Unidad 3 - Corriente Alterna

Conceptos:

1. Asociación de inductores
2. Circuito RL
3. Corriente Alterna
4. Aparatos

Asociación de inductores

$$L = \frac{N\Phi}{i}$$

Donde N es el numero de espirales (vueltas)

El producto $N\Phi$ es denominado *flujo concatenado*

En SI flujo magnético es tesla-metro^2

La unidad de la inductancia es tesla-metro^2 por ampere (T.m^2/A).
Esta unidad es denominada henry (H) en homenaje a Joseph Henry, coautor de la ley de inducción.

Asociación de inductores

Para cualquier inductor:

$$L = \frac{N\Phi}{i} \quad \Rightarrow \quad N\Phi = Li$$

La ley de Faraday nos dice:

$$\varepsilon_L = -\frac{dN\Phi}{dt}$$

Combinando las dos ecuaciones podemos escribir, para la fem auto-inducida:

$$\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt}$$ fem auto-inducida

Asociación de inductores

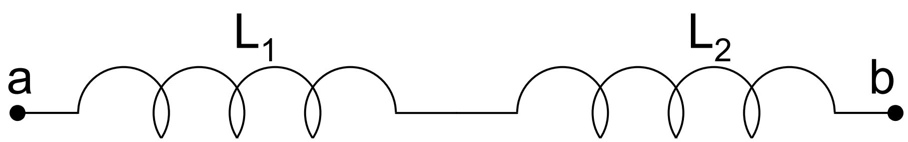
Si un circuito contiene dos inductores en serie, la inducción total del circuito es la suma de las dos inducciones L1 y L2, siempre cuando los dos inductores estén lo suficientemente lejos como para poder despreciar su inducción mutua.

Comprobación: La magnitud di/dt es la misma para los dos inductores. Por lo tanto, la fuerza electromotriz inducida V en el sistema completo entre a y b se puede describir:

$$V = -L_1 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} = -(L_1 + L_2)\frac{di}{dt}$$

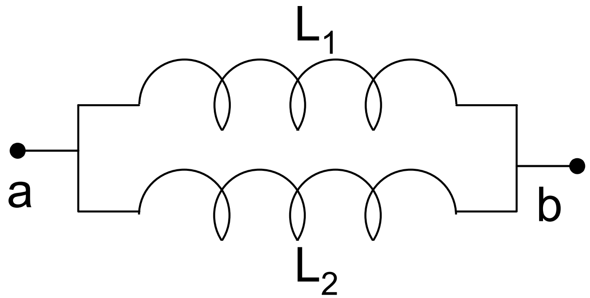
El valor V es precisamente el mismo si las dos autoinducciones se reemplazan por una única cuya autoinducción sea

$$L = L_1 + L_2$$



Asociación de inductores

Considerando dos inductores conectados en paralelo, físicamente bien separados. Una corriente variable i fluye entre a y b. Puesto que la caída de voltaje entre los puntos a y b (es decir, la lectura de un voltímetro conectado entre estos puntos) debe ser la misma a través de cualquier trayectoria, las fuerzas contraelectromotrices inducidas en los dos inductores también deben ser mas mismas.

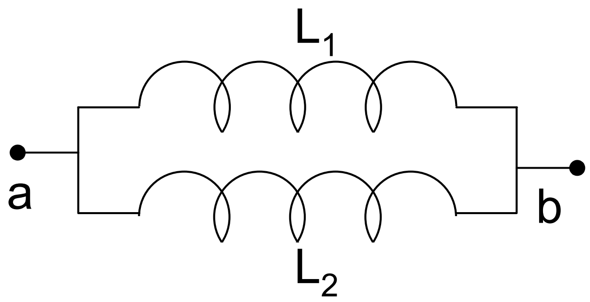


$$-V = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$-\frac{V}{L_1} = \frac{di_1}{dt}$$

$$-\frac{V}{L_2} = \frac{di_2}{dt}$$

Asociación de inductores



Sumando con

$$-\frac{V}{L_1} = \frac{di_1}{dt}$$

$$-\frac{V}{L_2} = \frac{di_2}{dt}$$

Tenemos:

$$\frac{di}{dt} = -V\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)$$

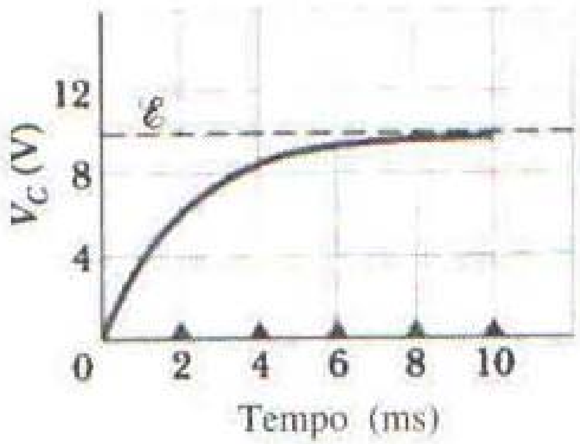
Si se sustituye los inductores L1 y L2 conectadas en paralelo por una única L, la relación V y di/dt seria la misma si se satisface que:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Circuitos RC

En condensadores, cuando una fem es súbitamente aplicada a un circuito de malla única RC, la carga en el condensador no tenderá inmediatamente el valor de equilibrio Cε pero, si, se aproximará exponencialmente a ese valor.

$$q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$



La carga crece a una tasa determinada por la constante de tiempo τ_C = RC.

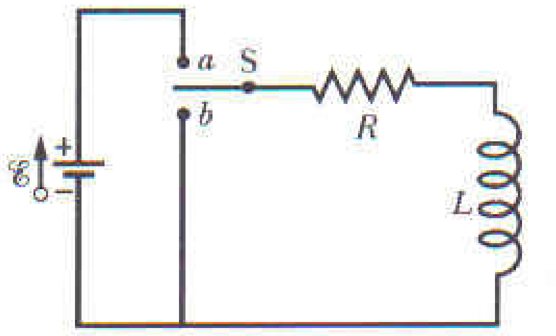
Sacando súbitamente la fem, la carga no cae inmediatamente a cero, pero tenderá exponencialmente a este valor.

$$q = q_0(e^{-t/RC})$$

La misma constante de tiempo τ_C describe tanto la disminución como el aumento de la carga.

Circuitos RL

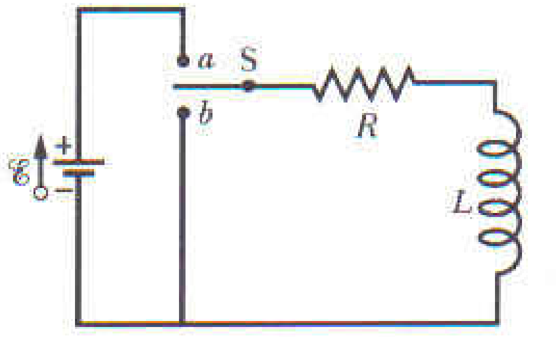
Ocurre un atraso análogo en el crecimiento (o disminución) de la corriente, cuando se introduce (o se remueve) una fem en un circuito de malla única, en un circuito con un inductor y resistencia (circuito RL).



Con la llave S cerrada en a, la corriente en el resistor empieza a aumentar.

Sin el inductor, la corriente llegará a rápidamente a su valor estacionario ε/R.

Circuitos RL



llave S cerrada en a

Por la presencia del inductor, una fem auto-inducida εL aparecerá en el circuito. De acuerdo con la ley de Lenz, esta fem se opone al crecimiento de la corriente, significando la polaridad es opuesta a la fem ε de la batería.

Así, el resistor queda sujeto a la diferencia de potencial entre dos fems, una constante ε, por la batería, otra variable εL (=Ldi/dt) consecuente de la auto-inducción. Mientras esta segunda fem esté presente, la corriente en el resistor es menor que ε/R.

A la medida que el tiempo pasa, la tasa a la que la corriente aumenta se torna cada vez menos rápida y el modulo de la fem auto-inducida (proporcional a di/dt), se torna menor. De esa forma la corriente en el circuito se aproxima asintóticamente a ε/R.

Circuitos RL

Analizando cuantitativamente.

Ley de las mallas en el sentido horario:

$$-iR - L\frac{di}{dt} + \varepsilon = 0$$

$$iR + L\frac{di}{dt} = \varepsilon \qquad \text{Circuito RL}$$

La ecuación es una ecuación diferencial que involucra la variable *i* y su primera derivada *di/dt*.

Buscando la función *i(t)* y la correspondiente primera derivada sustituidas en la ecuación arriba que satisfacen la ecuación y su condición inicial *i(0)*=0, se tiene que:

Circuitos RL

Guiados por el raciocinio del circuito RC para el establecimiento de la carga , la solución que satisface la condición inicial es:

Circuito RC $$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\varepsilon$$ Resolución de la ecuación diferencial $\Rightarrow$ $$q=C\varepsilon(1-e^{-t/RC})$$ En t=0, q=0

Circuito RL $$iR+L\frac{di}{dt}=\varepsilon$$ Resolución de la ecuación diferencial $\Rightarrow$ $$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L})$$ En t=0, i=0

Para comprobar esta solución por sustitución, calculamos la derivada *di/dt*:

$$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L}) \Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon}{L}e^{-Rt/L}$$

Sustituyendo *i* y *di/dt* en $$iR+L\frac{di}{dt}=\varepsilon$$ lleva a una identidad que se puede fácilmente verificar:

$$\frac{\cancel{\varepsilon}}{\cancel{R}}(1-e^{-Rt/L})\cancel{R}+\cancel{L}\frac{\cancel{\varepsilon}}{\cancel{L}}e^{-Rt/L}=\cancel{\varepsilon}$$

Circuitos RL

Podemos reescribir la ecuación de *i* como:

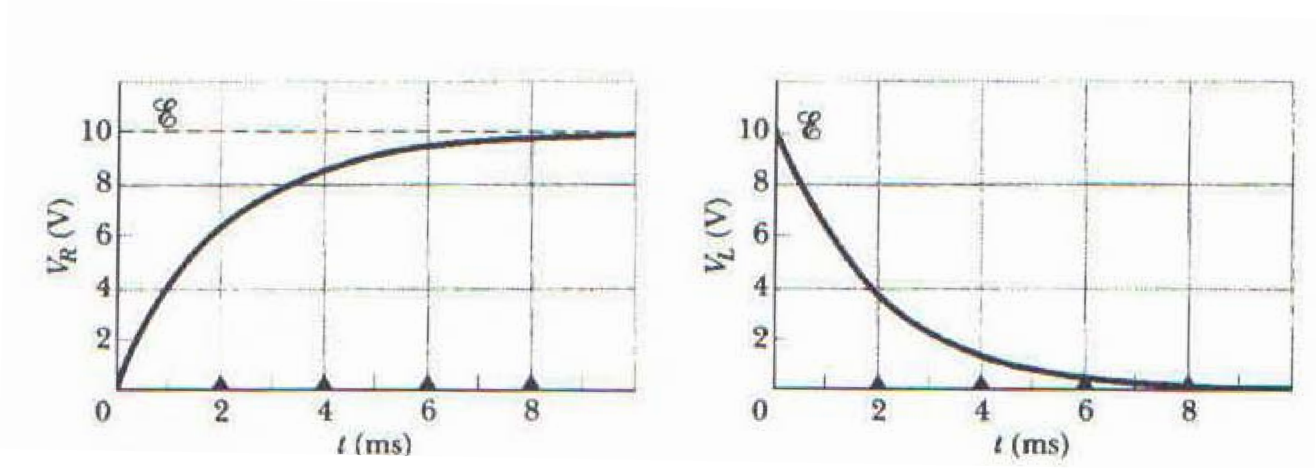
$$i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \Rightarrow \quad i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau_L})$$ Crecimiento de corriente

Donde $\boldsymbol{\tau_L}$ es la **constante de tiempo inductiva**.

$$\tau_L = L/R$$ Constante de tiempo

Circuitos RL

Diferencia de potencial V_R a través del resistor (=Ri) y V_L a través del inductor (=*di/dt*). V_R y V_L varían con el tiempo para valores particulares de *ε, L y R.*



Como la diferencia de potencial V_R a través del resistor es proporcional a *i*, la dependencia temporal del crecimiento de la corriente tiene la misma forma que V_R, como se demuestra en el grafico V_R.

Circuitos RL

El significado físico de la constante de tiempo obtenido de

$$i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$ Haciendo $t = \tau_L = L/R$ Se reduce:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-1}) = 0{,}63\frac{\varepsilon}{R}$$

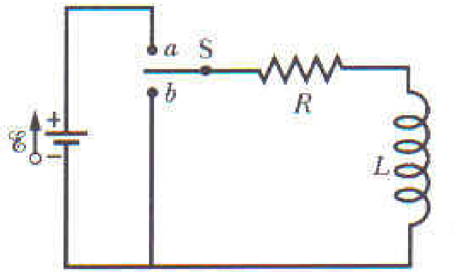
La constante de tiempo es el tiempo necesario para que la corriente alcance un valor de 1/e (aproximadamente 63%) de su valor final de equilibrio ε/R.

Demostrando que $\tau_L (= L/R)$ tiene dimensión de tiempo:

$$1\frac{H}{\Omega} = 1\frac{H}{\Omega}\left(\frac{1V.s}{1H.A}\right)\left(\frac{1\Omega.A}{1V}\right) = 1s$$

Circuitos RL

Si la llave fuese mantenida en **a** el tiempo suficiente necesario para que la corriente alcance su valor de equilibrio ε/R y, a seguir, conectada, al terminal **b**, el efecto final corresponderá a la retirada de la bateria del circuito. La ecuación diferencial que gobierna el decaimento subsecuente a la corriente en el circuito pode ser obtenida haciéndose ε=0 en la ecuacion:



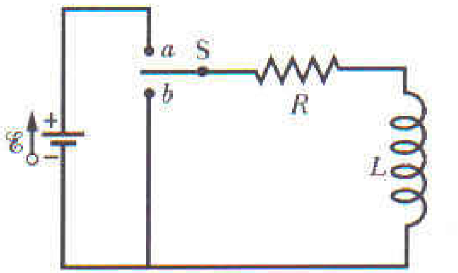
llave S cerrada en **b**

$$iR + L\frac{di}{dt} = \varepsilon$$

Haciendo $\varepsilon = 0$ ⇨

$$iR + L\frac{di}{dt} = 0$$

Circuitos RL



llave S cerrada en **b**

Circuito RC $$iR + \frac{q}{C} = 0$$ Solución de la ecuación diferencial: $$q = q_0 e^{-t/RC}$$ Donde q_0=Cε en ese caso, la carga inicial del condensador.

Circuito RL $$iR + L\frac{di}{dt} = 0$$ Solución de la ecuación diferencial: $$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L} = i_0 e^{-t/\tau_L}$$ condición inicial i(0) = i(0)=i_o=ε/R

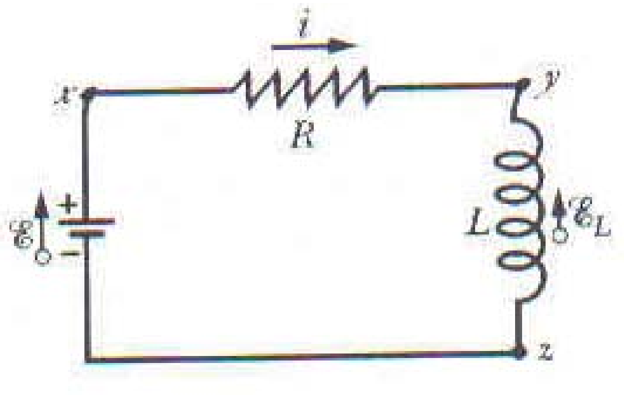
Decaimiento de la corriente

I_o = corriente en el instante t=0.

Vemos que tanto el crecimiento de la corriente como su decaimiento en un circuito RL son gobernados por la misma constante de tiempo inductiva τ_L.

Energia almacenada en un campo magnetico

Consideremos la figura.



$$iR + L\frac{di}{dt} = \varepsilon$$

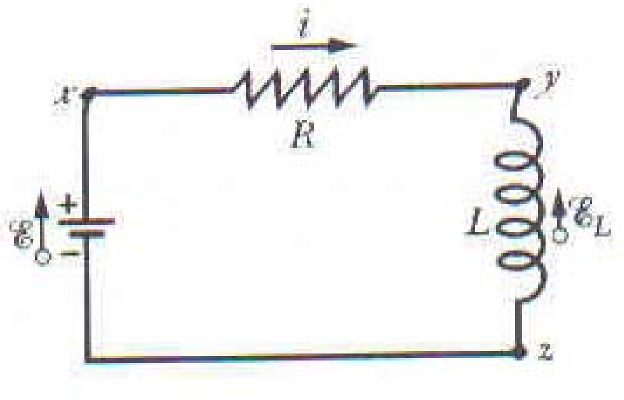
Ecuación del crecimiento de la corriente en el circuito.

Recordando que esta ecuación resulta del teorema de mallas y que este teorema resulta del principio de conservación de energía para un circuito de mallas única. Multiplicando por *i*:

$$\varepsilon i = i^2 R + Li\frac{di}{dt}$$

Energia almacenada en un campo magnetico

Consideremos la figura.



$$iR + L\frac{di}{dt} = \varepsilon$$

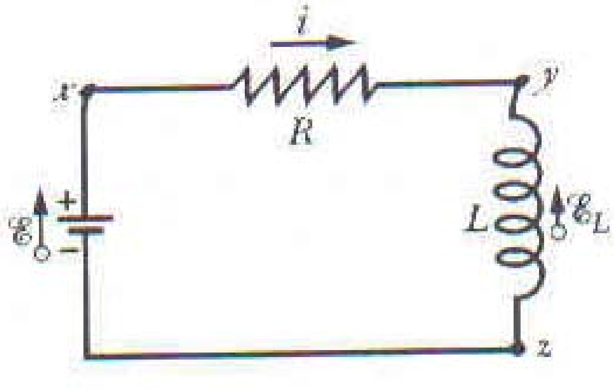
$$\varepsilon i = i^2 R + Li\frac{di}{dt}$$

La interpretación física en términos de trabajo y energía:

1. Cuando la carga *dq* atraviesa la batería de fem ε en un intervalo de tiempo dt, la bateria realiza sobre ella un trabajo igual a ε*dq*. La tasa de este trabajo equivale a (ε*dq)/dt,* o ε*i*. Luego ε*i* es la tasa con que el dispositivo de fem transfiere energia para el circuito.

2. El primer término de la derecha es la tasa con que la energía aparece en la forma de energía térmica en la resistencia.

Energia almacenada en un campo magnetico



3. La energía que no aparece como energía térmica debe, de acuerdo con la hipótesis de conservación de energía, quedar almacenada en el campo magnético del inductor. Como la ecuación mencionada traduce la conservación de energía para circuitos RL, el último término debe representar la tasa dU_B/dt con que la energía almacenada en forma de campo magnético varía en función del tiempo, así:

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

Podemos rescribir como: $$dU_B = Lidi$$

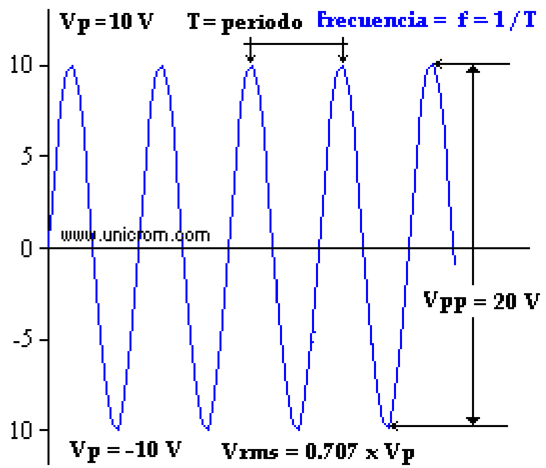
Integrando resulta: $$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Lidi \quad \text{o} \quad U_B = \frac{1}{2}Li^2$$ (energía magnética)

Que representa la energía total almacenada por un inductor L transportando una corriente *i*.

Corriente alterna CA (o AC en ingles)

Se denomina corriente alterna a la corriente eléctrica en que la magnitud y dirección varían cíclicamente. La forma de onda mas comúnmente utilizada es la onda sinusoidal, puesto que se consigue una transmisión mas eficiente de energía. Sin embargo, en ciertas aplicaciones se utilizan otras formas de onda periódicas, tales como la triangular o la cuadrada.

CA es la forma en la cual la electricidad llega a los hogares y a las empresas.

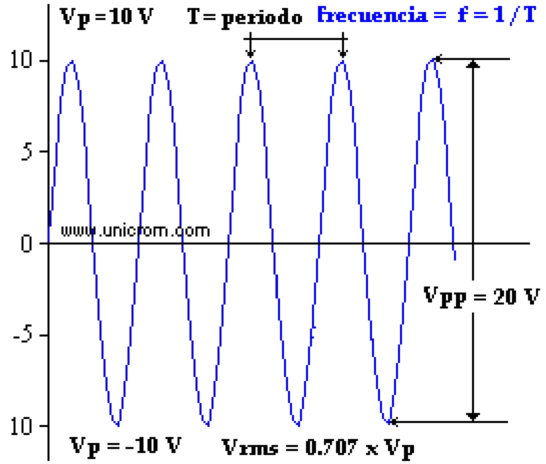


A = amplitud
ω = frecuencia angular en radianes/segundos
$\omega = 2\pi f$
f es la frecuencia en Hertz (Hz)
t=tiempo en segundos
Vpp – diferencia entre el máximo y el mínimo de onda
A – mitad del Vpp (Amplitud)
T= periodo   f=1/T

Los valores mas empleados en la distribución son 50 y 60 Hz.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50Hz} = 20ms$$

Corriente alterna CA (o AC en ingles)



Luego tensión y corriente pueden ser descritas como

$$V(t) = Asen(2\pi ft) \qquad i(t) = Asen(2\pi ft)$$

Valor eficaz – V_{rms} – del ingles “root mean square” (valor cuadratico medio).

Se puede obtener el valor equivalente en corriente continua de un voltaje alterno. Este es el voltaje que será medido con el multímetro.

Corriente alterna CA (o AC en ingles)

Su importancia se debe a que este valor es el que produce la misma perdida de calor que su equivalente en corriente continua. Matemáticamente, el valor eficaz de una magnitud variable con el tiempo, se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores alcanzados durante un periodo:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V^2 dt} \quad \Rightarrow \quad V_{rms} = \sqrt{\overline{V(t)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Por medio de un desarrollo similar, se puede mostrar que la corriente rms es:

$$i_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Para una onda cuadrada simétrica: $V_{rms} = A$

Para una onda triangular simétrica: $V_{rms} = \frac{A}{\sqrt{3}}$

Corriente alterna CA (o AC en ingles)

Potencia eficaz:

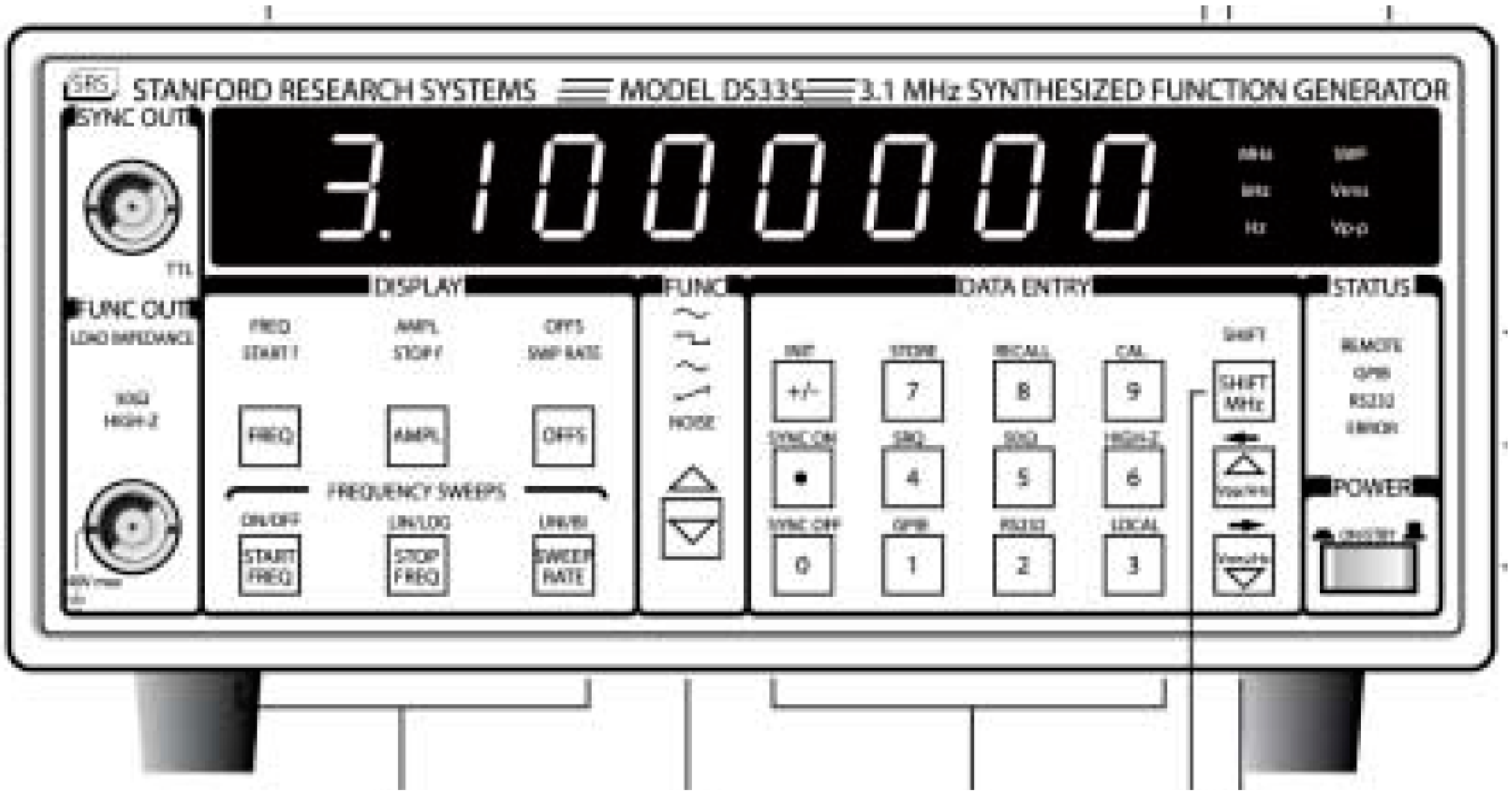
$$P = i^2 R \quad \Rightarrow \quad \overline{P(t)} = \overline{i^2(t)}R = i^2{}_{Rms}R$$

Una corriente alterna de magnitud I_{Rms} tiene el “efecto” de una corriente continua de la misma magnitud en el sentido de que la potencia disipada promedio es la misma para ambas. De esta manera de un punto de vista enérgico, es mejor hablar de voltaje Rms, que de Vpp – peak to peak.

Corriente alterna CA (o AC en ingles)

Instrumentos:

Generador de ondas

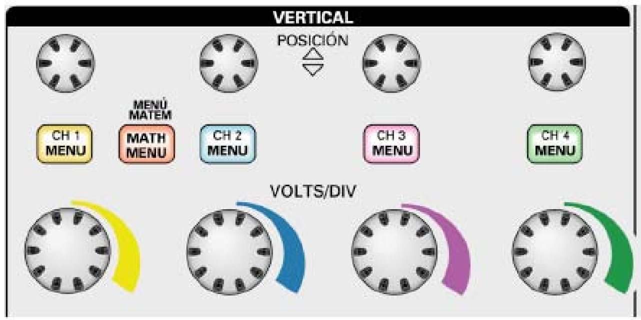


Corriente alterna CA (o AC en ingles)

Instrumentos:

Osciloscopio

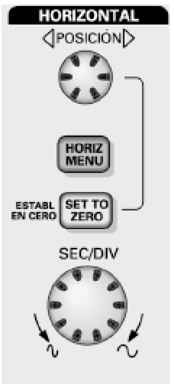
Controles verticales



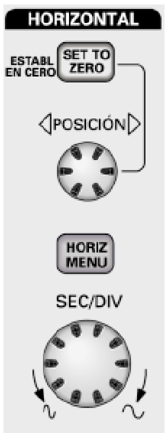
Todos los modelos, se muestran 4 canales

POSICIÓN (CH 1, CH 2, CH 3 y CH 4). Sitúa verticalmente una forma de onda.

Controles horizontales



Modelo de dos canales



Modelo de cuatro canales