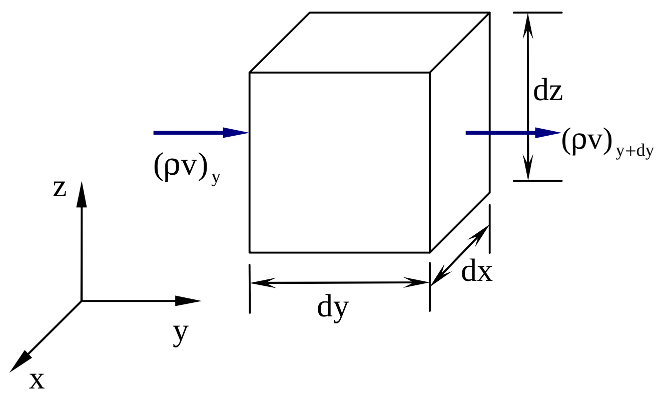
4.8 Enfoque diferencial de la ecuación de continuidad

Apliquemos el teorema del transporte de Reynolds a un elemento de volumen dV:



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_C}\rho dV+\int_S \rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS=0 \qquad (1)$$

$$V_C = dxdydz$$

$$\int_S \rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS=\int_{S_x}\rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS+\int_{S_y}\rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS+\int_{S_z}\rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS$$

Analicemos el flujo en la dirección y:

$$\int_{S_y}\rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS=-(\rho v)_y\,dxdz+(\rho v)_{y+dy}\,dxdz$$

Expandiendo en series de Taylor: $(\rho v)_{y+dy}=(\rho v)_y+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy+\ldots$

Luego:

$$\int_{S_y}\rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS=\frac{\partial\rho v}{\partial y}dxdz \qquad (2)$$

Del mismo modo:

$$\int_{Sx} \rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS = \frac{\partial \rho u}{\partial x}dydz \tag{3}$$

$$\int_{Sz} \rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS = \frac{\partial \rho w}{\partial x}dxdy \tag{4}$$

Reemplazando (2), (3) y (4) en la Ec. 1:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho dxdydz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dxdydz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dxdydz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)dxdydz = 0$$

resultando:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

La ecuación anterior puede escribirse en forma vectorial como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \tag{6}$$

Sabemos que $\nabla\cdot(a\vec{b}) = a\nabla\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\nabla a$, por lo que la Ec. 6 puede escribirse como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

o sea, en términos de la derivada total o sustancial de la densidad:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0 \tag{7}$$

Si el flujo es permanente, la Ec. 6 se reduce a

$$\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \tag{8}$$

Si el fluido tiene una densidad constante:

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \tag{9}$$