Introducción al Algebra

Profesor Cátedra	:	Felipe Célèry
Profesores Auxiliares	:	Victor Carmi
	:	César Vigouroux

Ejercicios
21 de Mayo 2009

1. Sea $\mu : P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ t. q.:

$$\mu(A) = \#A$$

   a) Pruebe que μ no es inyectiva y que si es epiyectiva.
   b) Pruebe que $|P(\mathbb{N})| \geq |\mathbb{N}|$ usando lo anterior.
   c) Pruebe que $\mu(A) - \mu(B) = 0 \Rightarrow A = B$ es falso.
   d) Pruebe que $\mu(A \triangle B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

2. Recordemos $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\equiv_p = \{[0]_p, [1]_p, ..., [p-1]_p\}$

   a) Considere $\mathbb{Z}_7$ con las relaciones de equivalencia $\equiv_2$ y $\equiv_3$. Pruebe que ambas relaciones generan una única clase de equivalencia.
   b) Considere $\mathbb{Z}_6$ y encuentre las clases de equivalencia generadas por las relaciones $\equiv_2$ y $\equiv_3$.
   c) Ahora probaremos que en $\mathbb{Z}_p$ si p es primo y $1 \leq k \leq p-1$, $\equiv_k$ genera una única partición.
      1) Notemos que $[0]_p$ es un elemento de $\mathbb{Z}_p$ y que $[[0]_p]_k$ es la clase de equivalencia de $[0]_p$ con la relación $\equiv_k$. Pruebe que $[[0]_p]_k$ es subgrupo de $\mathbb{Z}_p$.
         Notar que $\mathbb{Z}_p$ es isomorfo a $\{0, 1, 2, ..., p-1\}$ con la suma módulo p, $+_p$, puede ayudar a alivianar la notación, porque en ese caso lo que hay que probar es que $[0]_k$ es subgrupo de $\mathbb{Z}_p$ usando siempre que la suma natural es $+_p$.
      2) Pruebe que $[[0]_p]_k$ contiene al menos dos elementos.
      3) Pruebe por teorema de Lagrange que $[[0]_p]_k = \mathbb{Z}_p$