P1) p, q, r proposiciones.
Probar sin tablas de V que es una tautología

$$[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)]\Rightarrow[(p\wedge r)\Rightarrow(q\wedge s)]$$

SOL:

$$\Leftrightarrow \overline{[(\bar p\vee q)\wedge(\bar r\vee s)]}\vee[\overline{(p\wedge r)}\vee(q\wedge s)]$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\bar q)\vee(r\wedge\bar s)\vee[\bar p\wedge r\vee(q\wedge s)]$$

$$\Leftrightarrow [(p\vee\bar p)\wedge(\bar q\vee\bar p)]\vee\underbrace{(r\wedge\bar s)\vee\bar r}\vee(q\wedge s)$$

$$\Leftrightarrow (\bar q\vee\bar p)\vee\underbrace{(\bar r\vee\bar s)}\vee(q\wedge s)$$

$$\Leftrightarrow \bar p\vee\bar r\vee\overline{(\bar q\wedge s)}\vee(q\wedge s)$$

$$\Leftrightarrow \bar p\vee\bar r\vee V$$

$$\Leftrightarrow V$$

■

P2) Probar que para todo A, B, C conjuntos, se tiene

(a.1)

$$A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow C = B$$

(a.2)

$$A\Delta B = C \Rightarrow B = A\Delta C$$

SOL:

(a.1)

hip: $A\Delta B = A\Delta C$ / $A\Delta(\ )$

$$\Rightarrow A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C) \quad /\text{Asoc.}$$

$$\Rightarrow (A\Delta A)\Delta B = (A\Delta A)\Delta C$$

$$\Rightarrow \phi\,\Delta B = \phi\,\Delta C$$

$\Rightarrow \quad B = C$

$\blacksquare$

(a.2) $\quad A \triangle B = C \quad / A \triangle (\;)$

$\Rightarrow \quad A \triangle (A \triangle B) = A \triangle C \quad /$ ASOC.

$\Rightarrow \quad (A \triangle A) \triangle B = A \triangle C$

$\Rightarrow \quad \phi \triangle B = A \triangle C$

$\Rightarrow \quad B = A \triangle C$

$\blacksquare$

(b) Sea E un conjunto y A un subconjunto de E.
Se define la función

$f : P(E) \rightarrow P(E)$

Como $f(X) = X \triangle A$ para cada $X \subseteq E$
Probar que f es biyectiva y determinar la inversa de f.

SOL:

<u>Iny</u>

Sea $X_1, X_2 \in P(E)$ tq $f(X_1) = f(X_2)$

$f(X_1) = f(X_2)$

$\Rightarrow \quad X_1 \triangle A = X_2 \triangle A \quad /$ conmutatividad

$\Rightarrow \quad A \triangle X_1 = A \triangle X_2 \quad /$ por a.1

$\Rightarrow \quad X_1 = X_2 \; // \qquad \therefore f$ es iny.

SOBR.

Sea $Y \in P(E)$

$f(x) = Y$ → Aparte

$\Rightarrow X \Delta A = Y$

$\Rightarrow A \Delta X = Y$ / por a 2

$\Rightarrow X = A \Delta Y$

Sea $Y \in P(E)$ cualquiera

Tomamos $X = Y \Delta A$. Se tiene que $f(x) = Y$
En efecto,

$$f(X) = X \Delta A$$

$$= (Y \Delta A) \Delta A = Y \Delta (A \Delta A) = Y \Delta \phi$$

$\Rightarrow f(x) = Y$ // $\therefore$ f es sobreyectiva.

$\therefore$ f es biyectiva $\blacksquare$

La inversa de f es

$$f^{-1} : P(E) \longrightarrow P(E)$$

$$f^{-1}(Y) = Y \Delta A$$

[redacted]

En efecto, veamos que $f^{-1} \circ f = id_{P(E)}$

$$
\begin{aligned}
f^{-1} \circ f(X) &= f(X) \triangle A \\
&= (X \triangle A) \triangle A \quad / \text{Asoc} \\
&= X \triangle (A \triangle A) \\
&= X \triangle \phi \\
&= X
\end{aligned}
$$

Como f es biyectiva, hemos probado que f^{-1} efectivamente es la inversa de f ■

P3) Calcule

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 7^k k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} k \cdot 7^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} 7^k \cdot k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!\; 7^k}{(n-k)!\,(k-1)!} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} 7^k \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 7^k
\end{aligned}
$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^{k+1}$$

$$= 7n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^{k} \cdot 1^{n-1-k}$$

$$= 7n (7+1)^{n-1}$$

$$= 7n\, 8^{n-1} \quad \blacksquare$$

P4) Demuestre usando inducción que

$$(2n)! < 2^{2n} (n!)^2 \quad \forall n \geq 1$$

sol: CB ✓

H.I. $(2n)! < 2^{2n} (n!)^2$

p.d.q. $(2(n+1))! < 2^{2(n+1)} ((n+1)!)^2$

$$\begin{aligned}
(2(n+1))! &= (2n+2)! \\
&= (2n!)(2n+1)(2n+2) \\
&< 2^{2n} (n!)^2 (2n+1)(2n+2) \\
&< 2^{2n} (n!)^2 (2n+2)(2n+2) \\
&= 2^{2n} (n!)^2 \cdot 2(n+1)\, 2(n+1)
\end{aligned}$$

$= 2^{2n+2}((n+1)!)^2$

$\therefore \ (2(n+1))! < 2^{2(n+1)}((n+1)!)^2$ $\blacksquare$

P5) $R \subseteq A \times A$

Relaciones de orden $\longrightarrow$ Total $(\forall x, y \in A)\ xRy \lor yRx$

$\longrightarrow$ Parcial $(\exists x, y \in A)\ x \not{R} y \land y \not{R} x$

Relaciones de equivalencia : Si R relación de equivalencia sobre A.

$[a]_R = \{x \in A / xRa\}$

Prop: $[x]_R = [y]_R \iff xRy$.

$\Rightarrow)$ $x \in [x]_R$

$\Rightarrow x \in [y]_R$

$\Rightarrow xRy$

$\Leftarrow)$ $\subseteq)$ Sea $a \in [x]_R$

$\Rightarrow aRx$, Pero ademas xRy

$\Rightarrow aRy$

$\Rightarrow a \in [y]_R$

2) es análoga.

cons cuociente:

$$A/R = \{ [x]_R \ / \ x \in A \}$$

P5) Sea $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 2$. Se define en

$\mathbb{Q}^+ = \{ q \in \mathbb{Q} \ / \ q > 0 \}$ la relación Ω_p por

$$x \, \Omega_p \, y \iff \exists \alpha \in \mathbb{Z}, \ \frac{x}{y} = p^{\alpha}.$$

(a) Demostrar que Ω_p es relacion de equivalencia en $\mathbb{Q}^+$

(b) Describa por extensión $[1]_{\Omega_2}$

SOL:

(a) Refleja:

Sea $x \in \mathbb{Q}^+$ $\frac{x}{x} = 1$ Luego, tomando $\alpha = 0$

$$\frac{x}{x} = p^{\alpha} \quad \therefore \quad x \, \Omega_p \, x$$

Simétrica:

Sean $x, y \in \mathbb{Q}^+$, tq $x \, \Omega_p \, y$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} = p^{\alpha} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = p^{-\alpha} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \quad y \, \Omega_p \, x$$

TRANSITIVIDAD:

Sean $x, y, z \in \mathbb{Q}$ tq $x \,\Omega_p\, y \wedge y \,\Omega_p\, z$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = p^{\alpha_1} \wedge \frac{y}{z} = p^{\alpha_2}, \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{z} = p^{\alpha_1 + \alpha_2}, \text{ con } \alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{Z}, \text{ por clausura}$$

$\therefore x \,\Omega_p\, z$

Luego Ω_p es de equivalencia $\blacksquare$

(b)

$$[1]_{\Omega_2} = \{x \in \mathbb{Q}^+ \,/\, x \,\Omega_2\, 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Q}^+ \,/\, \frac{x}{1} = 2^{\alpha}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Q}^+ \,/\, x = 2^{\alpha}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$$

[redacted]

P6 Sea E un conjunto y $A \neq \phi$ un subconjunto fijo de E. Se define en $P(E)$ la relación R por

$$X \mathcal{R} Y \iff A \cap X = A \cap Y$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia

(b) Demuestre que el conjunto $P(E)/R = \{[X]_R \,/\, X \in P(A)\}$

(c) Demuestre que $X, Y \in P(A)$ se tiene que $X \neq Y \Rightarrow [X] \neq [Y]$

<u>Sol:</u>

(a) <u>**Refleja:**</u>

Sea $X \in P(E)$

$A \cap X = A \cap X$ siempre $\Longrightarrow X = X$

<u>Simétrica:</u>

Sean $X, Y \in P(E)$ tq $X R Y$

$\Longrightarrow A \cap X = A \cap Y$

$\Longrightarrow A \cap Y = A \cap X$

$\Longrightarrow Y R X$

<u>Transitividad:</u>

Sean $X, Y, Z \in P(E)$ tq $X R Y \wedge Y R Z$

$\Longrightarrow A \cap X = A \cap Y \wedge A \cap Y = A \cap Z$

$\Longrightarrow \; A \cap X = A \cap Z$

$\Longrightarrow \; X \mathcal{R} Z$

$\blacksquare$

(b) $P(E)/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} \,/\, x \in P(A)\}$

$\forall\, x \in P(E),\ \exists\, x \in P(A)$ tq $\underbrace{[X] = [X']}_{X \mathcal{R} X'}$

Sea $X \in P(E)$ Debemos encontrar $X' \in P(A)$ tq $X \mathcal{R} X'$

Es decir, $A \cap X = A \cap X'$

Tomemos $X' = A \cap X$, claramente se cumple que

$X \subseteq A \Rightarrow X' \in P(A)$

Además $X \mathcal{R} X' \Longleftrightarrow A \cap X = A \cap X'$

$\Longleftrightarrow A \cap X = A \cap (A \cap X)$

$\Longleftrightarrow V$

$\blacksquare$

(c) Si $X, Y \in P(A)$ tq $X \neq Y \Rightarrow [X] \neq [Y]$

POR CONTRARECIPROCA $\underbrace{[X] = [Y]}_{hip} \Longrightarrow X = Y$

Si $[X] = [Y]$ / prop de clases de equivalencia

$\Longrightarrow X \mathcal{R} Y$

$\Longrightarrow A \cap X = A \cap Y$

$\Longrightarrow X = Y$ $\blacksquare$

P7 Considere el conjunto

$$C = \{ \ldots, -16, -9, -4, -1, 1, 4, 9, 16, \ldots \}$$

Pruebe que C es numerable.

Sol: Evidentemente $C \subseteq \mathbb{Z}$

Y claramente C es infinito, pues hay infinitos cuadrados perfectos. Como $\mathbb{Z}$ es numerable $\Rightarrow$ C es numerable.

$f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow C$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

P8 Sea $E\{(a_1, \ldots, a_2) \in \{-1, 1\}^n / n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}$

Demostrar que:
(a) E es infinito.
(b) E es numerable

Sol: (a) E es infinito

$(-1, 1) \in E$
$(-1, -1, 1, 1) \in E$
$(-1, -1, -1, 1, 1, 1) \in E$

y en general

$$(\underbrace{-1, -1, -1, \ldots, -1}_{n \text{ veces}}, \underbrace{1, \ldots, 1, 1, 1}_{n \text{ veces}}) \in E$$

Luego E es infinito

Otra forma de solucionarlo

$f: \mathbb{N} \longrightarrow E$

$f(n) = (\underbrace{-1, -1, \ldots -1}_{n \text{ veces}}, \underbrace{1, \ldots, 1, 1}_{n \text{ veces}})$

claramente es inyectiva

$\therefore |\mathbb{N}| \leq |E| \Rightarrow$ E es infinito

(b) $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}$

$\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}$ es numerable por ser producto de numerable

Luego $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}^n$ es numerable

$\therefore$ Como E es infinito, y es subconjunto de un conjunto numerable $\Rightarrow$ E es numerable