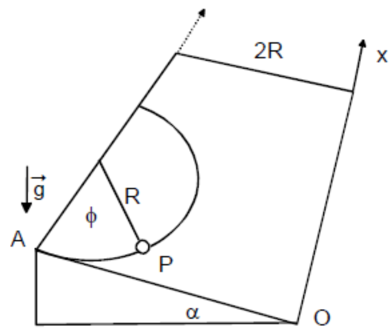
Pauta Alternativa P3 C1 FI2001 Mecánica

Profesor: Luis Rodriguez

Auxiliares: Francisco Sepúlveda & Kim Hauser

P3. Considere un plano inclinado liso de ancho $2R$ y de largo infinito, con ángulo de inclinación α . Se tiene una partícula P de masa m atada por una cuerda inextensible de largo R a un punto fijo como se indica en la figura. Inicialmente la partícula parte de A con velocidad nula. Si la cuerda se corta cuando ella experimenta una tensión máxima $T = 3mgsin\alpha$ determine:

a) El ángulo ϕ donde se corta la cuerda
b) La rapidéz de la partícula en ese instante
c) El desplazamiento total en el eje x desde que la partícula parte hasta que llega al eje x.



Sol:
a) Descompiendo la gravedad se tiene que

$$\vec{g} = g\sin\alpha\sin\phi\hat{\rho} + g\sin\alpha\cos\phi\hat{\phi} - g\cos\alpha\hat{k}$$

Ahora

$$\sum\vec{F} = mg\sin\alpha\sin\phi\hat{\rho} + mg\sin\alpha\cos\phi\hat{\phi} - mg\cos\alpha\hat{k} + N\hat{k} - T\hat{\rho}$$

y también

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\theta}$$

luego, usando la segunda ley de Newton se tiene que

$$\hat{\rho})mg\sin\alpha\sin\phi - T = -mR\dot{\phi}^2$$

$$\hat{\phi})mg\sin\alpha\cos\phi = mR\ddot{\phi}$$

de la segunda ecuación de Newton se tiene que

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{R}\sin\alpha\cos\phi$$

usando regla de la cadena, separando en variables e integrando

$$\int_0^{\dot{\phi}}\dot{\phi}d\dot{\phi} = \frac{g}{R}\sin\alpha\int_0^{\phi}\cos\phi d\phi$$

$$\dot{\phi}^2 = 2\frac{g}{R}\sin\alpha\sin\phi$$

reemplazando este resultado en la primera ecuación de movimiento se tiene que

$$mg\sin\alpha\sin\phi - T = -2mg\sin\alpha \Rightarrow T = 3mg\sin\alpha\sin\phi$$

se sabe que la cuerda se corta si $T = 3mg\sin\alpha$, por lo que se concluye que el ángulo de corte es

$$\sin\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

b) en $\phi = \pi/2$

$$\dot{\phi}^2 = 2\frac{g}{R}\sin\alpha \Rightarrow \dot{\phi} = \sqrt{2\frac{g}{R}\sin\alpha}$$

luego, como se sabe que $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$, se calcula que la rapidez de la partícula en el instante de corte es

$$v = \sqrt{2gR\sin\alpha}$$

c) Cuando la cuerda se corta, se tiene que la velocidad es horizontal (con respecto al plano inclinado), por lo que si usamos un sistema de ejes cartesianos con origen en el pivote de la cuerda, se van a tener las siguientes condiciones iniciales

$$\dot{x}_0 = \sqrt{2gR\sin\alpha}, \dot{y}_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = -R$$

ademas, es facil ver que la unica fuerza que actúa (y que nos interesa) es la proyección de la gravedad en $-\hat{j}$, que es $g\sin\alpha$. Luego, las ecuaciones de movimiento en los dos ejes son

$$\hat{i})m\ddot{x} = 0$$

$$\hat{j})m\ddot{y} = -mg\sin\alpha$$

resolviendo la segunda ecuación de movimiento

$$y(t) = -g\sin\alpha\frac{t^2}{2} + \dot{y}_0 t + y_0$$

usando las condiciones iniciales

$$y(t) = -g\sin\alpha\frac{t^2}{2} - R$$

para que llegue abajo, se debe cumplir que $y(T) = -2R$, con T el tiempo que tarda en caer. Entonces

$$\Rightarrow R = g\sin\alpha\frac{T^2}{2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2R}{g\sin\alpha}}$$

Ahora, resolvemos la primera ecuación de movimiento. Incluyendo inmediatamente las condiciones iniciales

$$x(t) = \sqrt{2gR\sin\alpha}t$$

haciendo $t = T$,se tiene que

$$x(T) = \sqrt{2gR\sin\alpha}\sqrt{\frac{2R}{g\sin\alpha}} = 2R$$

finalmente, el desplazamiento total en el eje x realizado por la partícula es $R + 2R = 3R$.