Tarea 3: Macroeconomía I

Departamento de Ingeniería Industrial - Universidad de Chile

La tarea se entrega el día jueves 28 de mayo a más tardar a las 23:00 hrs. Debe enviar al correo ajaniak@dii.uchile.cl un PDF con las respuestas más los ficheros *.m

1. **(Guess and verify)** Un productor de vinos tiene una unidad de trabajo para utilizar cada día. El puede distribuir su trabajo entre hacer pan o aplastar uvas para hacer jugo. El pan que el productor hace hoy puede consumirlo en el mismo día. En cambio, el jugo de uvas que produce hoy no puede consumirlo hoy sino que tiene que esperar un día para que se vuelva vino (el productor no disfruta el jugo de uvas). La tecnología de producción es lineal: produce una unidad de pan por unidad de trabajo dedicada a amasar, una unidad de jugo por unidad de trabajo dedicada a aplastar uvas y una unidad de vino por unidad de jugo de uvas puesta a fermentar. La transformación de jugo a vino no requiere trabajo, sólo tiempo. El productor distribuye su trabajo con el objetivo de maximizar la utilidad generada por su propio consumo. Su función de utilidad tiene la forma:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (b_t w_t)^{0.5}$$

Donde b_t y w_t corresponden al consumo de vino y pan en el periodo t respectivamente. El consumo inicial de vino está dado por w_0. El factor de descuento es β y se encuentra entre cero y uno.

   (a) Escriba la Función de Valor asociada al problema. ¿Cuáles son las variables de estado y de control?

   (b) Suponga que la Función de Valor tiene la forma $V(w) = \alpha(\gamma + w)^{0.5}$, donde γ y α son parámetros desconocidos del modelo. Luego, verifique que $V(w)$ tiene tal forma. Finalmente, encuentre los parámetros α y γ.

   (c) Determine la elección óptima de vino para el siguiente periodo, es decir w' en función de la cantidad de vino de este periodo.

2. **(Log-linearization around the stationary equilibrium)** Este problema[1] tiene una parte analítica y una parte que usted debe desarrollar en `Matlab`. Considere una economía sin incertidumbre habitada por un número muy grande de consumidores idénticos que vive eternamente y que buscan maximizar:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, H_t) \tag{1}$$

Donde C_t denota el consumo del hogar en el momento t y H_t denota las horas que la familia dedica a trabajar. Se sabe que $U(.)$ es cóncava y creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo. La restricción presupuestaria está dada por la siguiente expresión:

[1] Basado en Shmitt-Grohé, S. (1997). *"Comparing Four Models of Aggregate Fluctuations due to Self-Fulfilling Expectations"*, Journal of Economic Theory **72**, pp. 96 - 147

$$C_t + \frac{q_{t+1}}{q_t} W_{t+1} \leq w_t H_t + W_t \tag{2}$$

Donde W_t es la riqueza que la familia posee al inicio del periodo y q_t representa el valor de los activos que la familia posee valoradas en términos de unidades de consumo en el periodo t. Además, w_t es el salario que la familia obtiene por los servicios laborales que presta.

Adicionalmente, la condicción de vaciado de los mercados está dada por:

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t \tag{3}$$

Donde δ es la tasa a la cual se deprecia el capital de esta economía.

(1) Explique la forma de la restricción presupuestaria de los consumidores. En particular, refierase al valor que tienen los activos que el agente desea dejar para el siguiente periodo, W_{t+1}.

(2) Muestre que las condiciones de primer orden del problema de maximización del hogar representativo, permiten establecer:

$$U_c(C_t, H_t) = \lambda_t \tag{4}$$

$$-\frac{U_H(C_t, H_t)}{U_c(C_t, H_t)} = w_t \tag{5}$$

$$1 = \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}(u_{t+1} + 1 - \delta) \tag{6}$$

Para ello considere que u_{t+1} es el costo de contratación del capital, es igual a $F_1(K_t, H_t)$ y que λ_t es la utilidad marginal de la riqueza.

(3) Suponga ahora que es posible expresar el consumo y las horas trabajadas por el hogar representativo como

$$C_t = C(w_t, \lambda_t)$$
$$H_t = H(w_t, \lambda_t)$$

Utilizando estas ecuaciones, muestre que las condiciones loglinearizadas tienen las forma:

$$\widehat{C}_t = \varepsilon_{Cw}\widehat{w}_t + \varepsilon_{C\lambda}\widehat{\lambda}_t \tag{7}$$

$$\widehat{H}_t = \varepsilon_{Hw}\widehat{w}_t + \varepsilon_{H\lambda}\widehat{\lambda}_t \tag{8}$$

$$\widehat{Y}_t = s_C\widehat{C}_t + \frac{s_I}{\delta}[\widehat{K}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{K}_t] \tag{9}$$

$$\widehat{\lambda}_t = \widehat{\lambda}_{t+1} + \frac{r+\delta}{1+r}\widehat{u}_{t+1} \tag{10}$$

Donde $s_c = \frac{C}{Y}$ es la proporción del producto que se consume en estado estacionario y $s_I = \delta\frac{K}{Y}$ es la proporción del producto que se invierte en estado estacionario. Además, $\{\varepsilon_{Cw}, \varepsilon_{C\lambda}, \varepsilon_{Hw}, \varepsilon_{H\lambda}\}$ corresponden a las elasticidades del consumo y las horas trabajadas respecto al salario y la utilidad marginal de la riqueza respectivamente.

De aquí en más considere que las siguientes identidades se satisfacen en estado estacionario:

- $s_C + s_I = 1$
- $s_I = \frac{\delta s_k}{r+\delta}$ con $s_K = \frac{uK}{Y}$ que denota la parte del producto en valor agregado.
- $s_H + s_K = 1$ donde $s_H = \frac{wH}{Y}$ es la parte que recibe el factor trabajo en valor agregado.
- $\varepsilon_{Hw} - \rho\varepsilon_{H\lambda} = 0$
- $\varepsilon_{Cw} - \rho\varepsilon_{C\lambda} = 1$
- $\varepsilon_{Cw} = \frac{\rho-1}{\rho}\frac{s_H}{s_C}\varepsilon_{Hw}$

(4) Explique cada una de las anteriores identidades considerando que ρ es la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal.

Considere ahora el problema de la firma. En esta economía existen N firmas monopolistas que producen N bienes intermedios. Además existen dos bienes finales, uno de consumo, que es comprado por los consumidores, y uno de inversión, que es comprado por los monopolistas para aumentar su stock de capital. Por lo tanto existe $(N + 2)$ en la economía. Ambos bienes finales utilizan los N insumos intermedios. Los bienes finales se producen con una tecnología *Dixit - Stiglitz* del tipo:

$$f(x) = N^{\frac{1}{1-\sigma}} \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \rightarrow \sigma > 0 \tag{11}$$

El parámetro σ es la elasticidad de sustitución entre los insumos en la producción de bienes de consumo. Existe una función de producción idéntica para los bienes de inversión donde $\eta > 0$ es la elasticidad de sustitución correspondiente. Se sabe además que $\sigma \neq \eta$.

(5) Muestre que en un equilibrio simétrico, la demanda por cada bien intermedio es tal que $x_i = x = \frac{C_t}{N}$.

(6) Plantee el problema de minimización de costes del productor de bienes finales y obtenga de las condiciones de primer orden que:

$$\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

(7) Demuestre además que la demanda que enfrenta un monopolista que produce c_i^t está dada por

$$c_t^i = \left[\frac{p_i}{[N^{\frac{1}{\sigma}} \sum_{j=1}^{N} p_j^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right]^{-\sigma} C_t \tag{12}$$

(8) Muestre que en un equilibrio simétrico debe ser que el precio de cada uno de los bienes intermedios es $\overline{p} = 1$.

Considere ahora que s_t y $(1 - s_t)$ son las partes del producto total dedicado a la inversión y al consumo respectivamente. En un equilibrio simétrico donde cada firma fija un precio igual a $\overline{p} = 1$, el ingreso marginal de la firma i está dado por:

$$MR_t^i = 1 - \frac{1}{\sigma(1 - s_t) + \eta s_t} \tag{13}$$

Todos los productores de bienes intermedios tienen la misma función de producción dada por:

$$Y_t^i = F(K_t^i, H_t^i) - \phi \tag{14}$$

(9) Considerando lo anterior muestre que el *mark-up* del precio sobre los costos marginales está dado por la siguiente expresión:

$$\mu_t = \frac{\sigma(1 - s_t) + \eta s_t}{\sigma(1 - s_t) + \eta s_t - 1} \tag{15}$$

Por último, en un equilibrio simétrico debe cumplirse que:

$$Y_t = NF(K_t/N, H_t/N) - N\phi \tag{16}$$

de donde se obtiene que la demanda por factores está dada por $F_H = \mu_t w_t$ y $F_K = \mu_t u_t$.

(10) ¿Por qué es posible escribir la ecuación (16) como la función de producción agregada? ¿Qué condiciones debe cumplir la función de producción $F(K_t/N, H_t/N)$ para que las funciones de demanda de factores poseean las características usuales?

Las ecuaciones (11) a (16) más las funciones de demanda de factores describen totalmente el lado de la producción de esta economía. De hecho la versión de largo plazo de (15) tiene la forma:

$$\mu = \frac{\sigma s_C + \eta s_I}{\sigma s_C + \eta s_I - 1} \tag{17}$$

(11) Muestre que la elasticidad de μ respecto a la proporción del producto dedicada a la inversión es:

$$\varepsilon_\mu = \frac{(\eta - \sigma)s_I}{\sigma s_C + \eta s_I - 1} \frac{-1}{\sigma s_C + \eta s_I} \tag{18}$$

(12) Muestre que la loglinearización de las condiciones de equilibrio (15) y (16) más la defición de s_t y las demandas agregadas de factores lleva a las siguientes ecuaciones:

$$s_I \widehat{s}_t = s_C(\widehat{Y}_t - \widehat{C}_t) \tag{19}$$

$$\widehat{\mu}_t = \varepsilon_\mu \widehat{s}_t \tag{20}$$

$$\widehat{Y}_t = \mu s_K \widehat{K}_t + \mu s_H \widehat{H}_t \tag{21}$$

$$s_K(\widehat{K}_t - \widehat{H}_t) = \widehat{\mu}_t + \widehat{w}_t \tag{22}$$

$$s_H(\widehat{H}_t - \widehat{K}_t) = \widehat{\mu}_t + \widehat{u}_t \tag{23}$$

(14) Muestre que las ecuaciones (7) a (10) y (19) a (23) permiten establecer un sistema de ecuaciones de la forma

$$X_{t+1} = MX_t$$

donde X_t y X_{t+1} son vectores columna que contienen las nueve variables del modelo en el periodo t y $t + 1$ respectivamente.

El modelo presentado hasta aquí es idéntico a un modelo RBC estándar en el cual existe una sola restricción, el stock de capital inicial, más dos parámetros, μ y ε_μ. El objetivo ahora es mostrar que en un modelo de estas características la existencia de una solución única depende de los valores específicos que tomen estas dos variables. Considere los valores de los parámetros que se encuentran en la columna llamada *CAD model* en la tabla siguiente.

(15) Utilizando `Matlab` calcule los valores propios de la matriz M.

(16) En un gráfico muestre como varían los valores propios obtenidos al cambiar ε_μ y μ identificando con superficies de colores diferentes cuando existe (i) sólo un valor propio dentro del círculo unitario, (ii) dos valores propios dentro del círculo unitario y (iii) ningún valor propio dentro del círculo unitario. Para construir su gráfico considere que $\varepsilon \in [-0.5, 0]$ en el eje y y que $\mu \in [1, 3]$ en el eje x.

Pista: Para el gráfico puede usar el comando `surf` en `Matlab`

(17) Para los valores de $\varepsilon_\mu = -0.25$ y $\mu = 2.35$ simule la trayectoria hacia el estado estacionario para varios valores de K_0 espefícico.

(18) ¿Que pasaría con la trayectoria hacia el estado estacionario si los valores de μ y ε_μ fueran $\varepsilon_\mu = -0.4$ y $\mu = 2.8$?

`Nota: Las preguntas 3 y de 12 a 18 tendrán una mayor ponderación en la nota final`

	Definition	CAD model	IC model	IR model	EXT model	Parameter description
s_H	$\frac{wH}{Y}$	0.58	0.58	0.58	0.58	Labor share in GDP
r	$u-\delta$	0.016	0.016	0.016	0.016	Quaterly real interest rate
δ		0.024	0.024	0.024	0.024	Quarterly depreciation rate
ε_{HW}		4	4	4	4	Labor supply elasticity
ρ		1	1	1	1	Intertemporal elasticity
s_K	$\frac{uK}{Y}$	0.42	0.42	0.42	0.42	Capital share in GDP
s_I	$\frac{\delta s_K}{r+\delta}$	0.25	0.25	0.25	0.25	Investment share in GDP
s_C	$\frac{C}{Y}$	0.75	0.75	0.75	0.75	Consumption share in GDP
$\varepsilon_{H\lambda}$		4	4	4	4	Income elasticity of labor supply
ε_{CW}		0	0	0	0	Wage elasticity of consumption
$\varepsilon_{C\lambda}$		-1	-1	-1	-1	Income elasticity of consumption
$\tilde{\gamma}$		2.35	2.35	2.35	2.35	Aggregate returns to scale
μ		2.35	2.35	2.35	1	Steady state markup
ε_μ	[a]	-0.25	0.7	—	—	Elasticity of the markup
η		1	1	2.34	1	Degree of homogeneity of $F(K,H)$
α		—	0.9	—	—	Probability of collusion to last