1 Problema 1 [2 pt]

Lo primero que hay que notar en esta pregunta es que la fuente de tensión continua no tiene ninguna influencia en los resultados. El circuito que se debe reducir se presenta en la siguiente figura.

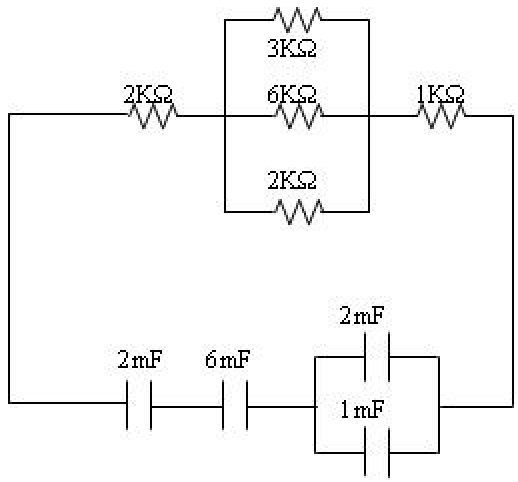

Figura 1: Circuito P1

• [0.7 ptos] La resistencia equivalente se calcula a través de la siguiente expresión,

$$R_{eq} = \overbrace{\left(2 + \underbrace{\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right]^{-1}}_{Eq.Paralelo} + 1 \right)}^{Eq.Serie} [k\Omega] = 4[k\Omega]$$

• [0.7 ptos] La capacidad equivalente se calcula a través de la siguiente expresión,

$$C_{eq} = \overbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{\underbrace{[2+1]}_{Eq.Paralelo}} \right)^{-1}}^{Eq.Serie} [mF] = 1[mF]$$

• [0.6 ptos] La constante de tiempo del circuito (τ) corresponde al producto de la capacidad por la resistencia del circuito, luego

$$\tau = R \cdot C = R_{eq} \cdot C_{eq} = 4[\cancel{k}\Omega] \cdot 1[\cancel{m}F] = 4[s]$$

2 Problema 2 [4 pt]

2.1 Parte a) [1 pt]

Dado el circuito (A) presentado a continuación se debe obtener la ecuación diferencial para la carga.

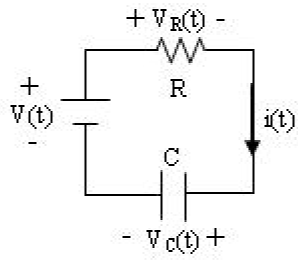

Figura 2: Circuito (A)

Para ello se deben plantear las ecuaciones conocidas (respetando las referencias para los voltajes y la corriente) [0.1 pt por ec.]:

- (1) Ley de Voltajes de Kirchhoff $\rightarrow$ $V(t) = V_C(t) + V_R(t)$
- (2) Ley de Ohm $\rightarrow$ $V_R(t) = R \cdot i(t)$
- (3) Carga y Corriente $\rightarrow$ $i(t) = \frac{dQ_C(t)}{dt}$
- (4) Carga en el Condensador $\rightarrow$ $Q_C(t) = C \cdot V_C(t)$

Reemplazando (2) y (4) en (1) se obtiene [0.4 pt por operatoria y resultado final correcto],

(5) $\rightarrow$ $V(t) = \frac{Q_C(t)}{C} + R \cdot i(t)$

y por último reemplazando (3) en (5),

(6) $\rightarrow$ $V(t) = \frac{Q_C(t)}{C} + R \cdot \frac{dQ_C(t)}{dt}$

Dado que en el enunciado se indica que el condensador se encuentra descargado en $t = 0$, se tiene que la condición inicial [0.2 pt] queda

(7) $\rightarrow$ $Q_C(0) = 0$

2.2 Parte b) [1.5 pt]

[1 pt resolución correcta de la edo] Considerando que $V(t) = V = cte$ $\forall t > 0$ se resuelve la ecuación diferencial a través de la siguiente función para $Q(t)$

$$Q(t) = Q_{particular} + Q_{homogénea}$$

Donde la solución particular Q_p queda dada por

$$Q_p = C \cdot V$$

reemplazando en (6) se observa que esta solución satisface la edo,

$$V(t) = V = \frac{\cancel{C} \cdot V}{\cancel{C}} + \cancel{R \cdot \frac{d(C \cdot V)}{dt}}$$

En el caso de la solución homogénea se desea encontrar la solución $Q_h(t)$ para la siguiente edo

$$\frac{dQ_C(t)}{dt} + \frac{Q_C(t)}{R \cdot C} = 0$$

La solución general de esta ecuación queda dada por

$$Q_h(t) = Ae^{\alpha \cdot t}$$

Reemplazando la solución se encuentra la siguiente condicion sobre α

$$\alpha = -\frac{1}{R \cdot C}$$

Hasta ahora se tiene la siguiente solución,

$$Q(t) = C \cdot V + Ae^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Finalmente aplicando la condición inicial de la parte a) se obtiene el valor de la constante A,

$$Q(0) = C \cdot V + A = 0 \Rightarrow A = -C \cdot V$$

El resultado final de la edo para la carga en el condensador queda

$$(8) \rightarrow \; Q(t) = CV \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$$

Alternativamente, si alguien previamente conocía la ecuación de carga del condensador, podía proponerla y demostrar que era solución de la edo, obteniendo con ello todo el puntaje de esta parte. Además, hay otros métodos de resolución de la ecuación que también fueron considerados como correctos (por ej. a través del método del factor integrante).

Se desea encontrar la curva para la diferencia de potencial sobre el condensador, la cual se obtiene de reemplazar (8) en (4), junto a reemplazar los valores para $R = 2[k\Omega]$, $C = 2[mF]$ y $V = 10[V]$, luego

$$(9) \rightarrow \; V_C(t) = V \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}) = 10 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{4}}) \; [Volts]$$

A partir de esta, considerando la ecuación (1) y reemplazando el valor para el voltaje de la fuente, se obtiene la siguiente expresión para la tensión sobre la resistencia,

$$(10) \rightarrow \; V_R(t) = 10 \cdot e^{-\frac{t}{4}} \; [Volts]$$

[0.5 pt por dibujos, valores y justificación] El resultado gráfico queda representado en la siguiente figura

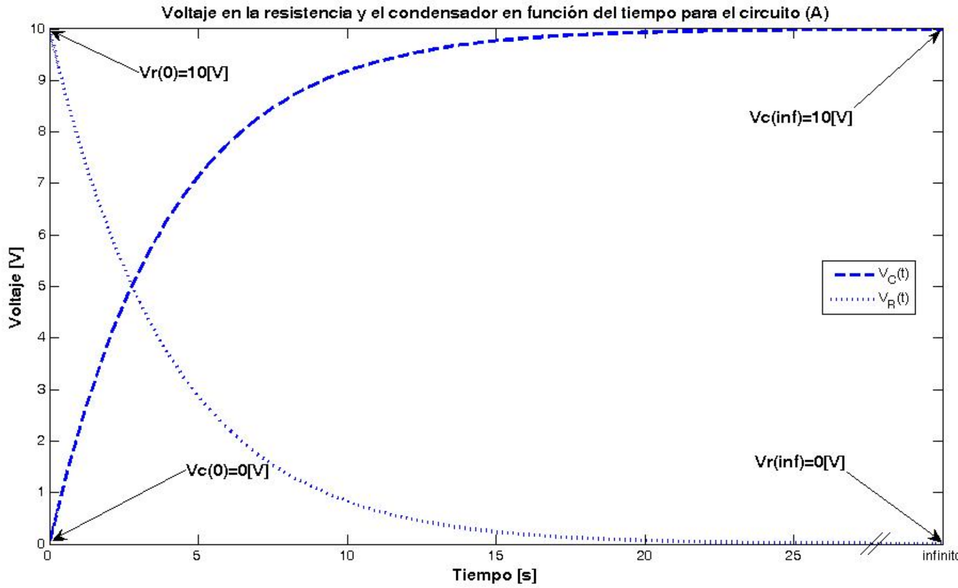

Figura 3: Gráfico de las tensiones en el circuito (A)

2.3 Parte c) [0.5 pt]

El voltaje en el condensador y la resistencia en $t = 2$ se encuentran reemplazando el tiempo en las ecuaciones (9) y (10) respectivamente, luego

$V_C(2) = 10 \cdot (1 - e^{-\frac{2}{4}}) = 3.9347[V]$

$V_R(2) = 10 \cdot e^{-\frac{2}{4}} = 6.0653[V]$

2.4 Parte d) [1 pt]

En esta parte se podía repetir el procedimiento de resolución para la edo asociada al circuito de descarga (ecuación homogénea) para el cálculo de la ecuación que describe la descarga del condensador y así encontrar que esta está regida por la siguiente expresión,

$$Q_C(t) = CV \cdot e^{-t/RC}$$

Esto no era estrictamente necesario dado que la deducción de esta expresión fue revisada en detalle en la guia teórica del laboratorio Nº2 y se podía asumir para responder a la pregunta planteada. Reemplazando los valores conocidos,

$$Q_C(2) = 2 \times 10^{-3} \cdot 10 \cdot e^{-2/4} = 0.012131[Coulomb]$$

Comentarios:
- En general bajé 0.2 por resultados numéricos finales incorrectos.
- Bajé 0.2 por no poner unidades.

Sebastián Püschel L.
Mail: s_puschel@hotmail.com