Auxiliar Extra: Introducción al Álgebra

Preparación Control 6

Auxiliar: Orlando Rivera Letelier
Martes 09 de Junio de 2009

P1. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo (no necesariamente con unidad). Para $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$ se define:

$$na = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ veces}} \text{ si } n > 0, \quad 0a = 0_A \in A \text{ si } n = 0$$

$$\text{y} \quad na = \underbrace{(-a) + (-a) + \ldots + (-a)}_{-n \text{ veces}} \text{ si } n < 0$$

Considere en $\mathbb{Z} \times A$ las leyes suma y producto definidas por:
Suma: $(n, a) \oplus (m, b) = (n + m, a + b)$
Producto: $(n, a) \odot (m, b) = (nm, nb + ma + ab)$

i) Demuestre que $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ es un anillo con unidad.

ii) Demuestre que las funciones

$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \to & \mathbb{Z} \times A \\ a & \mapsto & f(a) = (0, a) \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \times A \\ n & \mapsto & g(n) = (n, 0_A) \end{array}$$

son homomorfismos inyectivos de los anillos $(A, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ en el anillo $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ respectivamente.

iii) Considere en lugar de $(A, +, \cdot)$ el cuerpo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Muestre que el anillo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ tiene divisores del cero.
¿Es $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ un cuerpo?

P2. Los complejos $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_p$ son tales que $|z_i| = 1,\ \forall i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ p\}$. Demuestre que si

$$\sum_{i=1}^{p} z_i = a \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i} = a.$$

P3. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{1 + z^n} + \frac{1}{1 + \overline{z}^n} \in \mathbb{R}$$

P4. Sea $m \in \mathbb{N}$. Escriba $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ en forma polar y pruebe que

$$6|m \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2.$$