Condensadores y Capacidad

Debido a presencia de las cargas, el potencial eléctrico posee valores diferentes en cada de ellas.

Si se toma, por ejemplo, el valor del potencial eléctrico de la placa cargada negativamente como cero, el valor del potencial (V) en la placa positiva será la diferencia de potencial eléctrico entre ellas.

$$|q| = CV$$

q y V son proporcionales

C = capacidad, depende de la geometría del condensador y del material aislador entre las placas. Cuanto mas C sea grande, mayor la capacidad para mantener carga q para una diferencia dada de potencial eléctrico V.

El sistema se llama condensador

Condensadores y Capacidad

$$|q| = CV$$

La carga sobre uno cualquiera de los electrodos del condensador esta dada por el producto de su capacidad y la diferencia de potencial eléctrico entre los electrodos.

$$C = \frac{|q|}{V}$$

La capacidad del condensador se define como la carga sobre cualquiera de los electrodos dividida por la diferencia de potencial eléctrico entre ellas.

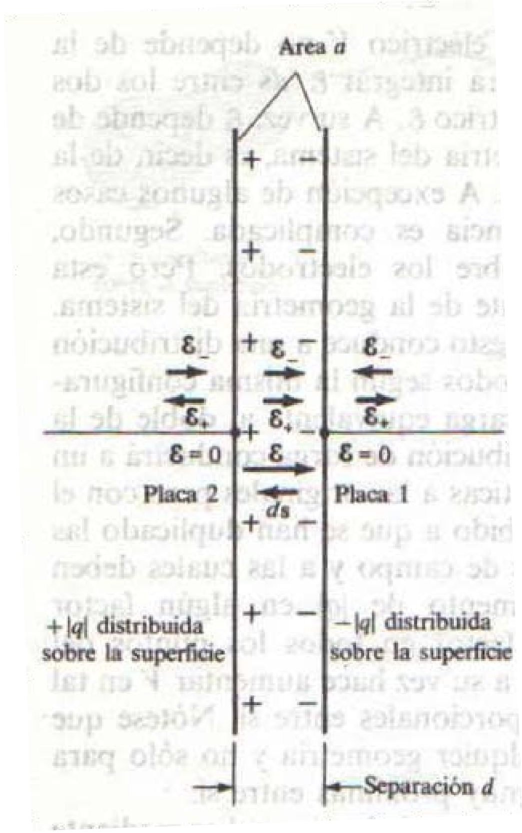
Unidades:

Faradio (F) =1F= 1C/V

1μF = 10^{-6}F

1pF = 10^{-12}F

Condensadores y Capacidad



Evaluaremos separadamente los campos eléctricos debido a las cargas sobre cada placa y sumándolos.

-En cada placa las son repelidas por las cargas de mismo signo, distribuyéndose uniformemente.

-Aproximación de la lamina infinita

-La placa cargada positivamente produce un campo eléctrico uniforme E_+ dirigido en todas las partes en forma perpendicular, saliendo de la placa.

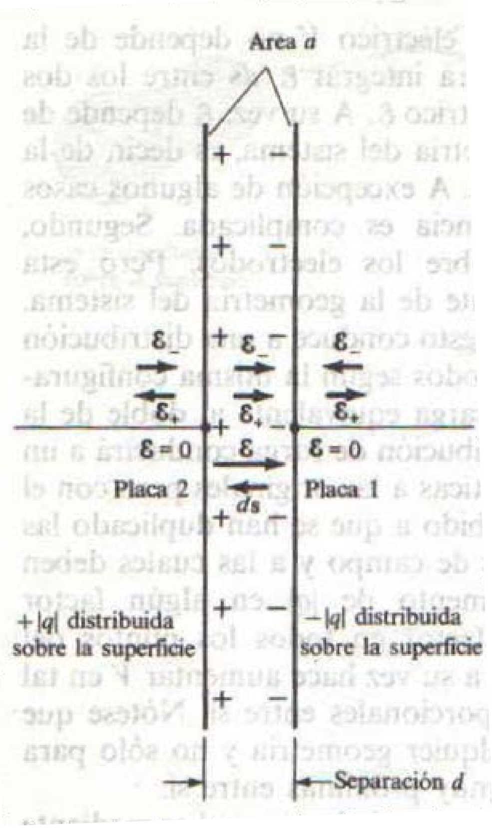
Módulo:

$$E_+ = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_o} \qquad E_- = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_o}$$

Donde: |σ| es el valor absoluto de la carga por unidad de área sobre cualquiera de las placas.

$$\sigma = \frac{|q|}{a}$$

Condensadores y Capacidad



Campo Eléctrico total producido por las cargas en las placas es:

$$E = E_{+} + E_{-}$$

En las regiones externas a las placas los campos están siempre orientados opuestamente.

En la región entre las placas E_+ posee la misma dirección que E_-, por consiguiente:

$$E = E_{+} + E_{-} = 2E_{+}$$

Así:

$$E_{+} = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_o} \rightarrow \quad E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_o}$$

La orientación de E es de la placa cargada positivamente a la placa cargada negativamente, ya que tal seria la fuerza.

Condensadores y Capacidad

La simplicidad del campo eléctrico entre las placas del condensador de placas plano paralelas hace fácil el calculo de la diferencia de potencial eléctrica V entre ellas.

$$V = \int_1^2 dV - \int_1^2 \mathbf{E.ds}$$

Camino rectilíneo de integración desde algún punto de la placa 1 cargada negativamente a un punto de la placa 2, cargada positivamente.

E y ds son antiparalelos, así:

$$\mathbf{E.ds} = -Eds$$

E posee valor constante dado por:

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_o}$$

Entonces:

$$V = \int_1^2 Eds = E\int_1^2 ds$$

Condensadores y Capacidad

$$V = \int_1^2 E ds = E \int_1^2 ds$$

La integral de ds es igual a d, la longitud del camino de integración, Por lo tanto:

$$V = Ed$$

Reemplazando

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_o} \qquad \sigma = \frac{|q|}{a}$$

En: $V = Ed$

Tenemos:

$$V = \frac{|q|d}{\varepsilon_o a}$$

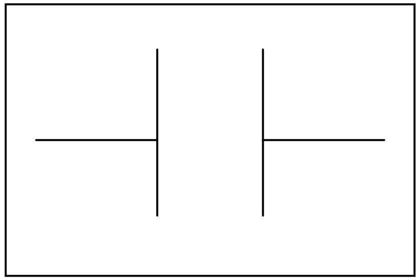
Donde d es la separación entre las placas.

Condensadores y Capacidad

La capacidad C del condensador de placas plano paralelas:

$$C = \frac{|q|}{V}$$ Donde: $$V = \frac{|q|d}{\varepsilon_o a}$$ Así: $$C = \frac{|q|}{|q|d/\varepsilon_o a} = \varepsilon_o \frac{a}{d}$$

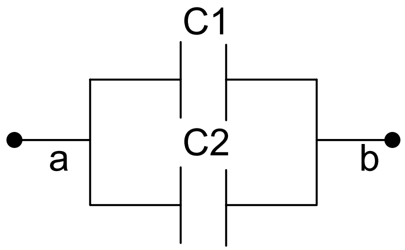
Si despreciamos los efectos de los bordes, *la capacidad de un condensador plano paralelo es proporcional al área a de las placas e inversamente proporcional a su separación d*.



Símbolo del condensador

Asociación de Condensadores

Condensadores en paralelo:



La diferencia de potencial eléctrico (V) es la misma entre las placas de los dos condensadores conectados en paralelo. Esto se debe a que el alambre que conecta las placas a la izquierda las convierte en una misma superficie conductora y en consecuencia las obliga a poseer el mismo potencial eléctrico.

Lo mismo pasa para las placas de la derecha.

Valor de la carga sobre las placas es $|q|_1 = C_1 V \quad |q|_2 = C_2 V$

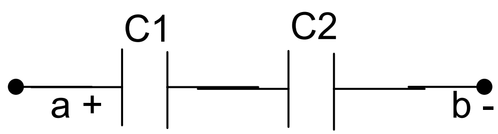
Valor de la carga total sobre las placas es

$$|q| = |q|_1 + |q|_2 = C_1 V + C_2 V \quad \text{o} \quad |q| = (C_1 + C_2)V$$

$$C_{equ} = C_1 + C_2$$

Asociación de Condensadores

Condensadores en serie:



Los electrones deberán fluir de un terminal de la batería al otro, de manera que una carga +|q| se localice en la placa izquierda de C_1 y una carga -|q| sobre la placa derecha d e C_2.

Estas cargas son responsables de que exista un campo eléctrico a lo largo del alambre que une las otras placas. El campo eléctrico hace que fluyan electrones del alambre hasta que la placa derecha de C1 tenga la carga -|q| y la placa izquierda de C2, la carga +|q|.

Cuando se logra esta situación de equilibrio, ya no existe en el alambre campo eléctrico que haga fluir a los electrones. Esto se puede ver si tenemos en cuenta cuando la placa de la derecha de C_1 posee la carga -|q|, el campo a lo largo del alambre y debido a la carga, anulará exactamente el campo eléctrico debido a carga +|q| que se encuentra sobre la placa izquierda de C_1. Lo mismo pasa en C_2. En consecuencia, las cargas sobre las dos placas son del mismo valor de |q|. Así, la diferencia de potencial en los dos condensadores son:

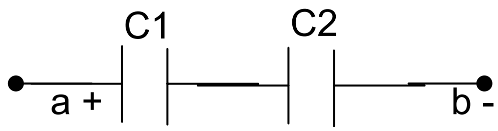
$$V_1 = \frac{|q|}{C_1} \qquad V_2 = \frac{|q|}{C_2}$$

Así:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{|q|}{C_1} + \frac{|q|}{C_2}$$

Asociación de Condensadores

Condensadores en serie:



$$V = V_1 + V_2 = \frac{|q|}{C_1} + \frac{|q|}{C_2} \quad \text{o} \quad V = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) |q|$$

Así:

$$\frac{1}{C_{equ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Asociación de Condensadores y Resistencia

	Serie	Paralelo
Resistencia	$R_{equ} = R_1 + R_2$	$\frac{1}{R_{equ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
Capacidad	$\frac{1}{C_{equ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$	$C_{equ} = C_1 + C_2$

Energía en Condensadores

Comparación resorte con condensador

Consideremos un condensador parcialmente cargado. Para añadir mas electrones al electrodo que ya posee exceso de ellos se debe vencer la repulsión debida a cargas iguales. También debe quitar electrones al electrodo que ya tiene deficiencia de ellos y que, por tanto, posee una carga neta positiva. Esta operación debe vencer a la atracción debida a cargas diferentes. Por consiguiente, debe aplicarse a las cargas una fuerza cada vez mayor para continuar el proceso de cargas de los electrodos.

De la misma manera que trabaja la fuerza necesaria para cambiar la longitud de un resorte a partir de su estado no deformado, trabaja también la fuerza necesaria para variar la carga de los electrodos del condensador a partir de su estado descargado. En los dos casos el trabajo aparece como una energía potencial almacenada en el sistema.

Energía en Condensadores

Comparación resorte con condensador

Si una carga se mueve a través de la diferencia de potencial eléctrica V, existirá una diferencia U entre los valores de energía potencial antes y después de tal proceso.

$$U = V|q|$$

Consideremos que la transferencia de carga es infinitesimal de forma que no cambie la diferencia de potencial y la magnitud de la carga sobre el condensador. Así, la transferencia de energía potencial también es infinitesimal. Su valor es: $dU = Vd|q|$

Sabiendo que $|q| = CV$ C es una constante. $d|q| = CdV$

$$dU = VCdV$$

El cambio total de energía potencial cuando el condensador se lleva a un estado final de carga con V=Vf, a partir de su estado inicial, el cual esta descargado y V=0.

Energía en Condensadores

Comparación resorte con condensador

$$dU = VCdV$$

Durante tal proceso, la energía potencial cambia desde U=0 en el estado inicial hasta $U=U_f$, de manera que:

$$\int_0^{U_f} dU = \int_0^{V_f} VCdV$$

C es una constante.

Calculando las integrales

$$U = \frac{CV_f^2}{2}$$

O solo

$$U = \frac{CV^2}{2}$$

La cantidad U es la energía potencial almacenada en un condensador de capacidad C cuando se carga de tal manera que la diferencial de potencial eléctrico entre sus electrodos es V. Utilizando $|q| = CV$ se puede rescribir como:

$$U = \frac{q^2}{2C}$$

Energía en Condensadores

Comparación resorte con condensador

Analogía con la deformación de un resorte:

$$U = \frac{q^2}{2C} \qquad\qquad U = \frac{kx^2}{2}$$

Donde:
K es la constante de ley de Hooke que especifica el resorte.
q es análoga a x
1/C es análoga a k.

Energía en Condensadores

Si puede relacionar la intensidad del campo eléctrico en determinado **elemento de volumen** y la **energía contenida en tal elemento** considerando un condensador plano paralelo ideal (despresando los efectos de bordes).
El valor E entre las placas es:

$$E = \frac{V}{d}$$

Densidad de energía del campo eléctrico ρ_e (energía por unidad de volumen).
Como esta íntimamente relacionada con el campo eléctrico, debe ser constante en cualquier punto de la región entre las placas (E const.) y cero en cualquier otro punto.
Volumen de la regiones *ad, donde a es el área de una de las placas.*

$$\rho_e = \frac{U}{ad} = \frac{CV^2}{2ad}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} \qquad U = \frac{CV^2}{2}$$

Energía en Condensadores

Como: $V = Ed$

$$\rho_e = \frac{U}{ad} = \frac{CV^2}{2ad}$$ es $$\rho_e = \frac{CE^2 d}{2a}$$

En el condensador plano paralelo ideal:

$$C = \frac{\varepsilon_o a}{d}$$

Obtenemos:

$$\rho_e = \frac{\varepsilon_o E^2}{2}$$

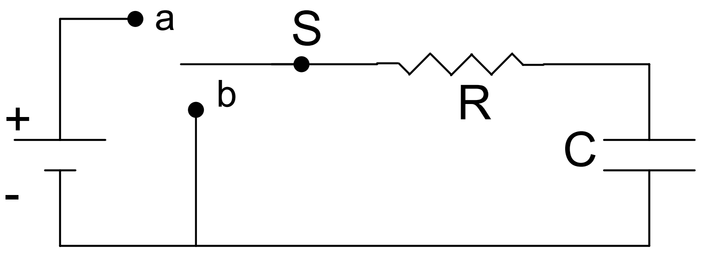
Circuito RC

Fem ε: es la antigua denominación de fuerza electromotriz. Es el trabajo por unidad de carga (J/C o V). Ej. Bateria, generador eléctrico, termopilas, celdas solares, etc.

Empezaremos una discusión de corrientes variables en el tiempo.

Cargando un condensador

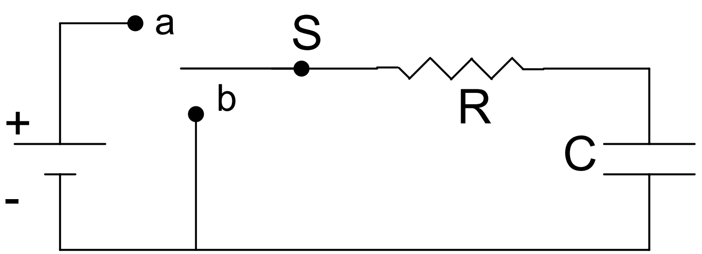
Empezaremos una discusión de corrientes variables en el tiempo.



Considerando el condensador inicialmente descargado.
Girando la llave S para hacer contacto en a, inserimos una batería ideal (fem) en uno circuito RC.

Circuito RC

Cargando un condensador



Aplicando la regla de mallas, recorriéndole en el sentido horario a partir de la batería, tenemos:

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0$$

q/C es el potencial del condensador, donde la placa superior del condensador esta en un potencial mas alto.

Tanto q como i irán variar con el tiempo.

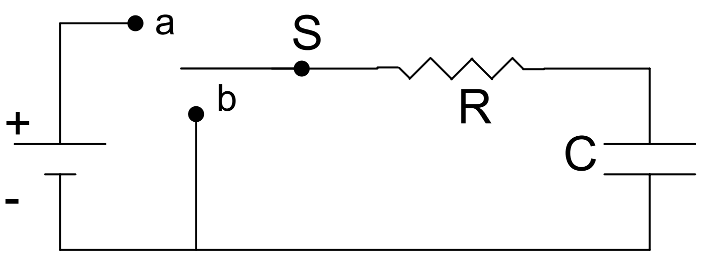
$$iR + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

No podemos resolver la ecuación pues contiene dos variables, I y q.
No son variables independientes, pero son relacionadas por:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Circuito RC

Cargando un condensador



Sustituyendo $i = \dfrac{dq}{dt}$ en $iR + \dfrac{q}{C} = \varepsilon$

Tenemos la ecuación de carga

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

Condiciones iniciales de la ecuación diferencial es que el condensador esté inicialmente descargado, t=0, q=0.

Circuito RC

Cargando un condensador

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$ Condensador cargando

Note que cumple con la condición t=0 q=0. La derivada de q(t) es:

$$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right) e^{-t/RC}$$

Podemos medir q(t) experimentalmente midiendo $V_{c.}$

$$V_c = \frac{q}{C} = \varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$

Análogamente, podemos medir i(t) midiendo $V_{R.}$

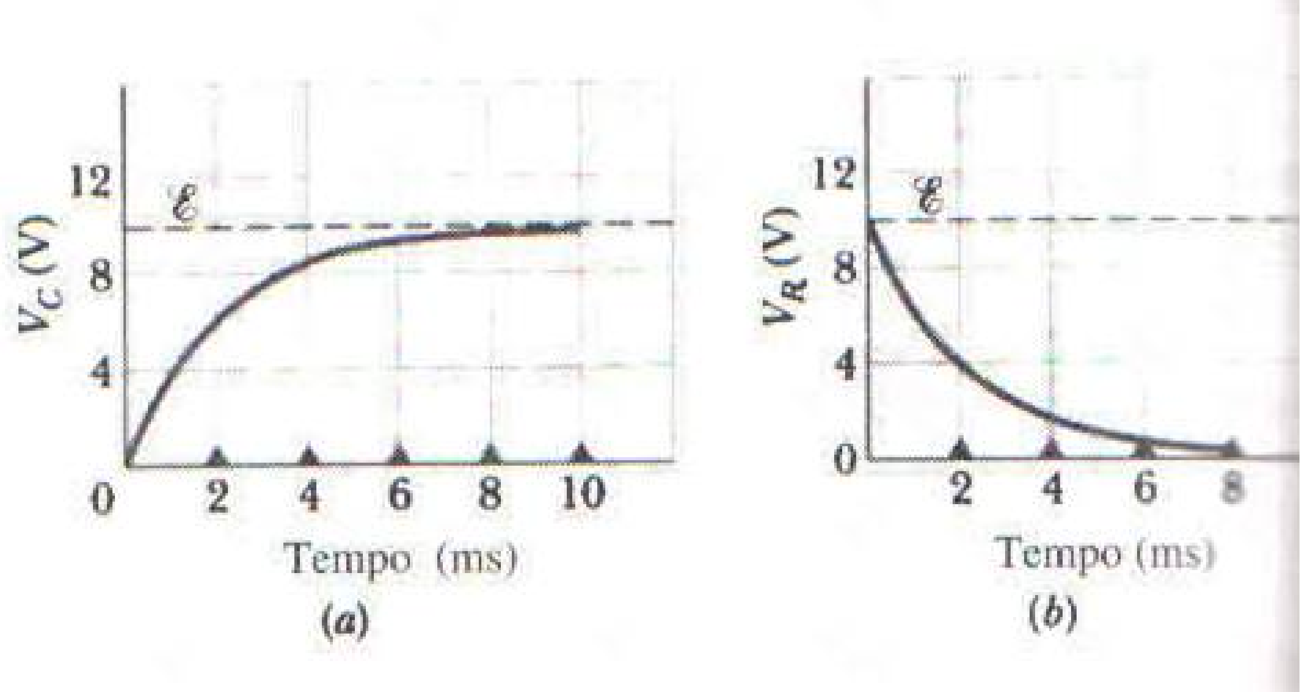
$$V_R = iR = \varepsilon e^{-t/RC}$$

Como se deberá ser la
respuesta de VR y VC?

Circuito RC

Cargando un condensador

$$V_c = \frac{q}{C} = \varepsilon(1 - e^{-t/RC}) \qquad V_R = iR = \varepsilon e^{-t/RC}$$



Circuito RC

Constante del tiempo

$$q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$

El producto RC tiene dimensión de tiempo pues el exponente es adimensional. RC es la constante del tiempo del condensador.

$$RC = \tau$$

Corresponde al tiempo necesario para que la carga del condensador sea una fracción ($1\text{-}e^{-1}$) o aproximadamente 63% de su valor final.

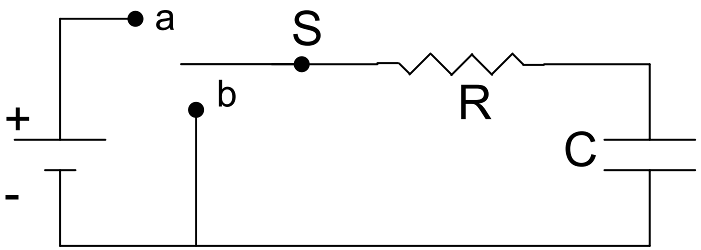
Haciendo t=RC:

$$q = C\varepsilon(1 - e^{-1}) = 0{,}63\% C\varepsilon$$

En t=∞ la carga Cε esta en equilibrio.

Circuito RC

Descargando un condensador



Supongamos que el condensador esta completamente cargado bajo la acción diferencia de potencial de la fem.

Ahora, en t=0 la llave sale de a para b. El condensador va a descargar a través de la resistencia.

$$iR + \frac{q}{C} = 0$$

Solución de la ecuación diferencial:

$$q = q_0 e^{-t/RC}$$

Donde q_0=Cε em ese caso, la carga inicial del condensador.

La corriente es obtenida derivándose la ecuación arriba:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = i_0 e^{-t/RC}$$

Circuito RC

Descargando un condensador

$\varepsilon/R = q_0/RC$ es la intensidad de corriente inicial i_0, correspondente a t=0. Este es un resultado razonable pues la diferencia de potencial a través del condensador plenamente cargado es ε. La señal negativa muestra que la corriente de descarga tiene el sentido opuesto al de la corriente de carga, como se era de esperar.

La constante del tiempo del condensador RC gobierna el proceso de descarga así como el proceso de carga. En el instante t=RC la carga del condensador es reducida a $C\varepsilon e^{-1}$, equivalente a 37% de su carga inicial.