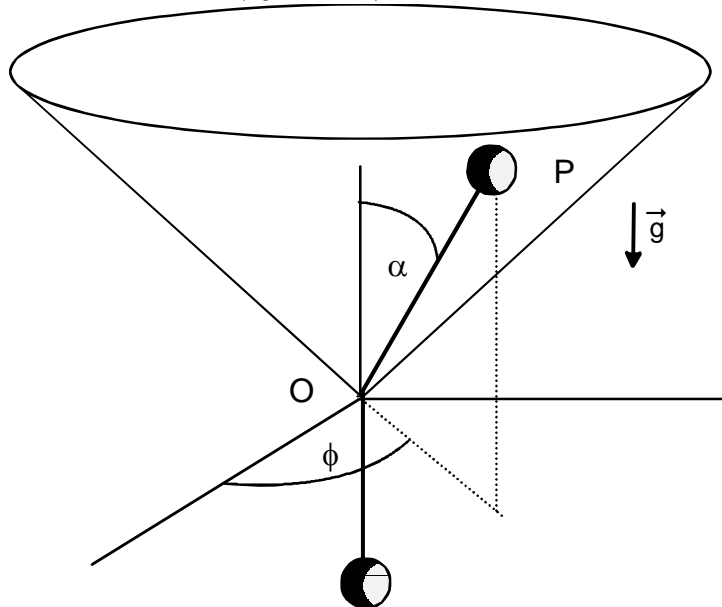


(agregar punto base)

Problema 1. Considere dos partículas de masa igual m . Una está apoyada sobre el interior de una superficie cónica lisa de semi ángulo α cuya altura es vertical. Esa partícula está unida a la otra mediante un hilo que pasa por un agujero en el vértice del cono y que se mueve sólo verticalmente. Si llamamos $r = OP$ inicialmente $r(0) = r_0$ $\dot{r}(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \Omega$

- (2p) Escriba las ecuaciones de movimiento para las dos partículas.
- (1p) Integre la componente $\hat{\phi}$ de la ecuación de movimiento.
- (1p) Elimine ϕ en la ecuación radial y determine el potencial efectivo para la coordenada r .
- (1p) Demuestre que la trayectoria circular con r constante, es estable.
- (1p) Determine el valor inicial de r_0 en términos de Ω para tener esa trayectoria circular

Usando las coordenadas ϕ y $r = OP$, escriba las ecuaciones de movimiento



En esféricas con $\theta = \alpha$ constante

$$\begin{aligned}
 ma_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha) = -mg \cos \alpha - T \\
 ma_\theta &= m(-r\dot{\phi}^2 \sin \alpha \cos \alpha) = mg \sin \alpha - N \\
 ma_\phi &= m(2\dot{r}\dot{\phi} \sin \alpha + r\ddot{\phi} \sin \alpha) = 0
 \end{aligned}
 \tag{(a) 2p}$$

Partícula que cuelga

$$T - mg = m\ddot{r}$$

La tercera se puede integrar

$$r^2 \dot{\phi} = h = r_0^2 \Omega \tag{(b) 1p}$$

eliminamos T

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= \frac{mr_0^4\Omega^2}{2r^3} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}mg \cos \alpha - \frac{1}{2}mg = \\ &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2}mgr \cos \alpha + \frac{1}{2}mgr + \frac{mr_0^4\Omega^2}{4r^2} \sin^2 \alpha \right) \end{aligned}$$

$$U^{ef} = \frac{1}{2}mgr \cos \alpha + \frac{1}{2}mgr + \frac{mr_0^4\Omega^2}{4r^2} \sin^2 \alpha \quad ((c) \text{ 1p})$$

$$\frac{d}{dr}U^{ef} = \frac{1}{2}mg \cos \alpha + \frac{1}{2}mg - \frac{mr_0^4\Omega^2}{2r^3} \sin^2 \alpha$$

$$\frac{d^2}{dr^2}U^{ef} = \frac{3r_0^4\Omega^2}{2r^4} \sin^2 \alpha > 0 \quad \text{criterio de estabilidad} \quad ((d) \text{ 1p})$$

$\frac{d}{dr}U^{ef} = 0$ determina el radio R

$$g \cos \alpha + g = \frac{r_0^4\Omega^2}{R^3} \sin^2 \alpha$$

$$R = \frac{1}{g} \sqrt[3]{(r_0^2\Omega)^2 (1 - \cos \alpha) g^2} = r_0$$

$$r_0 = \frac{g}{\Omega^2 (1 - \cos \alpha)} \quad ((e) \text{ 1p})$$

Problema (2)

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \sin \theta + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (1)$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \quad (2)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta,$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta.$$

Con $r = L$

$$\vec{v} = L\dot{\phi}\hat{\phi} \sin \theta + L\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (3)$$

$$v = \sqrt{L^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + L^2 \dot{\theta}^2} \quad (4)$$

$$ma_r = m(-L\dot{\theta}^2 - L\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = mg \cos \theta - T$$

$$ma_\theta = m(L\ddot{\theta} - L\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) = -mg \sin \theta$$

$$ma_\phi = m(2L\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + L\ddot{\phi} \sin \theta) = 0$$

$$E = \frac{1}{2}m(L^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + L^2 \dot{\theta}^2) - mgL \cos \theta$$

la tercera integrada es

$$mL \sin^2 \theta \dot{\phi} = mL \sin^2 \theta_0 \Omega$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(L^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + L^2 \dot{\theta}^2) - mgL \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2 \frac{\sin^4 \theta_0 \Omega^2}{\sin^2 \theta} - mgL \cos \theta \\ U &= \frac{1}{2}mL^2 \frac{\sin^4 \theta_0 \Omega^2}{\sin^2 \theta} - mgL \cos \theta \\ U' &= -mL^2 \frac{\sin^4 \theta_0 \Omega^2}{\sin^3 \theta} \cos \theta + mgL \sin \theta \\ U'' &= mL^2 \frac{\sin^4 \theta_0 \Omega^2}{\sin^3 \theta} \sin \theta + mL^2 \frac{3 \sin^4 \theta_0 \Omega^2}{\sin^4 \theta} \cos^2 \theta + mgL \cos \theta \end{aligned}$$

se anula en $\theta = \theta_0$ si

$$\begin{aligned} -L \frac{\sin^4 \theta_0 \Omega^2}{\sin^3 \theta_0} \cos \theta_0 + g \sin \theta_0 &= 0 \\ \cos \theta_0 &= \frac{g}{L\Omega^2} \end{aligned}$$

$$U''(\theta_0) = mL^2 \sin^2 \theta_0 \Omega^2 + mL^2 3\Omega^2 \cos^2 \theta_0 + mgL \cos \theta > 0$$

$$\frac{1}{2}mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2 \frac{\sin^4 \theta_0 \Omega^2}{\sin^2 \theta} - mgL \cos \theta = \frac{1}{2}mL^2 \sin^2 \theta_0 \Omega^2 - mgL \cos \theta_0$$

$\dot{\theta} = 0$ implica

$$\frac{1}{2}mL^2 \sin^2 \theta_0 \Omega^2 \frac{(\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_0)}{\sin^2 \theta} = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

una solución es

$$\theta_1 = \theta_0$$

la otra satisface

$$\frac{1}{2}L\Omega^2 \sin^2 \theta_0 (\cos \theta + \cos \theta_0) = g \sin^2 \theta$$

son iguales si

$$(\cos \theta_0) = \frac{g}{L\Omega^2}$$

Problema (3)

En el plano del movimiento

$$\begin{aligned} ma_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -kr^3 \\ ma_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \\ E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{4}kr^4 \end{aligned} \quad ((a))$$

la segunda da

$$mr^2\dot{\theta} = mr_0v_0$$

la ecuación radial es

$$m(\ddot{r} - r\frac{r_0^2v_0^2}{r^4}) = -kr^3$$

o bien

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= m\frac{r_0^2v_0^2}{r^3} - kr^3 \\ &= -\frac{d}{dr}\left(m\frac{r_0^2v_0^2}{2r^2} - \frac{1}{4}kr^4\right) \\ U &= m\frac{r_0^2v_0^2}{2r^2} - \frac{1}{4}kr^4 \\ U' &= -m\frac{r_0^2v_0^2}{r^3} + kr^3 = 0 \\ U'' &= m\frac{3r_0^2v_0^2}{r^4} + 3kr^2 > 0 \end{aligned}$$

Orbita circular es estable

$$-m\frac{r_0^2v_0^2}{r_0^3} + kr_0^3 = 0 \Rightarrow v_0^2 = \frac{kr_0^4}{m} \quad ((b))$$

Para oscilaciones pequeñas $r = r_0 + \epsilon$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}U''(r_0)\epsilon^2 \\ m\ddot{\epsilon} &= -U''(r_0)\epsilon \\ &= -6kr_0^2\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{6kr_0^2}{m}} \\ T_r &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{6kr_0^2}} \end{aligned}$$

¿Es cerrada? debemos averiguar el periodo de la coordenada θ , T_θ

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= r_0v_0 \Rightarrow r_0^2\dot{\theta} \simeq r_0v_0 \\ \dot{\theta} &= \frac{2\pi}{T_\theta} = \frac{v_0}{r_0} \\ T_\theta &= 2\pi\frac{r_0}{v_0} = 2\pi\frac{r_0}{\sqrt{\frac{kr_0^4}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{kr_0^2}} \end{aligned}$$

Razón irracional $\frac{T_\theta}{T_r} = \sqrt{6}$ no se cierra