MA1001: Introducción al Cálculo (Semana 4)

Prof: Raúl Gormaz

rgormaz@dim.uchile.cl

Semestre otoño 2009

http://www.dim.uchile.cl/~docencia

La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.
La **hiperbola** corresponde al caso $e > 1$.
Ambos casos corresponden a $e \neq 1$.

Ecuación de la elipse y de la hipérbola

La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.
La **hiperbola** corresponde al caso $e > 1$.
Ambos casos corresponden a $e \neq 1$.

Cónica de Foco $F = (f, 0)$ y directriz $x = d$
Para $P = (x, y) \in$ Cónica

$$d(P, F) = e\, d(P, D) \iff (x - f)^2 + y^2 = e^2(x - d)^2$$

Ecuación de la elipse y de la hipérbola

La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.
La **hiperbola** corresponde al caso $e > 1$.
Ambos casos corresponden a $e \neq 1$.

Cónica de Foco $F = (f, 0)$ y directriz $x = d$

Para $P = (x, y) \in$ Cónica

$$
\begin{aligned}
d(P,F) = e\, d(P,D) \quad &\iff \quad (x - f)^2 + y^2 = e^2(x - d)^2 \\
&\iff \quad x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 - 2e^2d\,x + e^2d^2
\end{aligned}
$$

Ecuación de la elipse y de la hipérbola

La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.
La **hiperbola** corresponde al caso $e > 1$.
Ambos casos corresponden a $e \neq 1$.

Cónica de Foco $F = (f, 0)$ y directriz $x = d$

Para $P = (x, y) \in$ Cónica

$$\begin{aligned} d(P,F) = e\, d(P,D) \quad &\iff \quad (x-f)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2 \\ &\iff \quad x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 - 2e^2d\,x + e^2d^2 \\ &\iff \quad x^2 - e^2x^2 + y^2 = 2f\,x - 2e^2d\,x + e^2d^2 - f^2 \end{aligned}$$

La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.
La **hiperbola** corresponde al caso $e > 1$.
Ambos casos corresponden a $e \neq 1$.

Cónica de Foco $F = (f, 0)$ y directriz $x = d$

Para $P = (x, y) \in$ Cónica

$$
\begin{aligned}
d(P,F) = e\, d(P,D) \quad &\iff \quad (x-f)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2 \\
&\iff \quad x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 - 2e^2d\,x + e^2d^2 \\
&\iff \quad x^2 - e^2x^2 + y^2 = 2f\,x - 2e^2d\,x + e^2d^2 - f^2
\end{aligned}
$$

Caso simple: $f = e^2 d$ deja la ecuación como

La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.
La **hiperbola** corresponde al caso $e > 1$.
Ambos casos corresponden a $e \neq 1$.

Cónica de Foco $F = (f, 0)$ y directriz $x = d$
Para $P = (x, y) \in$ Cónica

$$\begin{aligned}
d(P,F) = e\, d(P,D) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x - f)^2 + y^2 = e^2(x - d)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 - 2e^2d\,x + e^2d^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 - e^2x^2 + y^2 = 2f\,x - 2e^2d\,x + e^2d^2 - f^2
\end{aligned}$$

Caso simple: $f = e^2d$ deja la ecuación como

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = e^2d^2(1 - e^2)$$

La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.
La **hiperbola** corresponde al caso $e > 1$.
Ambos casos corresponden a $e \neq 1$.

Cónica de Foco $F = (f, 0)$ y directriz $x = d$
Para $P = (x, y) \in$ Cónica

$$
\begin{aligned}
d(P,F) = e\, d(P,D) \quad &\iff \quad (x-f)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2 \\
&\iff \quad x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 - 2e^2d\,x + e^2d^2 \\
&\iff \quad x^2 - e^2x^2 + y^2 = 2f\,x - 2e^2d\,x + e^2d^2 - f^2
\end{aligned}
$$

Caso simple: $f = e^2d$ deja la ecuación como

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = e^2d^2(1-e^2)$$

OBS: ¿Que pasa si reemplazamos f por $-f$ y d por $-d$?

Ecuación de la elipse y de la hipérbola

La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.
La **hiperbola** corresponde al caso $e > 1$.
Ambos casos corresponden a $e \neq 1$.

Cónica de Foco $F = (f, 0)$ y directriz $x = d$

Para $P = (x, y) \in$ Cónica

$$\begin{aligned} d(P,F) = e\, d(P,D) \quad &\iff \quad (x-f)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2 \\ &\iff \quad x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 - 2e^2d\,x + e^2d^2 \\ &\iff \quad x^2 - e^2x^2 + y^2 = 2f\,x - 2e^2d\,x + e^2d^2 - f^2 \end{aligned}$$

Caso simple: $f = e^2 d$ deja la ecuación como

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = e^2d^2(1-e^2)$$

OBS: ¿Que pasa si reemplazamos f por $-f$ y d por $-d$? **¡NADA!**

Ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{e^2d^2} + \frac{y^2}{e^2d^2(1-e^2)} = 1.$$

Si $e < 1$ podemos definir $a = ed$ y $b = ed\sqrt{1-e^2}$.

Ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{e^2d^2} + \frac{y^2}{e^2d^2(1-e^2)} = 1.$$

Si $e < 1$ podemos definir $a = ed$ y $b = ed\sqrt{1-e^2}$.

Ecuación general de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con}\, a > b.$$

Ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{e^2d^2} + \frac{y^2}{e^2d^2(1-e^2)} = 1.$$

Si $e < 1$ podemos definir $a = ed$ y $b = ed\sqrt{1-e^2}$.

Ecuación general de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a > b.$$

Elementos de la elipse:

Excentricidad:	$e =$
Foco:	$F =$
Directriz:	D :

Ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{e^2d^2} + \frac{y^2}{e^2d^2(1-e^2)} = 1.$$

Si $e < 1$ podemos definir $a = ed$ y $b = ed\sqrt{1-e^2}$.

Ecuación general de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a > b.$$

Elementos de la elipse:

Excentricidad:	$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
Foco:	$F = (ae, 0)$
Directriz:	$D : x = \frac{a}{e}$

Ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{e^2d^2} - \frac{y^2}{e^2d^2(e^2-1)} = 1.$$

Si $e > 1$ podemos definir $a = ed$ y $b = ed\sqrt{e^2-1}$.

Ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{e^2d^2} - \frac{y^2}{e^2d^2(e^2-1)} = 1.$$

Si $e > 1$ podemos definir $a = ed$ y $b = ed\sqrt{e^2-1}$.

Ecuación general de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Gráfico de la elipse

1. En la ecuación aparecen x^2 e y^2, luego es una figura doblemente simétrica con respecto a los ejes.
   Basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

1. En la ecuación aparecen x^2 e y^2, luego es una figura doblemente simétrica con respecto a los ejes.
   Basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

2. En el primer cuadrante:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

   De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \leq a$.

Gráfico de la elipse

1. En la ecuación aparecen x^2 e y^2, luego es una figura doblemente simétrica con respecto a los ejes.
   Basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

2. En el primer cuadrante:

   $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

   De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \leq a$.

3. También en el primer cuadrante:

   $$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

   De aquí vemos que y está entre $y = 0$ e $y = b$.

Gráfico de la elipse

El gráfico será:

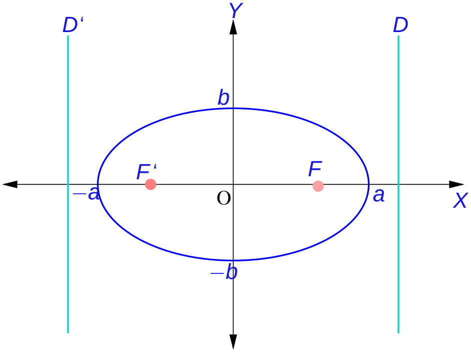


Figure: Gráfico de la elipse.

El gráfico será:

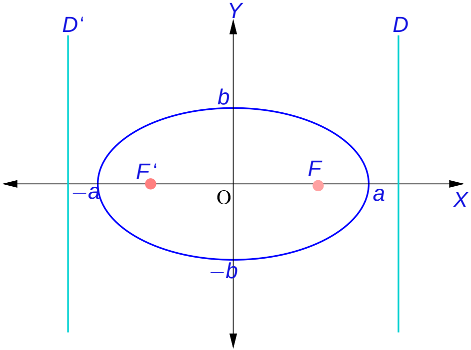
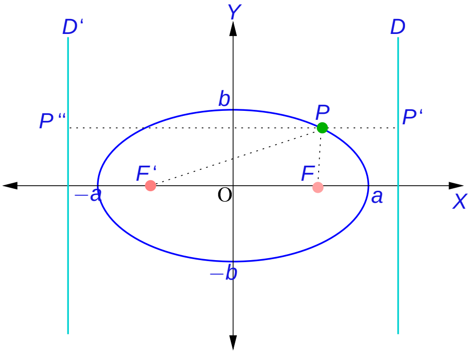


Figure: Gráfico de la elipse.

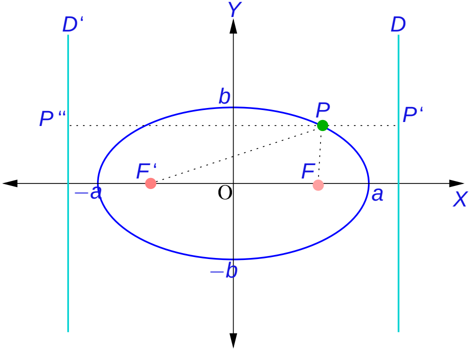
Propiedad importante

P punto cualquiera de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, P' y P'' proyecciones de P sobre las directrices.



Propiedad importante

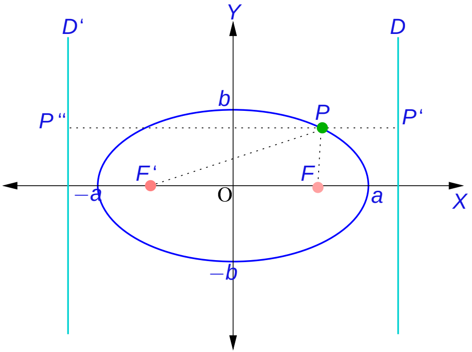
P punto cualquiera de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, P' y P'' proyecciones de P sobre las directrices.



Se tiene que

$$PF = ePP' \text{ y } PF' = ePP''.$$

P punto cualquiera de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, P' y P'' proyecciones de P sobre las directrices.



Se tiene que

$$PF = ePP' \text{ y } PF' = ePP''.$$

luego

$$PF + PF' = 2a.$$

Gráfico de la hipérbola

1. Como en la ecuación aparecen x^2 e y^2, la figura es doblemente simétrica con respecto a los ejes.
   Basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

Gráfico de la hipérbola

1. Como en la ecuación aparecen x^2 e y^2, la figura es doblemente simétrica con respecto a los ejes.
   Basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

2. En el primer cuadrante: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.
   De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \geq a$.

Gráfico de la hipérbola

1. Como en la ecuación aparecen x^2 e y^2, la figura es doblemente simétrica con respecto a los ejes.
   Basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

2. En el primer cuadrante: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.
   De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \geq a$.

3. En el primer cuadrante, $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$. y puede tomar cualquier valor.

Gráfico de la hipérbola

1. Como en la ecuación aparecen x^2 e y^2, la figura es doblemente simétrica con respecto a los ejes.
   Basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

2. En el primer cuadrante: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.
   De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \geq a$.

3. En el primer cuadrante, $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$. y puede tomar cualquier valor.

4. Si x toma valores muy grandes podemos hacer la siguiente aproximación:
$$y = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - (\frac{a}{x})^2} \sim \frac{b}{a}x$$

Gráfico de la hipérbola

1. Como en la ecuación aparecen x^2 e y^2, la figura es doblemente simétrica con respecto a los ejes.
   Basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

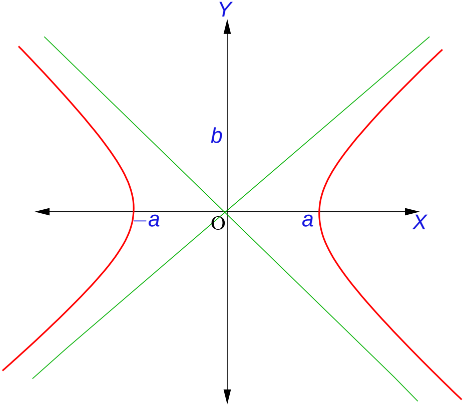
2. En el primer cuadrante: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.
   De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \geq a$.

3. En el primer cuadrante, $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$. y puede tomar cualquier valor.

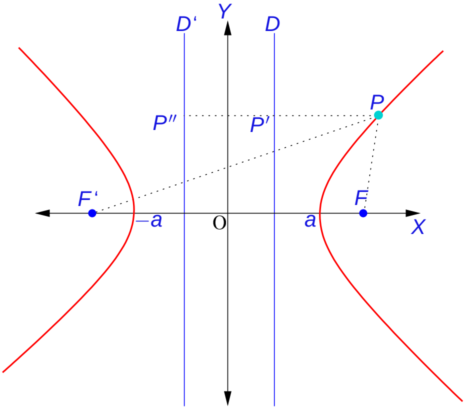
4. Si x toma valores muy grandes podemos hacer la siguiente aproximación:
   $$y = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - (\frac{a}{x})^2} \sim \frac{b}{a}x$$
   Se aproxima a la recta $y = \frac{b}{a}x$, llamada asíntota.

Gráfico de la hipérbola

El grafico será:

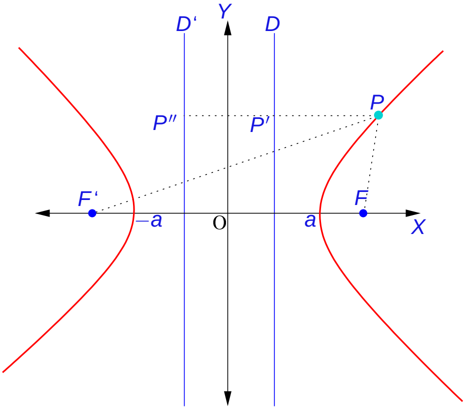


Sea P un punto cualquiera de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices.



Propiedad importante

Sea P un punto cualquiera de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices.

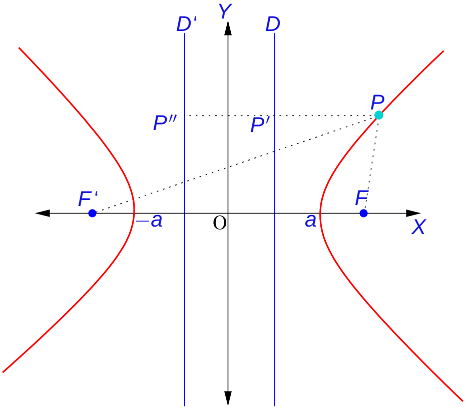


Entonces

$$PF = ePP' \text{ y } PF' = ePP''$$

Propiedad importante

Sea P un punto cualquiera de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices.



Entonces

$$PF = ePP' \text{ y } PF' = ePP''$$

es decir

$$PF - PF' = 2a.$$

Dada la cónica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ y el punto $P(x_0, y_0)$ de ella, determinemos la ecuación de la recta tangente por P.

Dada la cónica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ y el punto $P(x_0, y_0)$ de ella, determinemos la ecuación de la recta tangente por P.

Usando que P está en la cónica, se tiene que:
$Ax_0^2 + By_0^2 + Cx_0 + Dy_0 + E = 0.$

Dada la cónica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ y el punto $P(x_0, y_0)$ de ella, determinemos la ecuación de la recta tangente por P.

Usando que P está en la cónica, se tiene que: $Ax_0^2 + By_0^2 + Cx_0 + Dy_0 + E = 0$. Usando este dato, la ecuación de la cónica se puede reescribir como

Dada la cónica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ y el punto $P(x_0, y_0)$ de ella, determinemos la ecuación de la recta tangente por P.

Usando que P está en la cónica, se tiene que:
$Ax_0^2 + By_0^2 + Cx_0 + Dy_0 + E = 0$. Usando este dato, la ecuación de la cónica se puede reescribir como

$$A(x + x_0)(x - x_0) + B(y + y_0)(y - y_0) + C(x - x_0) + D(y - y_0) = 0$$

Dada la cónica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ y el punto $P(x_0, y_0)$ de ella, determinemos la ecuación de la recta tangente por P.

Usando que P está en la cónica, se tiene que:
$Ax_0^2 + By_0^2 + Cx_0 + Dy_0 + E = 0$. Usando este dato, la ecuación de la cónica se puede reescribir como

$$A(x + x_0)(x - x_0) + B(y + y_0)(y - y_0) + C(x - x_0) + D(y - y_0) = 0$$

La ecuación de la recta tangente (de no ser vertical) será de la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde $m =?$ debe ser tal que la recta resulte tangente ("toca" en un solo punto la cónica).

Dada la cónica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ y el punto $P(x_0, y_0)$ de ella, determinemos la ecuación de la recta tangente por P.

Usando que P está en la cónica, se tiene que:
$Ax_0^2 + By_0^2 + Cx_0 + Dy_0 + E = 0$. Usando este dato, la ecuación de la cónica se puede reescribir como

$$A(x + x_0)(x - x_0) + B(y + y_0)(y - y_0) + C(x - x_0) + D(y - y_0) = 0$$

La ecuación de la recta tangente (de no ser vertical) será de la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde $m = ?$ debe ser tal que la recta resulte tangente ("toca" en un solo punto la cónica).

Al intersectar la recta con la cónica se obtiene la ecuación

$$\Big[A(x + x_0) + Bm(y + y_0) + C + Dm\Big](x - x_0) = 0$$

Al intersectar la recta con la cónica se obtiene la ecuación

$$\Big[A(x+x_0)+Bm(y+y_0)+C+Dm\Big](x-x_0)=0$$

Al intersectar la recta con la cónica se obtiene la ecuación

$$\Big[A(x+x_0)+Bm(y+y_0)+C+Dm\Big](x-x_0)=0$$

De esta ecuación "cuadrática" se obtienen las dos intersecciones.

Al intersectar la recta con la cónica se obtiene la ecuación

$$\Big[A(x+x_0)+Bm(y+y_0)+C+Dm\Big](x-x_0)=0$$

De esta ecuación "cuadrática" se obtienen las dos intersecciones.

La recta es tangente ssi las dos intersecciones son el mismo punto $P(x_0,y_0)$

Al intersectar la recta con la cónica se obtiene la ecuación

$$\Big[A(x+x_0)+Bm(y+y_0)+C+Dm\Big](x-x_0)=0$$

De esta ecuación "cuadrática" se obtienen las dos intersecciones.

La recta es tangente ssi las dos intersecciones son el mismo punto $P(x_0, y_0)$

Es decir: $\Big[2Ax_0+2Bmy_0+C+Dm\Big]=0$

Al intersectar la recta con la cónica se obtiene la ecuación

$$\Big[A(x+x_0)+Bm(y+y_0)+C+Dm\Big](x-x_0)=0$$

De esta ecuación "cuadrática" se obtienen las dos intersecciones.

La recta es tangente ssi las dos intersecciones son el mismo punto $P(x_0,y_0)$

Es decir: $\Big[2Ax_0+2Bmy_0+C+Dm\Big]=0$

O sea

$$m=-\frac{2Ax_0+C}{2By_0+D}$$

Al intersectar la recta con la cónica se obtiene la ecuación

$$\Big[A(x+x_0)+Bm(y+y_0)+C+Dm\Big](x-x_0)=0$$

De esta ecuación "cuadrática" se obtienen las dos intersecciones.

La recta es tangente ssi las dos intersecciones son el mismo punto $P(x_0,y_0)$

Es decir: $\Big[2Ax_0+2Bmy_0+C+Dm\Big]=0$

O sea

$$m=-\frac{2Ax_0+C}{2By_0+D}$$

Usando esta pendiente, la ecuación de la recta queda

$$(y-y_0)(2By_0+D)+(x-x_0)(2Ax_0+C)=0$$

Al intersectar la recta con la cónica se obtiene la ecuación

$$\Big[A(x+x_0)+Bm(y+y_0)+C+Dm\Big](x-x_0)=0$$

De esta ecuación "cuadrática" se obtienen las dos intersecciones.

La recta es tangente ssi las dos intersecciones son el mismo punto $P(x_0,y_0)$

Es decir: $\Big[2Ax_0+2Bmy_0+C+Dm\Big]=0$

O sea

$$m=-\frac{2Ax_0+C}{2By_0+D}$$

Usando esta pendiente, la ecuación de la recta queda

$$(y-y_0)(2By_0+D)+(x-x_0)(2Ax_0+C)=0$$

$$2Ax_0x - 2Ax_0^2 + 2By_0y - 2By_0^2 + Cx - Cx_0 + Dy - Dy_0 = 0$$

$$2Ax_0x - 2Ax_0^2 + 2By_0y - 2By_0^2 + Cx - Cx_0 + Dy - Dy_0 = 0$$

Se puede escribir como

$$Ax_0x - Ax_0^2 + By_0y - By_0^2 + C\frac{x}{2} - C\frac{x_0}{2} + D\frac{y}{2} - D\frac{y_0}{2} = 0.$$

$$2Ax_0x - 2Ax_0^2 + 2By_0y - 2By_0^2 + Cx - Cx_0 + Dy - Dy_0 = 0$$

Se puede escribir como

$$Ax_0x - Ax_0^2 + By_0y - By_0^2 + C\frac{x}{2} - C\frac{x_0}{2} + D\frac{y}{2} - D\frac{y_0}{2} = 0.$$

y sumando $0 = Ax_0^2 + By_0^2 + Cx_0 + Dy_0 + E$

$$2Ax_0x - 2Ax_0^2 + 2By_0y - 2By_0^2 + Cx - Cx_0 + Dy - Dy_0 = 0$$

Se puede escribir como

$$Ax_0x - Ax_0^2 + By_0y - By_0^2 + C\frac{x}{2} - C\frac{x_0}{2} + D\frac{y}{2} - D\frac{y_0}{2} = 0.$$

y sumando $0 = Ax_0^2 + By_0^2 + Cx_0 + Dy_0 + E$

obtenemos la expresión de la tangente llamada "LA DESDOBLADA"

$$Ax_0x + By_0y + C\frac{x + x_0}{2} + D\frac{y + y_0}{2} + E = 0.$$

Ejemplos

Para el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ la recta tangente es $x_0x + y_0y = r^2$
Para la parábola $y^2 = 4px$ la recta tangente es $y_0 \cdot y = 2p(x + x_0)$

Ejemplos

Para el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ la recta tangente es $x_0 x + y_0 y = r^2$
Para la parábola $y^2 = 4px$ la recta tangente es $y_0 \cdot y = 2p(x + x_0)$

Con esto se puede deducir la propiedad más usada de la parábola en las actuales "ANTENAS PARABÓLICAS":

Ejemplos

Para el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ la recta tangente es $x_0x + y_0y = r^2$
Para la parábola $y^2 = 4px$ la recta tangente es $y_0 \cdot y = 2p(x + x_0)$

Con esto se puede deducir la propiedad más usada de la parábola en las actuales "ANTENAS PARABÓLICAS":

Los rayos de luz paralelos al eje de simetría, cuando se reflejan en la parábola, pasan por el foco.

Ejemplos

Para el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ la recta tangente es $x_0 x + y_0 y = r^2$
Para la parábola $y^2 = 4px$ la recta tangente es $y_0 \cdot y = 2p(x + x_0)$

Con esto se puede deducir la propiedad más usada de la parábola en las actuales "ANTENAS PARABÓLICAS":

Los rayos de luz paralelos al eje de simetría, cuando se reflejan en la parábola, pasan por el foco.

Para la demostración, ver pizarra.....