Pauta P3 C3 FI2001 Mecánica

Profesor: Luis Rodriguez

Aux: Francisco Sepúlveda & Kim Hauser

Solución:

Sea $S \sim (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ un S.R.I. ubicado en el centro del anillo de radio R y $S' \sim (\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$ un S.R. no Inercial ubicado en el centro del anillo, pero que gira solidario a este. Luego, se tiene que $\vec{R} = 0$ y $\vec{\Omega} = \omega_0 \hat{k}$. Calculemos las fuerzas reales que actuan sobre la partícula

$$V(\rho) = \frac{1}{2} k \rho^2 \Rightarrow \nabla V = k \rho \hat{j}'$$

pero por descomposicion vectorial se obtiene que

$$\hat{j}' = \sin\theta \hat{\rho} + \cos\theta \hat{\theta}$$

por lo que la fuerza que actua debido al potencial es (sabiendo que $\rho = R\sin\theta$)

$$\vec{F}_V = -\nabla V = -kR\sin^2\theta\hat{\rho} - kR\sin\theta\cos\theta\hat{\theta}$$

Por lo que se tiene que la suma de las fuerzas reales son

$$\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_o + \vec{N} = -kR\sin^2\theta\hat{\rho} - kR\sin\theta\cos\theta\hat{\theta} + F_o\hat{\theta} + \vec{N}(\hat{\rho}, \hat{z})$$

$$\boxed{\vec{F} = -kR\sin^2\theta\hat{\rho} - kR\sin\theta\cos\theta\hat{\theta} + F_0\hat{\theta} + \vec{N}(\hat{\rho}, \hat{z})}$$

donde $\vec{N}(\hat{\rho}, \hat{z})$ da cuenta de que la normal a la superficie apunta en $\hat{\rho}$ y en $\hat{z}$. Veamos ahora las fuerzas de caracter no inercial. Primero:

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}' = \omega_0 R(\hat{k} \times \hat{\rho})$$

pero $\hat{k} = \cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\hat{\theta}$, por lo que se tiene

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}' = \omega_0 R \sin\theta \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}' = \omega_0^2 R\sin\theta(\hat{k} \times \hat{z}) = \omega_0^2 R\sin\theta(-\cos\theta\hat{\theta} - \sin\theta\hat{\rho})$$

$$\boxed{\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}' = -\omega_0^2 R\sin\theta(\cos\theta\hat{\theta} + \sin\theta\hat{\rho})}$$

Coriolis:

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}' = \omega_0 R\dot{\theta}(\hat{k} \times \hat{\theta}) = \omega_0 R\dot{\theta}\cos\theta\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{\Omega} \times \vec{v}' = \omega_0 R\dot{\theta}\cos\theta\hat{z}}$$

Transversal:

$$\boxed{\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' = 0}$$

de Traslación del Sistema:

$$\boxed{\ddot{\vec{R}} = 0}$$

Finalmente, si consideramos la 2da ley de Newton para sistemas no inerciales en la componente $\hat{\theta}$ (y considerando que para esta parte $F_o = 0$) se tiene:

$$mR\ddot{\theta} = -kR\sin\theta\cos\theta + m\omega_0^2 R\sin\theta\cos\theta$$

por lo que ecuación de movimiento es

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{k}{m}\sin\theta\cos\theta + \omega_0^2\sin\theta\cos\theta}$$

Si queremos que $\theta = 0$ sea punto de equilibrio estable, entonces debemos encontrar pequeñas oscilaciones en torno a dicho punto. Linealizando cada término no lineal de la ecuación de movimiento en torno a $\theta = 0$

$$\ddot{\theta} = -\frac{k}{m}\theta + \omega_0^2\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + (\frac{k}{m} - \omega_0^2)\theta = 0}$$

y esta ecuación es la del oscilador armónico si la constante que acompaña al término lineal (la frecuencia angular al cuadrado del sistema) es positiva, por lo que la condición de equilibrio estable es

$$\frac{k}{m} - \omega_0^2 > 0$$

$$\boxed{\frac{k}{m} > \omega_0^2}$$

El periodo de pequeñas oscilaciones es

$$T_{o.p.} = \frac{2\pi}{\omega_{o.p.}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \omega_0^2}}$$

$$\boxed{T_{o.p.} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \omega_0^2}}}$$

b) Para que la partícula continue moviendose a una velocidad constante, se debe cumplir que $\ddot{\theta} = 0$. Reemplazando esto en la ecuación de movimiento para θ (Ahora incluimos F_o):

$$mR\ddot{\theta} = 0 = F_o - kR\sin\theta\cos\theta + m\omega_0^2 R\sin\theta\cos\theta$$

$$\boxed{F_o = R(k - m\omega_0^2)\sin\theta\cos\theta}$$