Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Luis Rodriguez

Auxiliares: Francisco Sepúlveda & Kim Hauser

25/Marzo/2009

P1. Una partícula se mueve en el plano x-y con aceleración constante a_0 en x creciente. La partícula incialmente está en el origen del sistema de referencia y posee una velocidad inicial v_0 en y creciente. Para un tiempo $t > 0$ cualquiera, se pide:

a) la distancia entre el origen y la partícula.
b) el ángulo que la trayectoria forma con respecto al eje x.
c) la componente tangencial de la aceleración.
d) el radio de curvatura.

Solución:

Dado que:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = a_0\hat{i} \qquad / \int dt$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (a_0 t + v_{x0})\hat{i} + v_{y0}\hat{j}$$

pero usando la condicion inicial de velocidad se concluye que
$v_{x0} = 0 \quad \wedge \quad v_{y0} = v_0 \Rightarrow$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = a_0 t\hat{i} + v_0\hat{j}$$

integrando nuevamente con respecto al tiempo se obtiene

$$\vec{r} = (\frac{1}{2}a_0 t^2 + x_0)\hat{i} + (v_0 t + y_0)\hat{j}$$

usando la condicion inicial de posición se concluye que
$x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow$

$$\vec{r} = \frac{1}{2}a_0 t^2\hat{i} + v_0 t\hat{j}$$

se sabe que la distancia se calcula como:
$d = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} \Rightarrow$

$$d = \sqrt{\frac{1}{4}a_0^2 t^4 + v_0^2 t^2} = t\sqrt{\frac{1}{4}a_0^2 t^2 + v_0^2}$$

b) Para calcular el ángulo, notemos que la trayectoria sugiere que se puede escribir $y = y(x)$, por lo que el ángulo buscado seria la derivada con respecto a x de la función $y(x)$. Si α es el ángulo buscado, entonces, usando la regla de la cadena:

$$\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

pero $\dfrac{dy}{dt} = v_0$ y $\dfrac{dx}{dt} = a_0 t$. Por lo tanto se tiene que

$$\tan(\alpha) = (\frac{v_0}{a_0})\cdot\frac{1}{t}$$

c) Para calcular la componente tangencial de la aceleración, primero calculamos el vector tangente

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{a_0 t\hat{i} + v_0\hat{j}}{\sqrt{a_0^2 t^2 + v_0^2}}$$

por último, usando que, si a_t es la componente tangencial de la aceleración, se tiene que

$$a_t = \vec{a} \cdot \hat{t} = \frac{a_0^2 t}{\sqrt{a_0^2 t^2 + v_0^2}}$$

d) dado $v = \sqrt{(a_0 t)^2 + v_0^2} \Rightarrow v^3 = ((a_0 t)^2 + v_0^2)^{3/2}$. Ahora

$$\vec{a} \times \vec{v} = (a_0\hat{i}) \times (a_0 t\hat{i} + v_0\hat{j}) = a_0 v_0 \hat{k} \Rightarrow ||\vec{a} \times \vec{v}|| = a_0 v_0$$

$$\Rightarrow \rho_c = \frac{((a_0 t)^2 + v_0^2)^{3/2}}{a_0 v_0} = \frac{v_0^2}{a_0}(1 + \frac{(a_0 t)^2}{v_0^2})^{3/2}$$

P2. Considere una curva espiral descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones:

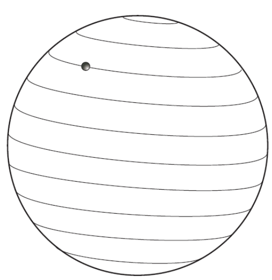
$$r = R, \phi = N\theta$$

donde R y N son constantes conocidas y positivas (N entero par). Una partícula se mueve sobre la espiral partiende desde el extremo superior ($\theta = 0$) y manteniendo una velocidad zenital constante y conocida, $\dot{\theta} = \omega_0$. Se pide:

a) Utilizando coordenadas esféricas, escriba los vectores velocidad y aceleracion para una posición albitraria de la particula sobre la trayectoria.

b) Determine el radio de curvatura de la trayectoria en el ecuador ($\theta = \pi/2$).

c) Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Indicación:** La integral resultante es difícil de calcular y la puede dejar expresada.



Solución:

a) En coordenadas esféricas:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi}$$

dado que $r = R = cte$, $\phi = N\theta$, y $\dot{\theta} = \omega_0$, se tiene que:

$$\vec{v} = R\omega_0\hat{\theta} + R\sin(\theta)N\omega_0\hat{\phi} = R\omega_0(\hat{\theta} + N\sin(\theta)\hat{\phi})$$

para la aceleración

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta))\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta))\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2(\theta))\hat{\phi}$$

usando los mismos argumentos anteriores sobre las variables, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2(\theta)) = R^2(N\omega_0)\frac{d}{dt}(\sin^2(\theta)) = 2R^2N\omega_0^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

y de aqui se desprende el valor del vector aceleración

$$\vec{a} = -R\omega_0^2(1 + N^2\sin 2(\theta))\hat{r} - R\omega_0^2N^2\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{\theta} + 2R\omega_0^2N\cos(\theta)\hat{\phi}$$

b) para el radio de curvatura, utilizaremos la ecuación

$$\rho_c = \frac{v^3}{||\vec{a} \times \vec{v}||}$$

en $\theta = \pi/2$, se tiene que

$$\vec{v} = R\omega_0(\hat{\theta} + N\hat{\phi}), \vec{a} = -R\omega_0^2(1 + N^2)\hat{r}$$

luego, haciendo producto cruz se tiene

$$\vec{a} \times \vec{v} = -R^2\omega_0^3(1 + N^2)(\hat{r} \wedge \hat{\theta} + N(\hat{r} \wedge \hat{\phi})) = -R^2\omega_0^3(1 + N^2)(\hat{\phi} - N\hat{\theta})$$

$$\Rightarrow ||\vec{a} \times \vec{v}|| = R^2\omega_0^3(1 + N^2)^{3/2}$$

ahora

$$v = R\omega_0(1 + N^2)^{1/2} \Rightarrow v^3 = R^3\omega_0^3(1 + N^2)^{3/2}$$

luego, el radio de curvatura para $\theta = \pi/2$ es

$$\rho_c = \frac{R^3\omega_0^3(1 + N^2)^{3/2}}{R^2\omega_0^3(1 + N^2)^{3/2}} = R$$

c) para el largo de curvatura

$$L = \int ||d\vec{r}|| = \int_0^\pi ||\frac{d\vec{r}}{d\theta}||d\theta$$

pero

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\theta} = R\omega_0(\hat{\theta} + N\sin(\theta)\hat{\phi})\frac{1}{\omega_0} = R(\hat{\theta} + N\sin(\theta)\hat{\phi}) \Rightarrow ||\frac{d\vec{r}}{d\theta}|| = R\sqrt{1 + N^2\sin^2(\theta)}$$

y de aquí que el largo de la curva se calcula con la expresión

$$L = R\int_0^\pi \sqrt{1 + N^2\sin^2(\theta)}d\theta$$

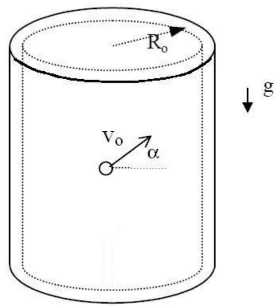
donde el tiempo que tarda en recorrerla será

$$T = \int dt = \int \frac{dt}{d\theta}d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{\omega_0}d\theta = \frac{\pi}{\omega_0}$$

P3. Una partícula de masa m se mueve con roce despreciable entre dos cilindros concéntricos, de modo que su distancia al eje de los cilindros es R. Si la partícula se lanza con velocidad $\vec{V}_0$ formando un ángulo α con la horizaontal, determine:

a) La reacción que ejerce el cilindro sobre la partícula.

b) El valor de V_0 tal que después de n vueltas completas la partícula llegue justo a la posición inicial.



Solución:

La fuerza neta que siente la partícula es:

$$\sum \vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = -N\hat{\rho} - mg\hat{k}$$

la aceleración en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

usando $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, y separando por componentes escalares se obtiene:

$$\hat{\rho}) - N = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)$$

$$\hat{\theta})0 = m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})$$

$$\hat{k}) - mg = m\ddot{z}$$

como $\rho = R = cte \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, por lo tanto, usando la segunda ecuación, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}_0$$

Ahora, veamos que de la condición inicial:

$$\vec{v}(t=0) = R\dot{\theta}_0\hat{\theta} + \dot{z}_0\hat{k} = V_0\cos\alpha\hat{\theta} + V_0\sin\alpha\hat{k}$$

por lo que se encuentra que

$$R\dot{\theta}_0 = V_0\cos\alpha \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{V_0}{R}\cos\alpha$$

$$\dot{z}_0 = V_0\sin\alpha$$

Reemplazando en la primera ecuación de movimiento

$$-N = -mR(\frac{V_0}{R}\cos\alpha)^2 \Rightarrow N = m\frac{V_0^2}{R}\cos^2\alpha$$

b) dado que $\dot{\theta} = \frac{V_0}{R}\cos\alpha$, se encuentra facilmente que

$$\theta(t) = \frac{V_0}{R}\cos\alpha t$$

veamos cuanto tiempo tarda la particula en subir y bajar. De la tercera ecuación de movimiento:

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

sea T el tiempo que tarda en ir y volver a z_0, entonces:

$$z(t = T) = -\frac{1}{2}gT^2 + \dot{z}_0 T + z_0 = z_0$$

pero $\dot{z}_0 = V_0 \sin\alpha$, por lo que el tiempo T es:

$$T = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$$

imponiendo que $\theta(t = T) = 2n\pi$ se tendrá

$$\theta(T) = \frac{V_0}{R}\cos\alpha(\frac{2V_0\sin\alpha}{g}) = 2n\pi$$

despejando, se encuentra que el valor de V_0 es

$$V_0^2 = \frac{ng\pi R}{\sin\alpha\cos\alpha}$$