Profesores: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero

Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Jocelyn González, Fernando Solari, Daniel Lillo

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar Extra Examen
1 de Julio de 2009

Problema 1
Se tiene el siguiente problema (P)

$$\underset{x_1,x_2}{Min}\ F(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2$$
$$g_1(x_1,x_2): x_1 \geq x_2^2$$
$$g_2(x_1,x_2): x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1$$
$$g_3(x_1,x_2): x_2 \geq 0$$

1. Muestre las gráficamente las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo.
2. Escriba el problema (P) en su forma estándar.
3. Revise el cumplimiento de las condiciones de KKT para los siguientes puntos: $(1,1)$; $(0,0)$. ¿Qué se puede decir de cada uno?
4. Entregue la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado. ¿Podemos asegurar que es un mínimo global?, justifique su respuesta.

Problema 2
Se tiene el siguiente problema (P)

$$\underset{x_1,x_2}{Max}\ F(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$
$$g_1(x_1,x_2): x_2 \geq x_1^2$$
$$g_2(x_1,x_2): x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 1$$

1. Muestre las gráficamente las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo.
2. Escriba el problema (P) en su forma estándar.
3. Proponga un candidato a óptimo y revise el cumplimiento de las condiciones de KKT.
4. Entregue la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado. ¿Qué particularidad observa?

Problema 3
Se tiene el siguiente problema (P)

$$\underset{x_1,x_2}{Min}\ F(x_1,x_2) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2$$
$$g_1(x_1,x_2): x_1^2 + x_2 \leq 0$$
$$g_2(x_1,x_2): x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 1$$
$$g_3(x_1,x_2): x_2 \leq 0$$

1. Muestre las gráficamente las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo.

2. Desarrolle las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).
3. Revise el cumplimiento de las condiciones de KKT para los siguientes puntos: $(0,-2); (0,-1); (0,0)$.
4. Entregue la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado. ¿Es un mínimo global?, justifique su respuesta.

Problema 4

a) Suponga que al resolver un problema de programación entera, en la primera ramificación del algoritmo de B&B, en una de las ramas le da un óptimo con coordenadas enteras. ¿Puede afirmar que es el óptimo del problema general? ¿Por qué?
b) Suponga que tiene que resolver un problema de programación entera con poliedro factible de la relajación lineal acotado. Analice la veracidad de la siguiente frase: "Dado que el problema de programación entera puede resolverse mediante B&B resolviendo un número finito de problemas lineales, si uso un algoritmo polinomial para resolver dichos problemas lineales, entonces tengo un algoritmo polinomial para el problema original".

Problema 5
METODO DEL GRADIENTE

a) Sea $f : R^2 \to R$, tal que $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Muestre que el método del Gradiente o Máximo Descenso (steepest descent method) encuentra el óptimo en una sola iteración, independiente del punto de partida.
b) Sea $g : R^2 \to R$, tal que $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2$. Explique por qué en este caso no se puede asegurar una rápida convergencia. Encuentre un punto de partida apropiado, para el cual este método encuentra el óptimo en una sola iteración.

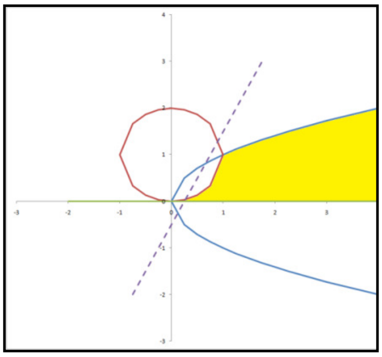
Problema 6
METODO DE NEWTON
Sea $f : R^2 \to R$ tal que $f \in C^2$

a) Muestre que $d = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x)$ es una dirección de descenso para f en x si $\nabla^2 f(x)$ es definido positivo.
b) Realice una iteración del Método de Newton para la función g del problema anterior comenzando desde el punto (1,1).

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Pauta Auxiliar Extra Examen
1 de Julio de 2009

Problema 1

1)



2)

Forma Estándar:

$$\underset{x_1,x_2}{Min}\ F(x_1,x_2)=2x_1-x_2$$

$$g_1(x_1,x_2):-x_1+x_2^2\leq 0$$
$$g_2(x_1,x_2):-x_1^2-(x_2-1)^2+1\leq 0$$
$$g_3(x_1,x_2):-x_2\leq 0$$

Condiciones de KKT

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}-1\\2x_2\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}-2x_1\\-2(x_2-1)\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mu_1(-x_1+x_2^2)=0$$
$$\mu_2(-x_1^2-(x_2-1)^2-1)=0$$
$$\mu_3(-x_2)=0$$

3)

Punto $(1,1)$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mu_1(0)=0 \qquad \Rightarrow \mu_1\ libre$$
$$\mu_2(0)=0 \qquad \Rightarrow \mu_2\ libre$$
$$\mu_3(-1)=0 \qquad \Rightarrow \mu_3=0$$

Ahora determinamos los μ_i:

$$-1+2\mu_1=0\Rightarrow \mu_1=\frac{1}{2}\geq 0$$

$$2-\mu_1-2\mu_2=0\ \Rightarrow \mu_2=\frac{3}{4}\geq 0$$

Luego $(1,1)$ cumple las condiciones de KKT y, por lo tanto, es candidato a ser mínimo local

Punto $(0,0)$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mu_1(0)&=0 &&\Rightarrow \mu_1 \ libre\\ \mu_2(0)&=0 &&\Rightarrow \mu_2 \ libre\\ \mu_3(0)&=0 &&\Rightarrow \mu_3 \ libre\end{aligned}$$

Ahora determinamos los μ_i:

$$2-\mu_1=0 \Rightarrow \mu_1=2\geq 0$$
$$-1+2\mu_2-\mu_3=0$$

Basta escoger $\mu_2=1, \mu_3=1\geq 0$ para que el sistema tenga solución

Luego $(0,0)$ cumple las condiciones de KKT, y es también un candidato a ser óptimo.

Ambos puntos cumplen la condición de regularidad, ya que los gradientes de sus restricciones activas son l.i., y ambos cumplen la condición necesaria de KKT, luego son mínimos locales. Sin embargo, la región factible no es convexa, en particular la restricción 2 no lo es:

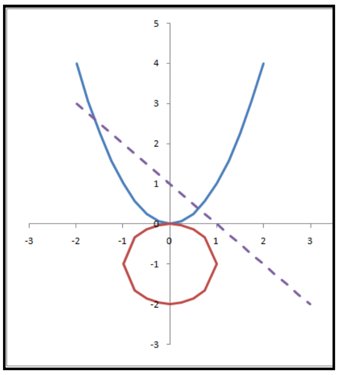
$$\nabla^2 g_2(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}<0$$

Luego, no se satisface la condición suficiente para asegurar optimalidad global de ninguno de los dos puntos.

4)
Gráficamente se encuentra que el óptimo es el punto $(0,0)$, y el valor de la función objetivo es $F(0,0)=0$. No se puede asegurar optimalidad, a pesar de que el otro candidato tiene un valor de $F(1,1)=1$, ya que eventualmente podrían existir otros candidatos con mejor resultado, que no han sido revisados.

Moraleja: Hay puntos que cumplen KKT que no son mínimos. KKT es suficiente cuando las restricciones y la función objetivo son de clase C1, y la f y la región generada por las restricciones son convexas.

Problema 2
1)



2)
Forma Estándar:

$$\min_{x_1,x_2} F(x_1,x_2) = -x_1 - x_2$$
$$g_1(x_1,x_2): x_1^2 - x_2 \le 0$$
$$g_2(x_1,x_2): x_1^2 + (x_2+1)^2 - 1 \le 0$$

Condiciones de KKT

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}2x_1\\-1\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}2x_1\\2(x_2+1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mu_1\left(x_1^2 - x_2\right) = 0$$
$$\mu_2\left(x_1^2 + (x_2+1)^2 - 1\right) = 0$$

3)
El único punto factible es (0,0)
Punto $(0,0)$

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mu_1(0) = 0 \qquad \Rightarrow \mu_1 \ libre$$
$$\mu_2(0) = 0 \qquad \Rightarrow \mu_2 \ libre$$

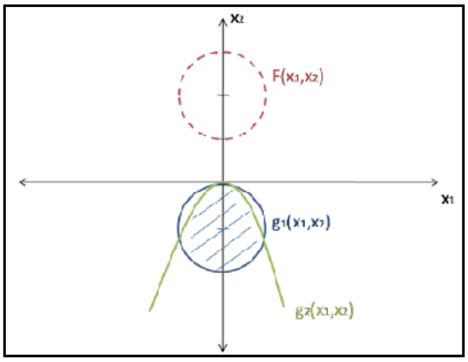
Notamos que no existen μ_i que satisfagan el sistema, luego este punto no satisface KKT

4)
Claramente, el óptimo es el punto $(0,0)$, ya que no existen otros puntos factibles. Luego el valor de la función objetivo es $F(0,0) = 0$.
Estamos frente a un punto óptimo que no cumple las condiciones necesarias de KKT, lo que se explica porque este punto no cumple la condición de regularidad. Se tiene que el cono tangente es $C(0,0) = \{(x,y)/\ y = 0\}$, mientras que el conjunto de direcciones factibles es nulo.

Moraleja: Hay puntos que cumplen KKT y son óptimos. Esto sucede cuando no se cumple regularidad

Problema 3

1)



2)

Forma Estándar:

$$\underset{x_1,x_2}{Min}\ F(x_1,x_2) = x_1^2 + (x_2-2)^2$$
$$g_1(x_1,x_2): x_1^2 + x_2 \leq 0$$
$$g_2(x_1,x_2): x_1^2 + (x_2+1)^2 - 1 \leq 0$$
$$g_3(x_1,x_2): x_2 \leq 0$$

Condiciones de KKT:

Si x es regular y $\exists \mu_i \geq 0, \forall i \in \{1,2,3\}$ tal que:

$$\nabla F(x_1,x_2) + \mu_1 \nabla g_1 + \mu_2 \nabla g_2 + \mu_3 \nabla g_3 = 0$$
$$\mu_1 g_1(x_1,x_2) = 0$$
$$\mu_2 g_2(x_1,x_2) = 0$$
$$\mu_3 g_3(x_1,x_2) = 0$$

Luego, aplicándolas al problema (P) obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2(x_2-2) \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2(x_2+1) \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y también:

$$\mu_1 (x_1^2 + x_2) = 0$$
$$\mu_2 (x_1^2 + (x_2+1)^2 - 1) = 0$$
$$\mu_3 (x_2) = 0$$

3)

Punto $(0,-2)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1(-2)=0 \qquad \Rightarrow \mu_1=0$$
$$\mu_2(0)=0 \qquad \Rightarrow \mu_2 \ libre$$
$$\mu_3(-2)=0 \qquad \Rightarrow \mu_3=0$$

Ahora determinamos μ_2:

$$-8+\mu_1-2\mu_2+\mu_3=0 \Rightarrow \mu_2=-4<0$$

Luego $(0,-2)$ no cumple las condiciones de KKT y, por lo tanto, no es candidato a ser mínimo local.

Punto $(0,-1)$

$$\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mu_1(-1)=0 \qquad \Rightarrow \mu_1=0$$
$$\mu_2(-1)=0 \qquad \Rightarrow \mu_2=0$$
$$\mu_3(-1)=0 \qquad \Rightarrow \mu_3=0$$

Notamos que no se cumple la igualdad, por lo que los μ_i encontrados no satisfacen las condiciones de KKT

Luego $(0,-1)$ no cumple las condiciones de KKT y, por lo tanto, no es candidato a ser mínimo local.

Punto $(0,0)$

$$\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mu_1(0)=0 \qquad \Rightarrow \mu_1 \ libre$$
$$\mu_2(0)=0 \qquad \Rightarrow \mu_2 \ libre$$
$$\mu_3(0)=0 \qquad \Rightarrow \mu_3 \ libre$$

Ahora determinamos los μ_i:

$$-4+\mu_1+2\mu_2+\mu_3=0$$

Basta escoger $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1\geq 0$ para que el sistema tenga solución

Luego $(0,0)$ cumple las condiciones de KKT y, por lo tanto, es candidato a ser mínimo local.

4)

Gráficamente se encuentra que el óptimo es el punto $(0,0)$, y el valor de la función objetivo es $F(0,0)=4$.

Por otro lado, observamos que $F(x_1,x_2)$, $g_i(x_1,x_2)$ $i=1,2,3$ son C^1, además $F(x_1,x_2)$ es convexa y la región factible S también lo es.

Además, el punto $(0,0)$ cumple la condición de regularidad (a pesar de que los gradientes de las 3 restricciones son l.i. en ese punto), ya que el cono tangente

$C(0,0) = \{(x,y)/\ y \leq 0\}$ es igual a la clausura del conjunto de direcciones factibles $cl(D(0,0)) = cl\{(x,y)/\ y < 0\}$.

Luego, como $(0,0)$ cumple las condiciones de KKT, tenemos un óptimo global para el problema.

Moraleja: Hay puntos que los gradientes de las restricciones activas en ese punto son l. d. y sin embargo si son regulares.

Problema 4

a) No se puede afirmar que sea el óptimo del problema general pues se pueden presentar varias situaciones:

1. Si en la otra rama también da una solución entera, el óptimo del problema general es el de la rama con mejor valor en la función objetivo.
2. Si en la otra rama la solución no es entera y el valor de la función objetivo es peor que el de la rama con solución entera, entonces la rama con solución entera es el óptimo pues ramificar la otra rama sólo empeorará el valor de la función objetivo.
3. Si en la otra rama la solución no es entera pero el valor de la función objetivo es mejor que el de la rama con solución entera, entonces se debe ramificar la rama y no se puede afirmar que sea el óptimo del problema general.

b) Es cierto que un problema de programación entera se puede resolver con un número finito de problemas lineales, pero no es necesariamente cierto que el número de problemas lineales que se tenga que resolver sea polinomial en función del tamaño de la instancia del problema original. Es decir, es posible que para alguna instancia específica sea necesario examinar una cantidad exponencial de ramas y subproblemas en función del tamaño de la instancia. La afirmación es falsa pues de lo contrario programación entera sería polinomial.

Problema 5

METODO DEL GRADIENTE

Parte a)

Primero tenemos que $\nabla f\left((x_1,x_2)^T\right) = (2x_1, 2x_2)^T$

Comencemos desde el punto $x^0 = (a,b)^T \in R^n$ cualquiera.

Calculamos el gradiente de f en ese punto: $\nabla f\left((a,b)^T\right) = (2a, 2b)^T$

Luego el punto x^1 viene dado por $x^1 = x^0 - \alpha \nabla f(x^0)$, donde α viene del problema unidimensional $\underset{\alpha > 0}{Min}\ f(x^1)$, es decir:

$x^1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$, con $f(x^1) = (a - 2a\alpha)^2 + (b - 2b\alpha)^2$

y $\dfrac{df(x^1)}{d\alpha} = -4a(a - 2a\alpha) - 4b(b - 2b\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \alpha = 1/2$

Luego $x^1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verificamos si es óptimo:

$\nabla f(x^1) = \quad \nabla f\left((0,0)^T\right) = \quad (0,0)^T$

$\nabla^2 f(x^1) = \quad \nabla^2 f\left((0,0)^T\right) = \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que es definida positiva.

Luego el punto $(0,0)^T$ es óptimo.

Parte b)
En este caso se tienen curvas de nivel elípticas, por lo que, salvo en algunos puntos, el gradiente de la función objetivo no apunta hacia el óptimo global, y se tienen gradientes más bien ortogonales en iteraciones sucesivas, por lo que se converge lentamente a medida que nos acercamos al óptimo.
Para llegar en una sola iteración basta encontrar un punto en el cual $-\nabla f$ apunte hacia el origen, por ejemplo: $(1,0)^T$ ó $(0,1)^T$.

Problema 6
METODO DE NEWTON

Parte a)
Sea $\nabla^2 f(x)$ definida positiva y sea $d = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x)$.

Se tiene que $y^T \cdot \nabla^2 f(x) \cdot y > 0 \quad \forall y \in R^n / \{0\}$

Y además $y^T \cdot [\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot y > 0 \quad \forall y \in R^n / \{0\}$

Luego $\nabla f(x)^T \cdot [\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x) > 0$

$-\nabla f(x)^T \cdot [\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x) < 0$

$\nabla f(x)^T \cdot \left(-[\nabla^2 f(x)]^{-1} \cdot \nabla f(x)\right) < 0$

$\nabla f(x)^T \cdot d < 0$

Y d es una dirección de descenso.

Parte b)
Primero tenemos que $\nabla f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1, 6x_2)^T$ y $\nabla^2 f\left((x_1, x_2)^T\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Comenzamos desde el punto $x^0 = (1,1)^T$

Calculamos el gradiente de f en ese punto: $\nabla f\left((1,1)^T\right) = (2,6)^T$

Luego el punto x^1 viene dado por $x^1 = x^0 - [\nabla^2 f(x^0)]^{-1} \nabla f(x^0)$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verificamos si es óptimo:

$\nabla f(x^1) = \quad \nabla f\left((0,0)^T\right) = \quad (0,0)^T$

$\nabla^2 f(x^1) = \quad \nabla^2 f\left((0,0)^T\right) = \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ que es definida positiva.

Luego el punto $(0,0)^T$ es óptimo.