (V_0t^2 - \frac{1}{3}gt^3)\omega\cos\lambda\hat{\jmath} \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} z &= V_0t - \frac{1}{2}gt^2, \\ y &= (V_0 - \frac{1}{3}gt)\omega t^2\cos\lambda, \end{aligned}$$

cae en $z = 0$, $t = \frac{2V_0}{g}$ y
$$y = \frac{4}{3}V_0^3\frac{\omega}{g^2}\cos\lambda.$$

▲

Ejercicio 5.4.3 *Una partícula se mueve, por la acción de la gravedad, sobre un plano inclinado en el ángulo α respecto de la horizontal y que rota con pequeña velocidad angular respecto de un eje vertical fijo, que intercepte el plano en el punto 0. Tomando ejes rectangulares OXY fijos en el plano de modo que el eje OX está orientado a lo largo de la línea de máxima gradiente, demostrar que si inicialmente la partícula parte del reposo desde 0, que su desviación desde OX, después de t segundos, viene dada aproximadamente por*
$$\frac{1}{6}\omega g t^3 \sin 2\alpha$$
siempre que se desprecien los términos en ω^2.

Solución. Aquí no se considera la rotación terrestre. Para el sistema $OXYZ$ podemos usar
$$\begin{aligned}\vec{N} - mg\hat{k}_0 &= m(2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{a}),\\ \hat{k}_0 &= -\sin\alpha\hat{\imath} + \cos\alpha\hat{k}\end{aligned}$$
donde
$$\vec{\omega} = \omega(-\sin\alpha\hat{\imath} + \cos\alpha\hat{k}),$$
tomando las componentes x, y de la ecuación resulta
$$\begin{aligned}-2\omega(\cos\alpha)\dot{y} + \ddot{x} &= g\sin\alpha\\ 2\omega(\cos\alpha)\dot{x} + \ddot{y} &= 0,\end{aligned}$$
integramos la primera
$$-2\omega(\cos\alpha)y + \dot{x} = gt\sin\alpha,$$
reemplazamos $\dot{x}$ en la segunda despreciando términos en ω^2 resultando
$$2\omega(\cos\alpha)gt\sin\alpha + \ddot{y} = 0,$$
o sea
$$\ddot{y} = -2\omega g t\cos\alpha\sin\alpha = -\omega g t\sin 2\alpha,$$

e integrando dos veces

$$y = -\frac{1}{6}\omega g t^3 \sin 2\alpha.$$

▲

EJERCICIO 5.4.4 *Una partícula de masa m se mueve en movimiento armónico simple $y = a\cos nt$ en una ranura suave orientada en E a 0 sobre la superficie de la tierra en un punto de latitud λ. Demostrar que, si desprecian los términos que contienen el cuadrado de la velocidad angular de la tierra, la reacción de la ranura tiene una componente horizontal en ángulo recto respecto al movimiento y de magnitud $2man\omega\sin\lambda\sin nt$ y una componente vertical cuya magnitud fluctúa armónicamente, con una amplitud $2man\omega\cos\lambda$.*

Solución. Nuevamente

$$m\vec{a} = \vec{f} - mg\hat{k} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v},$$

donde $\vec{f}$ será la reacción normal que no tiene componente a lo largo de $\vec{v}$. Las coordenadas de la partícula serán

$$x = 0,\ y = a\cos nt,\ z = 0,$$

luego

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= a(\cos nt)\hat{\jmath},\\
\vec{v} &= -an(\sin nt)\hat{\jmath},\\
\vec{a} &= -an^2(\cos nt)\hat{\jmath},
\end{aligned}$$

además

$$\vec{\omega} = -\omega\cos\lambda\hat{\imath} + \omega\sin\lambda\hat{k},$$

luego

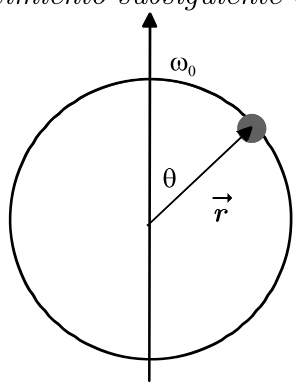
$$\begin{aligned}
\vec{f} &= m\vec{a} + mg\hat{k} + 2m\vec{\omega}\times\vec{v},\\
&= -man^2(\cos nt)\hat{\jmath} + mg\hat{k} - 2m(-\omega\cos\lambda\hat{\imath} + \omega\sin\lambda\hat{k})\times an(\sin nt)\hat{\jmath},\\
&= -man^2(\cos nt)\hat{\jmath} + mg\hat{k} - 2m(-\omega\cos\lambda\hat{k} - \omega\sin\lambda\hat{\imath})an(\sin nt),
\end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}
f_x &= 2man\omega(\sin\lambda)\sin nt,\\
f_z &= mg + 2man(\omega\cos\lambda)(\sin nt),
\end{aligned}$$

que prueban lo pedido.

EJERCICIO 5.4.5 *Una partícula de masa m puede deslizar sin roce en el interior de un tubo pequeño doblado en forma de un círculo de radio a. Inicialmente se hace rotar en torno de un diámetro vertical el tubo con velocidad ω_0 estando la partícula en una posición definida por el ángulo θ_0 respecto de la vertical. Estudiar el movimiento subsiguiente de la partícula.*



Solución. De acuerdo al Teorema de Coriolis, tomando como sistema de referencia rotante al aro, la aceleración absoluta es

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}^{rel},$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{a}_O &= 0, \\ \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= 0, \\ \vec{\omega} &= \omega_0 \hat{k}, \\ \vec{v}^{rel} &= a\dot{\theta}\hat{\theta}, \\ \vec{a}^{rel} &= a\ddot{\theta}\hat{\theta} - a\dot{\theta}^2 \hat{r}, \end{aligned}$$

entonces resultará

$$m\vec{a} = m(2\omega_0 \hat{k} \times a\dot{\theta}\hat{\theta} + a\omega_0^2 \hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{r}) + a\ddot{\theta}\hat{\theta} - a\dot{\theta}^2 \hat{r}) = \vec{N} - mg\hat{k}.$$

La ecuación de movimiento resulta eliminando $\vec{N}$ lo que se logra tomándola componente tangencial $\cdot\hat{\theta}$ de la última ecuación. Así

$$a\omega_0^2(\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{r})) \cdot \hat{\theta} + a\ddot{\theta} = -g\hat{k} \cdot \hat{\theta},$$

o sea

$$\begin{aligned}\omega_0^2(\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{r}))\cdot\hat{\theta}+\ddot{\theta} &= \frac{g}{a}\sin\theta,\\ \ddot{\theta}-\omega_0^2\cos\theta\sin\theta &= \frac{g}{a}\sin\theta.\end{aligned}$$

Podemos integrarla una vez sabiendo que

$$\theta(0)=\theta_0,\quad \dot{\theta}(0)=0,$$

resultando

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\omega_0^2(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)=-\frac{g}{a}(\cos\theta-\cos\theta_0).$$

Analicemos sobre la existencia de un punto de retorno, donde $\dot{\theta}=0$. Una solución es el punto de partida θ_0. Otro existe si

$$\cos\theta_1=-\cos\theta_0-\frac{2g}{a\omega_0^2}>-1,$$

lo cual requiere que

$$a\omega_0^2>\frac{2g}{1-\cos\theta_0}.$$

Esto significa que si se cumple lo anterior, la partícula oscila entre θ_0 y θ_1. Caso contrario la partícula oscila entre θ_0 y $2\pi-\theta_0$. Note que en el primer caso existe un punto estacionario θ_e donde $\ddot{\theta}=0$, este satisface

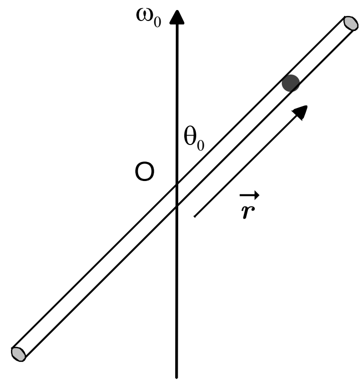
$$\cos\theta_e=-\frac{g}{a\omega_0^2}$$

y se cumple que

$$\cos\theta_e=\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_0}{2}.$$

▲

Ejercicio 5.4.6 *Una partícula de masa m, puede deslizar, sin fricción en un tubo rígidamente unido en un ángulo $\theta_0=60^o$ con un eje vertical que gira con velocidad constante ω_0 tal que $\omega_0^2=2g/r_0$. Si la partícula se lanza por el interior del tubo con las condiciones iniciales: $r=r_0$, $\quad\dot{r}=-\sqrt{gr_0/2}$ encontrar el menor valor que alcanza el radio r en el movimiento de la partícula.*



Solución. Similarmente al problema anterior, tomando como sistema rotante al tubo, tenemos

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}^{rel},$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{a}_O &= 0, \\ \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= 0, \\ \vec{\omega} &= \omega_0 \hat{k}, \\ \vec{v}^{rel} &= \dot{r}\hat{r}, \\ \vec{a}^{rel} &= \ddot{r}\hat{r}, \end{aligned}$$

luego resulta

$$m\vec{a} = m(2\omega_0 \hat{k} \times \dot{r}\hat{r} + \omega_0^2 \hat{k} \times (\hat{k} \times r\hat{r}) + \ddot{r}\hat{r}) = \vec{N} - mg\hat{k}.$$

Tomemos la componente radial

$$2\omega_0 \dot{r}(\hat{k} \times \hat{r}) \cdot \hat{r} + \omega_0^2 (\hat{k} \times (\hat{k} \times r\hat{r})) \cdot \hat{r} + \ddot{r} = -g\hat{k} \cdot \hat{r},$$

luego

$$\ddot{r} - \omega_0^2 r \sin^2 \theta_0 = -g \cos \theta_0.$$

Pero $\omega_0^2 = 2g/r_0$ luego

$$\ddot{r} = \frac{2g}{r_0} r \sin^2 \theta_0 - g \cos \theta_0.$$

El punto donde la partícula podría estar estacionaria es

$$r_e = \frac{1}{2} r_0 \frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0} = \frac{1}{2} r_0 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} r_0.$$

Luego en el punto de partida la partícula es lanzada hacia el punto estacionario. ¿Llegará? Integrando la ecuación de segundo orden respecto a r tenemos

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\dot{r}_0^2 = \frac{g}{r_0}(r^2 - r_0^2)\sin^2\theta_0 - g(r - r_0)\cos\theta_0.$$

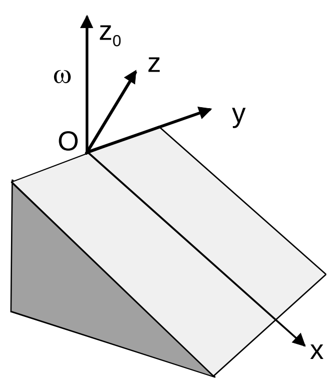
Hagamos $\dot{r} = 0$ y $\theta_0 = 60^o$

$$\begin{aligned} -\frac{gr_0}{4} &= \frac{g}{r_0}(r^2 - r_0^2)\frac{3}{4} - g(r - r_0)\frac{1}{2}, \\ 0 &= \frac{3}{r_0} r^2 - 2r, \end{aligned}$$

$$r_{\text{mín}} = \frac{2}{3} r_0.$$

▲

Ejercicio 5.4.7 *Un plano suave inclinado en un ángulo con respecto a la horizontal está rígidamente conectado con un eje vertical en 0 (fijo en el espacio) alrededor del cual se mueve con una velocidad angular uniforme. Una partícula de masa unitaria se mueve bajo la acción de la gravedad sobre el plano.*



Pruebe que si x es el desplazamiento de la partícula a lo largo de la línea de máxima pendiente que pasa por 0, entonces:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \omega^2(3\cos^2\alpha - 1)\frac{d^2x}{dt^2} + x\omega^4\cos^2\alpha = g\omega^2\sin\alpha.$$

Si se desprecian los términos en ω^2*, pruebe que:*

$$y(t) = -\frac{1}{6}\omega g t^3 \sin 2\alpha$$

si la partícula parte en reposo del origen.

Solución. Si tomamos como sistema de referencia al sistema $OXYZ$ el cual rota con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega \hat{k}_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} m(\vec{a}_O + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}^{rel}) &= \vec{N} - mg\hat{k}_0, \\ m(2\vec{\omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}^{rel}) &= \vec{N} - mg\hat{k}_0, \end{aligned}$$

tomando las componentes según ejes X, Y resulta

$$\begin{aligned} 2\omega\hat{k}_0 \times \dot{y}\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + \omega^2(x\sin^2\alpha - x) + \ddot{x} &= -g\sin\alpha, \\ 2\omega\hat{k}_0 \times \dot{x}\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} - \omega^2 y + \ddot{y} &= 0, \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y}\cos\alpha - \omega^2 x\cos^2\alpha &= -g\sin\alpha, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x}\cos\alpha - \omega^2 y &= 0, \end{aligned}$$

luego haciendo algunas derivadas

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y}\cos\alpha - \omega^2 x\cos^2\alpha &= -g\sin\alpha, \\ \ddddot{x} - 2\omega\dddot{y}\cos\alpha - \omega^2\ddot{x}\cos^2\alpha &= 0, \\ \dddot{y} + 2\omega\ddot{x}\cos\alpha - \omega^2\dot{y} &= 0, \end{aligned}$$

eliminamos $\dot{y}$ entre la primera y la tercera

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\frac{(\dddot{y} + 2\omega\ddot{x}\cos\alpha)}{\omega^2}\cos\alpha - \omega^2 x\cos^2\alpha &= -g\sin\alpha, \\ \ddot{x} - 2\frac{\dddot{y}}{\omega}\cos\alpha - 4\ddot{x}\cos^2\alpha - \omega^2 x\cos^2\alpha &= -g\sin\alpha, \end{aligned}$$

de la segunda del grupo anterior eliminamos

$$\dddot{y} = \frac{\ddddot{x} - \omega^2\ddot{x}\cos^2\alpha}{2\omega\cos\alpha},$$

resultando

$$\frac{d^4x}{dt^4}+\omega^2(3\cos^2\alpha-1)\frac{d^2x}{dt^2}+x\omega^4\cos^2\alpha=g\omega^2\sin\alpha.$$

Ahora, las ecuaciones originales al despreciar términos en ω^2 son

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\omega\dot{y}\cos\alpha &= -g\sin\alpha,\\ \ddot{y}+2\omega\dot{x}\cos\alpha &= 0,\end{aligned}$$

integrando la segunda

$$\dot{y}+2\omega x\cos\alpha=0,$$

de vuelta en la primera

$$\ddot{x}=-g\sin\alpha\Rightarrow\dot{x}=-gt\sin\alpha\Rightarrow x=-\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha,$$

luego

$$\dot{y}=\omega gt^2\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow y=\frac{1}{3}\omega gt^3\sin\alpha\cos\alpha.$$

▲

Ejercicio 5.4.8 *Una partícula de masa m cae desde el reposo desde una altura h. Determinar x, y, z en función del tiempo, tomando en cuenta la rotación de la tierra, en la aproximación usual de primer orden en ω.*

Solución. Esto es resuelto por (**??**)

$$\vec{r}=\vec{r}(0)+\vec{v}(0)t-\frac{1}{2}gt^2\hat{k}-t^2\vec{\omega}\times\vec{v}(0)+\frac{1}{3}gt^3\vec{\omega}\times\hat{k},$$

colocando las condiciones iniciales adecuadas

$$\begin{aligned}\vec{r} &= h\hat{k}-\frac{1}{2}gt^2\hat{k}+\frac{1}{3}gt^3\vec{\omega}\times\hat{k},\\ &= h\hat{k}-\frac{1}{2}gt^2\hat{k}+\frac{1}{3}gt^3\omega\cos\lambda\hat{\jmath}\end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}x &= 0,\\ y &= \frac{1}{3}gt^3\omega\cos\lambda,\\ z &= h-\frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Ejercicio 5.4.9 *Una partícula de masa m cae desde una altura h por el interior de un tubo liso vertical. Determinar z en función del tiempo y la reacción del tubo debido a la rotación terrestre.*

Solución. *Ahora, llamando $\vec{N}$ la reacción normal, tenemos*

$$m\vec{a} = \vec{N} - mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v},$$

con

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{z}\hat{k}, \\ \vec{a} &= \ddot{z}\hat{k}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} m\ddot{z}\hat{k} &= \vec{N} - mg\hat{k} - 2m\dot{z}\vec{\omega} \times \hat{k}, \\ m\ddot{z}\hat{k} &= \vec{N} - mg\hat{k} - 2m\dot{z}\omega\cos\lambda\hat{\jmath}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -g \Rightarrow z = h - \frac{1}{2}gt^2, \\ \vec{N} &= (2m\dot{z}\omega\cos\lambda)\hat{\jmath} = -(2mgt\omega\cos\lambda)\hat{\jmath}. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.4.10 *Una partícula de masa m está vinculada a un plano liso horizontal OXY sometida a una fuerza $-kr$ hacia un origen O en el plano, siendo k una constante, Determinar las coordenadas sobre el plano (x, y) y la reacción del plano en función del tiempo tomando en cuenta la rotación de la tierra.*

Solución. Similarmente, con $z = 0$

$$m\vec{a} = N\hat{k} - k\vec{r} - mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Usando coordenadas cartesianas en el plano AXY y tomando componentes X, Y tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m}x + 2\dot{y}\omega\sin\lambda, \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m}y - 2\dot{x}\omega\sin\lambda. \end{aligned}$$

Estas son las ecuaciones diferenciales a integrar. Lo dejaremos como trabajo de investigación.

EJERCICIO 5.4.11 *Una partícula de masa m está vinculada a un plano liso horizontal. Determinar las coordenadas sobre el plano (x, y), y la reacción del plano en función del tiempo tomando en cuenta la rotación terrestre.*

Solución. Ahora, a diferencia del problema anterior no hay fuerza elástica, luego resultará

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y}\omega \sin \lambda, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x}\omega \sin \lambda. \end{aligned}$$

Es preciso dar condiciones iniciales para integrar. Supongamos que inicialmente

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= U, \\ \dot{y}(0) &= V. \end{aligned}$$

Al integrar una vez resultará

$$\begin{aligned} \dot{x} - U &= 2y\omega \sin \lambda, \\ \dot{y} - V &= -2x\omega \sin \lambda. \end{aligned}$$

Luego, en la aproximación $\omega^2 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2(V - 2x\omega \sin \lambda)\omega \sin \lambda \simeq 2V\omega \sin \lambda, \\ \ddot{y} &= -2(U + 2y\omega \sin \lambda)\omega \sin \lambda \simeq -2U\omega \sin \lambda. \end{aligned}$$

Movimiento uniformemente acelerado que es trivial integrar.

Capítulo 6

Sistema rígido de partículas

6.1. Cantidades cinemáticas

Las cantidades cinemáticas, que dependen de las velocidades de las partículas del cuerpo, adquieren una forma especial cuando se trata de un sistema rígido de partículas. De acuerdo a lo estudiado en el capítulo sobre rotaciones, la descripción del movimiento de un cuerpo rígido puede hacerse en términos de tres coordenadas que den cuenta de los desplazamientos de un punto del cuerpo y de tres ángulos o parámetros que den cuenta de las rotaciones del cuerpo. Por esa razón existen en general solo seis variables necesarias en la descripción del movimiento de un cuerpo rígido y por lo tanto, es suficiente considerar solamente las seis ecuaciones escalares (2.35) y (2.36), o bien reemplazar alguna de ellas por el teorema de conservación de energía, si ello corresponde. Aquí solamente indicaremos las consideraciones especiales que permiten expresar tanto la energía cinética y el momentum angular de un cuerpo rígido, en términos de su velocidad angular y la matriz de inercia. Las ecuaciones dinámicas aplicables son aquellas recién citadas de un sistema de partículas. Considerando la relación básica entre las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido, ver fig.(6.1)

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

podemos expresar el momento angular de un sistema rígido de partículas que mantiene un punto O fijo como

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i), \tag{6.1}$$

o bien, para un cuerpo rígido continuo que mantiene un punto O fijo

$$\vec{L}_O = \int dm \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\ ). \tag{6.2}$$

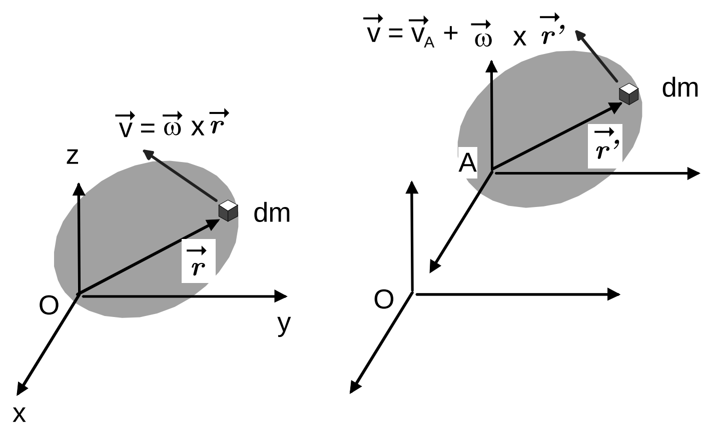


Figura 6.1: velocidades de un cuerpo rígido

Si se considera la siguiente forma de realizar un *producto cruz* (ver *rotaciones)*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (\vec{a}\times)\, \vec{b},$$

cualquiera de las dos expresiones (6.1) o (6.2) puede escribirse, al usar notación matricial, de la siguiente forma

$$\vec{L}_O = H_O \vec{\omega}.$$

donde H_O es una matriz 3×3, la denominada *matriz de inercia del sistema relativa al origen O* y que, para el caso de un cuerpo rígido continuo, por definición es

$$H_O = -\int dm\, (\vec{r}\times)^2 .$$

y para un sistema rígido de partículas

$$H_O = -\sum m_i \left(\vec{r}_i \times\right)^2 .$$

6.1.1. Energía cinética y momentum angular

Se deja como ejercicio, en este resumen, probar que:

Ejercicio 6.1.1 *En el movimiento general de un sistema rígido de partículas, pruebe que:*

$$\begin{aligned}
\vec{L}_O &= M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + H_G\vec{\omega}, \\
\vec{L}_G &= H_G\vec{\omega}, \\
K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_G\vec{\omega}
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.1.2 *En el caso que un punto 0 se mantenga fijo, pruebe que:*

$$\begin{aligned}
\vec{L}_O &= M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + H_G\vec{\omega} = H_O\vec{\omega}, \\
\vec{L}_G &= H_G\vec{\omega}, \\
K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_G\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot H_0\vec{\omega}.
\end{aligned}$$

6.1.2. Algunas propiedades de la matriz de inercia

La expresión explícita de la matriz de inercia (sus componentes), depende del origen elegido, así como de la orientación de los ejes. Sus componentes las indicaremos de acuerdo a

$$H = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

siendo los elementos de la diagonal llamados *momentos de inercia y* los de fuera de la diagonal, *productos de inercia*

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int dm(y^2 + z^2),\ I_{yy} = \int dm(x^2 + z^2),\ \text{etc.} \\
I_{xy} &= I_{yx} = -\int xydm,\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Por ser la matriz de inercia una matriz real simétrica, ella puede ser diagonalizada. Las direcciones para las cuales ella es diagonal, se denominan direcciones o ejes principales de inercia del cuerpo, en el punto seleccionado. Cuando hay dos valores propios repetidos, todos los ejes del plano correspondiente a esos dos vectores propios, son ejes principales de inercia. Si los tres valores propios son iguales, todo eje es en ese punto es principal de inercia. En cualquier caso, siempre es posible escoger tres direcciones principales de inercia ortogonales entre si. Las propiedades de simetría de un cuerpo, cuando existen, ayudan en la determinación de las direcciones principales de inercia. Para lo que sigue, consideraremos cuerpos rígidos homogéneos de modo que las propiedades de simetría del cuerpo coinciden con sus simetrías geométricas. Pueden entonces probarse los siguientes teoremas:

6.1.3. Teoremas

▶ Teorema 6.1
Todo eje de simetría, es principal de inercia en todos sus puntos.

▶ Teorema 6.2
Un eje perpendicular a un plano de simetría de reflexión, es principal de inercia donde se intersectan.

▶ Teorema 6.3
Un eje paralelo a un eje de simetría, es principal de inercia donde lo corta perpendicularmente el plano que contiene al centro de masas.

6.1.4. El elipsoide de inercia

Las consideraciones anteriores admiten una visualización gráfica. La forma cuadrática

$$\vec{r}^{\,T} \cdot H_O \vec{r} = 1,$$

o bien desarrollada explícitamente en la forma

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = 1$$

representa en general, un elipsoide centrado en el origen seleccionado del cuerpo pero rotado respecto a los ejes elegidos, ver figura (6.2). Los semiejes del elipsoide serán en consecuencia los ejes principales de inercia del cuerpo en ese origen, puesto que para esos ejes, la forma cuadrática no tiene productos de inercia. Este elipsoide puede degenerar desde un cilindro de sección elíptica si algún momento de inercia es cero, hasta una esfera si los tres momentos de inercia son iguales. Esta superficie, llamada elipsoide de inercia, que está fija en el cuerpo, debe por lo tanto tener las mismas propiedades de simetría del cuerpo. Por ejemplo, si uno de los ejes elegidos es de simetría de rotación del cuerpo en el origen seleccionado, ese eje debe ser uno de los semiejes del elipsoide, es decir un eje de simetría es principal de inercia en todos sus puntos. Igualmente, si el origen está en un plano de simetría de reflexión del cuerpo, el elipsoide debe tener ese mismo plano como plano de simetría de reflexión. Es decir dos semiejes del elipsoide están sobre ese plano y el tercero es perpendicular a ese plano. En consecuencia todo eje perpendicular a un plano de simetría de reflexión es principal de inercia donde se intersectan con el plano. Otra consecuencia que se entiende con claridad cuando se piensa en el elipsoide de inercia es la siguiente. Si el origen está en un eje de simetría de rotación en un ángulo distinto de 180^o, el elipsoide debe tener esa misma propiedad, por lo tanto los dos semiejes del elipsoide que son perpendiculares a ese eje deben ser iguales, o sea esos dos correspondientes momentos de inercia deben ser iguales.

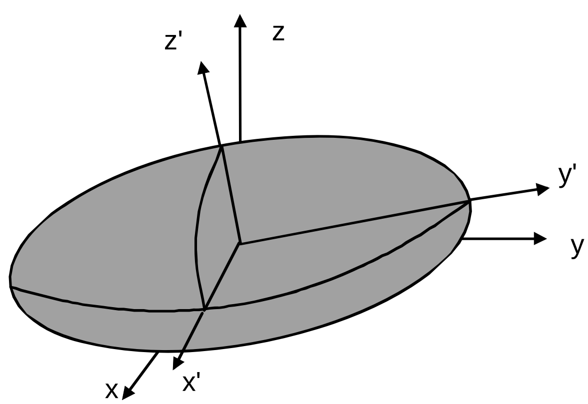


Figura 6.2: Elipsoide de inercia

Rotaciones de los ejes.

Si la matriz de inercia H es conocida en componentes para un sistema ortogonal de ejes en un punto de un cuerpo rígido, podemos obtener la matriz en componentes para ejes rotados ortogonales $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ en el mismo punto simplemente proyectando la matriz de inercia sobre estos nuevos ejes de acuerdo a

$$I_{e_1e_2} = \hat{e}_1{}^T \cdot H\hat{e}_2 \ .$$

Debemos remarcar que la matriz de inercia en un punto de un cuerpo rígido es única. Lo que cambia al cambiar ejes en un punto, son sus elementos o componentes.

Traslaciones de los ejes, Teorema de Steiner

Si se consideran traslaciones (paralelas) de los ejes, la relación de transformación de la matriz de inercia es particularmente simple si uno de los orígenes es el centro de masas G. Tal relación de transformación, conocida como teorema de Steiner sigue del siguiente análisis. Considere que

$$H_O = -\int dm \, (\vec{r}\times)^2 \, ,$$

siendo

$$(\vec{r}\times)^2 = \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ yz & -x^2 - z^2 & yz \\ zx & zy & -x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Si consideramos coordenada (x', y', z') relativas a G con origen en el punto (a, b, c) entonces

$$\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b, \\ z &= z' + b, \end{aligned}$$

si consideramos además que

$$\int x' dm = \int y' dm = \int z' dm = 0,$$

entonces podemos no considerar los términos que resulten lineales en x' o y' o z'. Así entonces ($\triangleq$ significa equivalente bajo la integral)

$$\begin{aligned} xy &= (x' + a)(y' + b) \triangleq x'y' + ab, \\ y^2 + z^2 &= (y' + b)^2 + (z' + c)^2 \triangleq (y')^2 + (z')^2 + b^2 + c^2, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
-\left(\vec{r}\times\right)^2 &= \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yz & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} \\
&\triangleq \begin{pmatrix} y'^2+z'^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'z' & x'^2+z'^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & x'^2+y'^2 \end{pmatrix} + \\
&\quad \begin{pmatrix} c^2+b^2 & -ab & -ac \\ -ba & a^2+c^2 & -bc \\ -ca & -cb & a^2+b^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

de donde se obtiene el teorema

$$
H_O = H_G + M \begin{pmatrix} c^2+b^2 & -ab & -ac \\ -ba & a^2+c^2 & -bc \\ -ca & -cb & a^2+b^2 \end{pmatrix},
$$

donde a, b, c son las coordenadas cartesianas de G respecto al origen O.

Ejercicio 6.1.3 *Se tiene un sólido homogéneo en forma de un cono recto circular de altura h, radio basal a, masa m y semi ángulo en el vértice α. Demuestre que:*

a) *En el vértice sus momentos principales de inercia son $A = B = \frac{3m}{20}(a^2+4h^2)$, $C = \frac{3ma^2}{10}$.*

b) *En el centro de su base son $A = B = \frac{m}{20}(3a^2+2h^2)$, $C = \frac{3ma^2}{10}$.*

c) *El momento de inercia en torno de una generatriz es $I = \frac{3mh^2}{4}(1 + \frac{1}{5}\sec^2\alpha)\sin^2\alpha$.*

6.2. Ecuaciones dinámicas

Como se estableció, ver ecuaciones (2.35, 2.36, 2.37) y más generalmente en (**??**), las ecuaciones dinámicas aplicables a un sistema de partículas y en particular a un cuerpo rígido son

$$
\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext},
$$

para el movimiento del centro de masas, y

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O^{ext},$$

o

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext},$$

es decir para punto fijo O de un sistema inercial, el centro de masas G o un punto A arbitrario, siendo entonces

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\overrightarrow{AG} \times \vec{a}_A. \tag{6.3}$$

Aunque no es común utilizar la última forma, en una sección más adelante mostraremos que bajo ciertas condiciones su uso simplifica muchos problemas.

6.2.1. Movimiento Plano

Cuando todas las velocidades de un cuerpo rígido son paralelas a un plano fijo, por ejemplo el plano xy, se tiene un movimiento plano. La velocidad angular del cuerpo será de la forma

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k},$$

y en consecuencia el momentum angular en G estará dado por

$$\vec{L}_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Si se trata de una lámina ($z = 0$) o bien simplemente si los ejes son principales de inercia entonces

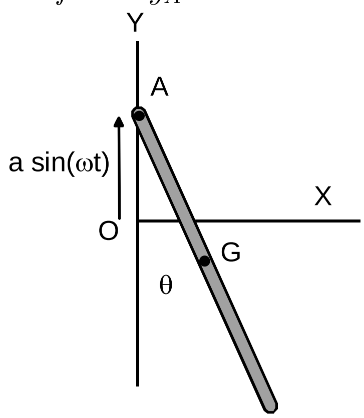
$$\vec{L}_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = I_{zz}\omega\hat{k}.$$

Presentaremos algunos ejemplos de dinámica plana de un cuerpo rígido, los cuales permiten además una solución más simple si se usa la relación general

(6.3). La utilización de la ecuación (2.37) normalmente involucra calcular el torque de alguna fuerza desconocida que debe ser finalmente eliminada utilizando la ecuación de movimiento de centro de masas. Compare ese método, con el método utilizado en los siguientes ejemplos.

.

Ejemplo 6.2.1 *Péndulo de longitud L, masa M cuyo punto de suspensión A oscila verticalmente de la forma $y_A = a\sin\omega t$.*



Péndulo de Kapitza

Solución. Para este caso tenemos

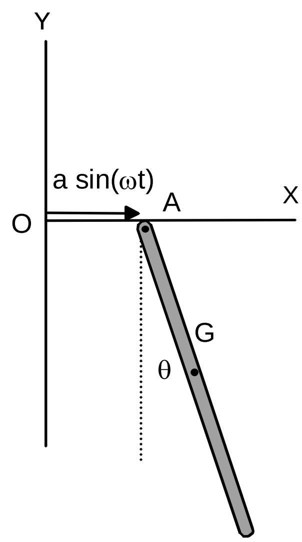
$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A)\times\vec{a}_A\cdot\hat{k},$$

pero puede fácilmente verse que $(\vec{r}_G - \vec{r}_A)\times\vec{a}_A\cdot\hat{k} = -\frac{L}{2}a\omega^2\sin\omega t\sin\theta$ obteniendo en dos pasos

$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta + M\frac{L}{2}a\omega^2\sin\omega t\sin\theta.$$

▲

Ejemplo 6.2.2 *Péndulo de longitud L, masa M cuyo punto de suspensión A oscila horizontalmente en la forma $x_A = a\sin\omega t$.*



Péndulo forzado

Solución. Para este caso

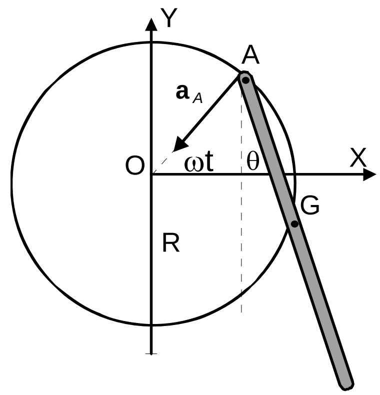
$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A)\times\vec{a}_A\cdot\hat{k},$$

pero similarmente $(\vec{r}_G - \vec{r}_A)\times\vec{a}_A\cdot\hat{k} = -\frac{L}{2}a\omega^2\sin\omega t\cos\theta$ entonces obtenemos en dos pasos

$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta + M\frac{L}{2}a\omega^2\sin\omega t\cos\theta.$$

▲

EJEMPLO 6.2.3 *Péndulo de longitud L, masa M cuyo punto de suspensión A se mueve sobre una circunferencia vertical de radio R con velocidad angular constante ω.*



Barra extremo sobre circunferencia

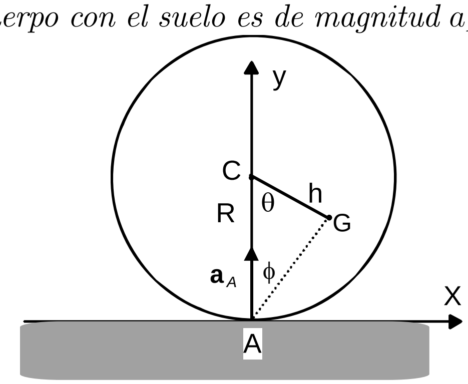
Solución. Para este caso tenemos

$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2}a\omega^2 \sin(\frac{\pi}{2} - \omega t + \theta)$ obteniendo

$$I_A\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta + M\frac{L}{2}a\omega^2\cos(\omega t - \theta).$$

EJEMPLO 6.2.4 *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica de radio R y masa M sobre un plano horizontal. En este caso la aceleración del punto de contacto A del cuerpo con el suelo es de magnitud $a_A = R\dot{\theta}^2$ hacia arriba.*



Disco que rueda

Solución. Suponiendo que el centro de masas está a distancia h del centro geométrico, tenemos

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = |\vec{r}_G - \vec{r}_A| \, R\dot{\theta}^2 \sin\phi,$$

pero

$$\frac{\sin\phi}{h} = \frac{\sin\theta}{|\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A|},$$

entonces

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = R\dot{\theta}^2 h \sin\theta,$$

y finalmente

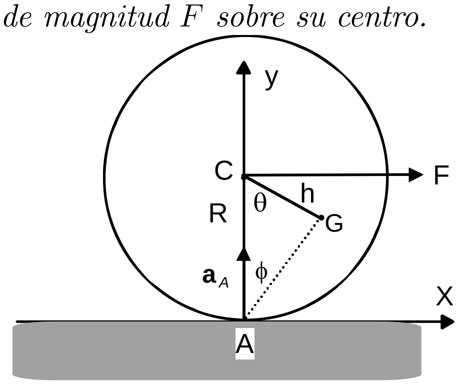
$$I_A\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta - MR\dot{\theta}^2 h\sin\theta.$$

El momento de inercia puede ser obtenido mediante el teorema de Steiner

$$I_A = I_G + M(h^2 + R^2 - 2hr\cos\theta).$$

▲

Ejemplo 6.2.5 *El mismo ejemplo, pero la rueda es actuada por una fuerza horizontal constante de magnitud F sobre su centro.*



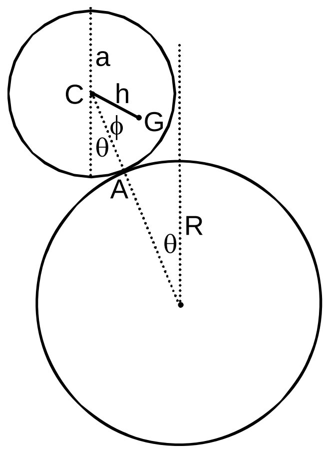
Disco tirado por fuerza

Solución. Simplemente agregamos el torque de F obteniendo

$$I_A\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta - FR - MR\dot{\theta}^2 h\sin\theta.$$

▲

EJEMPLO 6.2.6 *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica de radio a sobre un cilindro fijo de radio R.*



Rueda sobre cilindro

Solución. En este caso, demostraremos primero que la aceleración del punto A del cuerpo en contacto con el cilindro es de magnitud $a_A = aR\omega^2/(R+a)$ hacia el centro de la rueda. Aquí la velocidad angular de la rueda está relacionada con el ángulo θ mediante $\omega = (R+a)\dot{\theta}/a$ y $R\theta = a\phi$.

La velocidad de A es cero, luego

$$0 = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CA},$$

de donde

$$(R+a)\dot{\theta} = \omega a.$$

Además

$$\begin{aligned}
\vec{v}_A &= \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CA} \\
\vec{a}_A &= \vec{a}_C + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{CA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{CA}), \\
&= (R+a)\ddot{\theta}\hat{\theta} - (R+a)\dot{\theta}^2\hat{r} + \frac{(R+a)\ddot{\theta}}{a}\hat{k} \times (-a\hat{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{CA}) \\
&= (R+a)\ddot{\theta}\hat{\theta} - (R+a)\dot{\theta}^2\hat{r} - (R+a)\ddot{\theta}\hat{\theta} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{CA}) \\
&= -(R+a)\dot{\theta}^2\hat{r} + \omega^2 a\hat{r} \\
&= -\frac{\omega^2}{(R+a)}a^2\hat{r} + \omega^2 a\hat{r} = \frac{aR}{R+a}\omega^2\hat{r}.
\end{aligned}$$

(¿habrá un camino más corto?)

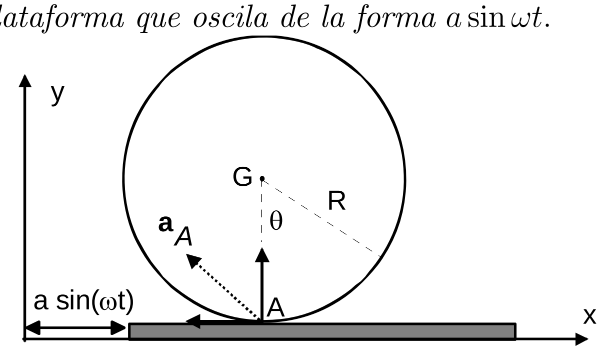
Si el centro de masa está a distancia h del centro geométrico, podemos obtener

$$\begin{aligned}(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} &= a_A h \sin\phi \\ &= \frac{aR\omega^2}{R+a} h \sin\phi,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}I_A \alpha &= -Mg(h\sin(\theta+\phi) - a\sin\theta) - M\frac{aR\omega^2}{R+a} h\sin\phi, \\ \frac{R+a}{a} I_A \ddot{\theta} &= -Mgh\sin(1+\frac{R}{a})\theta + Mga\sin\theta - M\frac{aR\dot{\theta}^2}{R+a} h \frac{(R+a)^2}{a^2}\sin\frac{R}{a}\theta, \\ I_A\ddot{\theta} &= -Mgh\frac{a}{R+a}\sin\frac{R+a}{a}\theta + \frac{Mga^2\sin\theta}{(R+a)} - MR\dot{\theta}^2 h \sin\frac{R}{a}\theta.\end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.7 *Movimiento de rodadura de una rueda de masa M y radio R, sobre una plataforma que oscila de la forma $a\sin\omega t$.*



Rueda sobre plataforma móvil

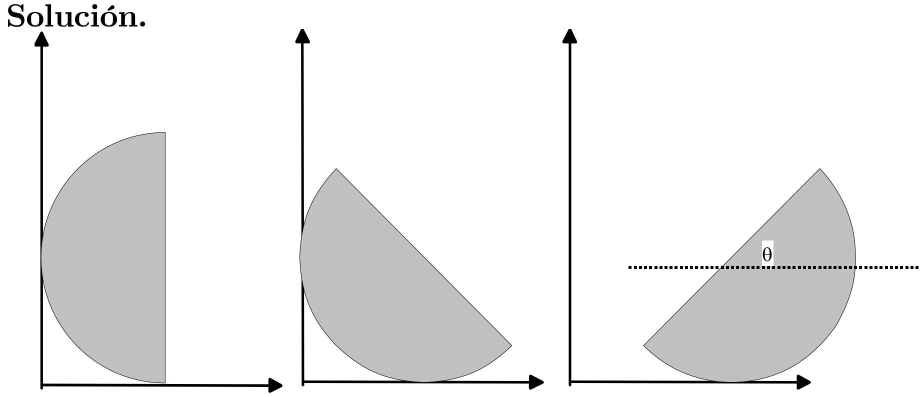
Solución. Aquí la aceleración del punto A tiene dos componentes, $a\omega^2\sin\omega t$, $R\dot{\theta}^2$ pero solo la primera importa, dando por simple inspección $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = Ra\omega^2\sin\omega t$ lo cual conduce a

$$I_A\ddot{\theta} = -MRa\omega^2\sin\omega t.$$

6.3. Ejercicios resueltos

EJERCICIO 6.3.1 *Una semiesfera homogénea de radio a está en reposo sobre un plano horizontal liso con su base paralela a una pared vertical lisa, sobre la cual la superficie semi esférica, se apoya. La semiesfera comienza a moverse partiendo del reposo, deslizando sobre el piso horizontal y la pared, ambas sin roce. Demuestre que cuando la base alcanza la posición horizontal, la rapidez angular y la rapidez del centro de masas de la semiesfera son* $\omega = \sqrt{\frac{15}{8} g/a}$, $v = \frac{3}{8} a\omega$ *respectivamente. Demuestre además durante el movimiento siguiente, el ángulo entre la base y la horizontal no excede de* $\cos^{-1}(\frac{45}{128})$.

Solución.



El centro de masa del cuerpo está a distancia $3a/8$ del centro. Mientras no despega, el cuerpo mantiene su centro fijo, y la única fuerza que realiza torque respecto a ese punto es el peso. Si en la segunda figura θ es el ángulo que ha girado la línea que contiene el centro de masa, entonces

$$I_C\ddot{\theta} = Mg\frac{3}{8}a\cos\theta,$$

donde el momento de inercia es $I = 2Ma^2/5$, luego

$$\frac{2Ma^2}{5}\ddot{\theta} = Mg\frac{3}{8}a\cos\theta,$$

o sea

$$\ddot{\theta} = \frac{15}{16}\frac{g}{a}\cos\theta,$$

que podemos integrar porque

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\dot{\theta}^2,$$

obteniendo

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{15}{16}\frac{g}{a}\sin\theta,$$

y cuando la base se coloca horizontal $\theta = \pi/2$ resultando

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}},$$

y

$$v_{CM} = \frac{3}{8}a\omega.$$

Puede probarse que en esta posición el cuerpo despega y tiene una energía inicial (respecto a la posición inicial del centro)

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3}{8}a = 0,$$

y su momentum en la dirección horizontal es

$$P_x = M\frac{3}{8}a\omega = M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}}.$$

Esas dos cantidades son conservadas, pero ahora todo el cuerpo se traslada y rota, de manera que la coordenada x del centro de masa varía. Así la energía se puede escribir

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0,$$

además

$$\begin{aligned} M\dot{x} &= M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}}, \\ y_{CM} &= \frac{3a}{8}\cos\theta, \\ \dot{y}_{CM} &= -\frac{3a}{8}\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

Cuando θ sea un extremo, $\dot{\theta} = 0$, y en ese caso, $\dot{y}_{CM} = 0$ y la ecuación de energía da

$$\frac{1}{2}M(\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}})^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0$$

que se reduce a

$$\cos\theta = \frac{45}{128},$$

o sea $\theta = 69.\,417\,^o$.

Ejercicio 6.3.2 *Un disco uniforme de radio a que está rotando con rapidez angular inicial Ω alrededor de su eje, se coloca sobre un plano horizontal donde el coeficiente de roce cinético es μ. Si la superficie se apoya uniformemente sobre el suelo, demuestre que el disco se detendrá en un tiempo $\frac{3}{4}a\Omega/(g\mu)$.*

Solución. Si la fuerza normal está distribuida uniformemente, la que actúa sobre un elemento de área $dA = rdrd\theta$ en polares será

$$dN = \frac{mg}{\pi a^2} rdrd\theta,$$

la cual produce un torque retardador

$$d\Gamma = -\mu r dN = -\frac{\mu mg}{\pi a^2} r^2 drd\theta,$$

siendo el torque total

$$\Gamma = -\frac{\mu mg}{\pi a^2}\frac{a^3}{3}2\pi = -\frac{2}{3}\mu mga$$

luego la desaceleración angular estará dada por

$$\frac{1}{2}ma^2\alpha = -\frac{2}{3}\mu mga \Rightarrow \alpha = -\frac{4}{3}\frac{\mu g}{a},$$

luego frena cuando

$$0 = \Omega - \frac{4}{3}\frac{\mu g}{a}t \Rightarrow t = \frac{3\Omega a}{4\mu g}.$$
