FI1002 Sistemas Newtonianos

Judit Lisoni

Sección 6

Unidad 1 Métodos numéricos

Contenidos

1. Discretización de una función
    - ¿cómo se “discretiza” una función?

2. Discretización temporal
    - ¿cómo se “discretiza” una función que depende del tiempo?
    - ¿cómo encuentro un valor?
    - Derivadas
    - Solución de la ecuación de Newton: método de Verlet
3. Matlab

Discretización de una función

Fenómenos físicos

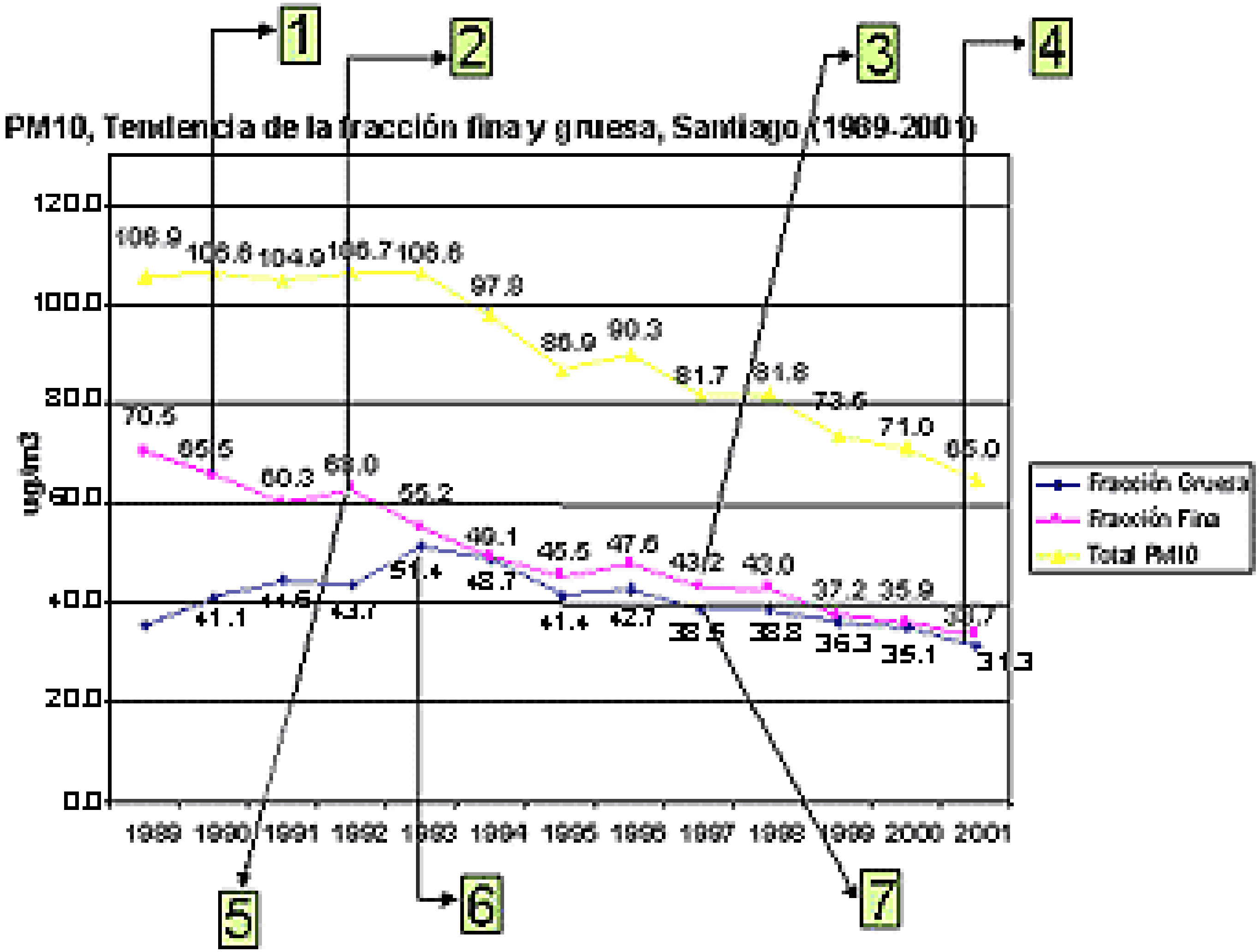
Observación discreta de variables
Distancia, temperatura, foto…

Modelo

función continua

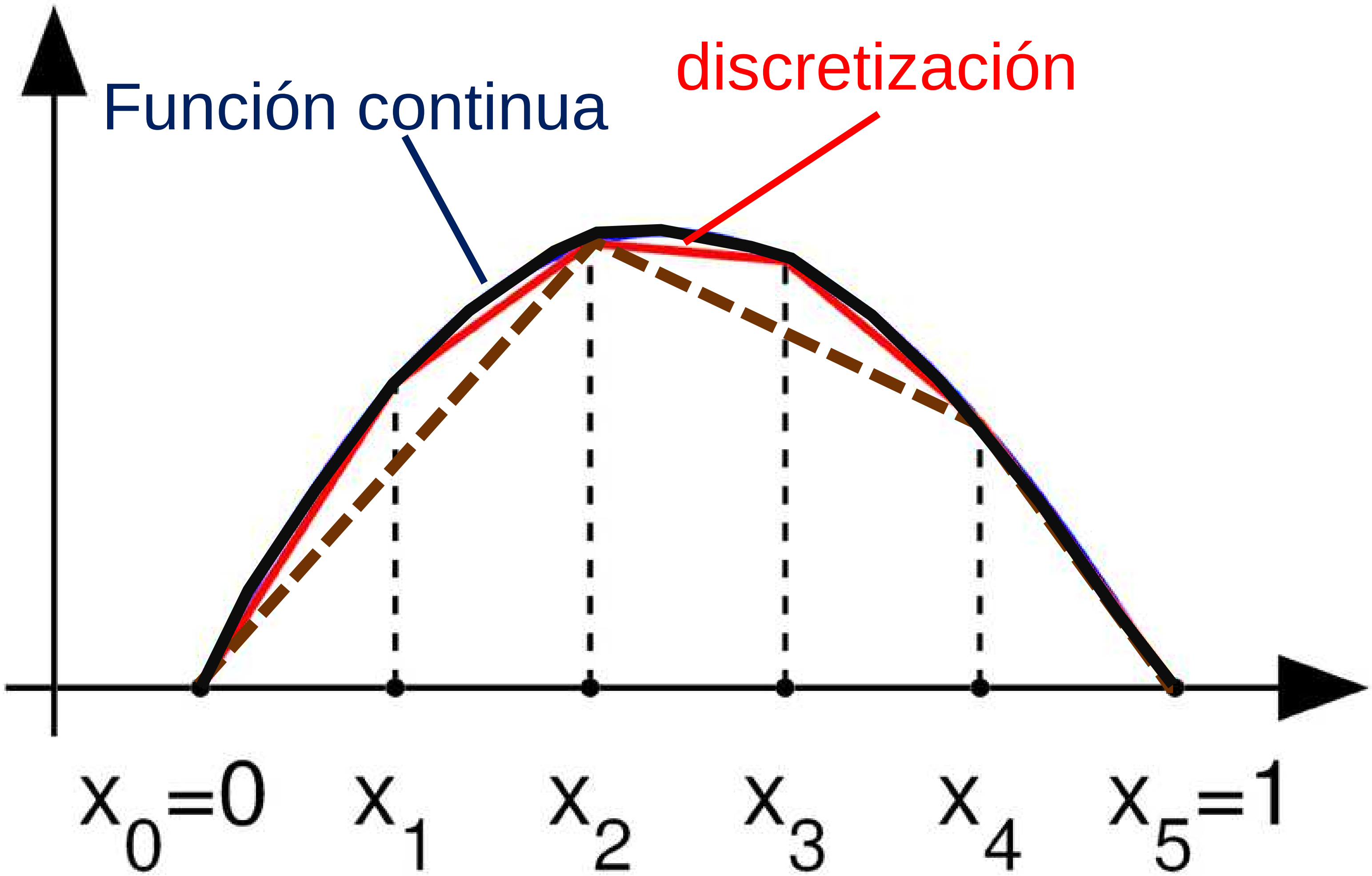
Ejemplo

Calidad del aire en Santiago y su evolución



http://www.cleanairnet.org/lac/1471/article-40859.html

¿cómo se "discretiza" una función?



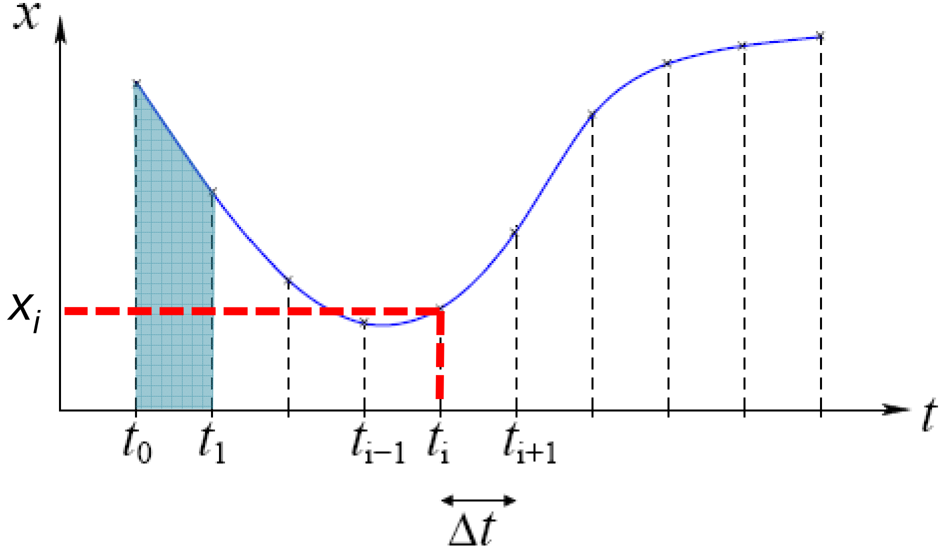
Discretización temporal

Posición x= x(t) y es función continua

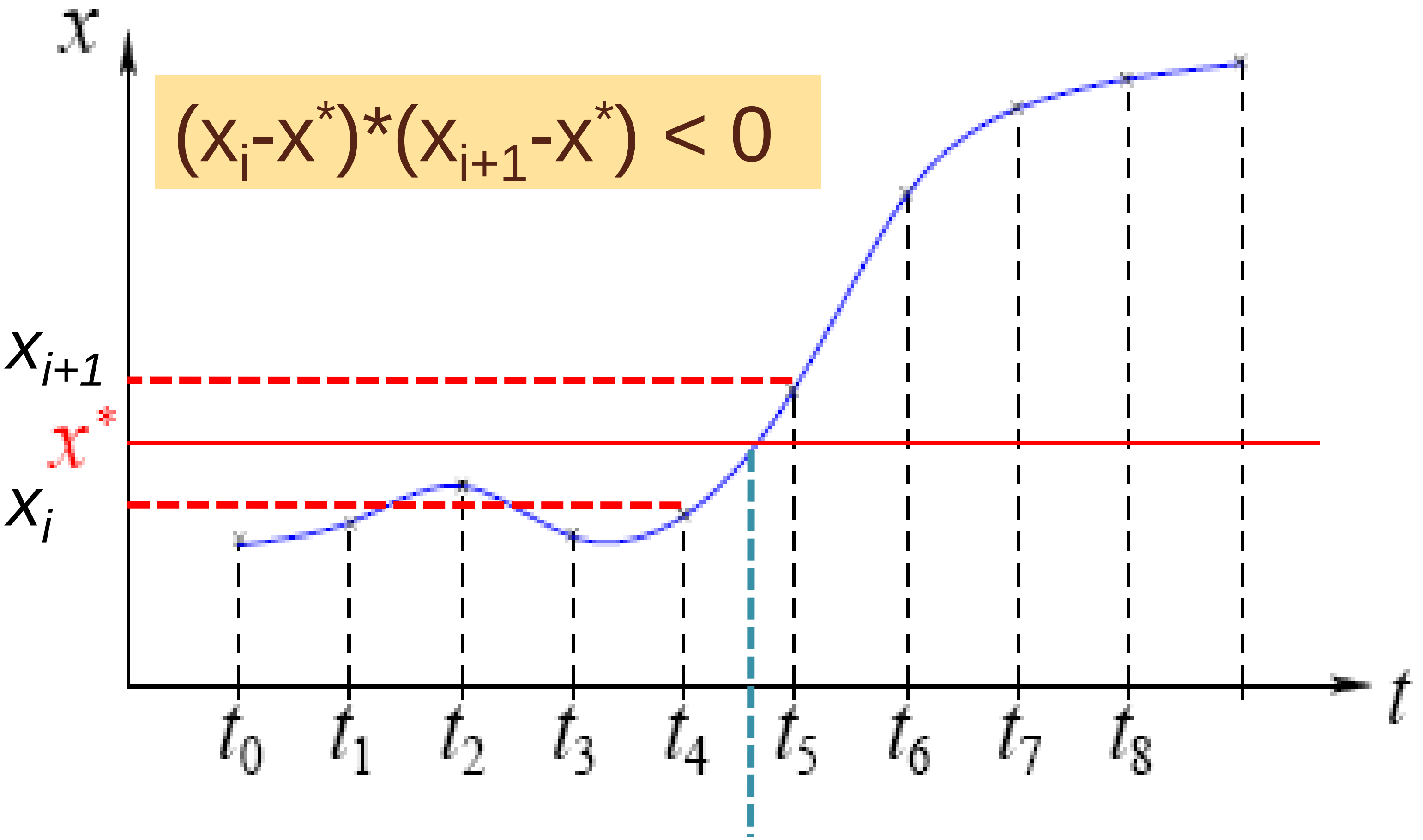
$t \approx t_0 \rightarrow x(t) \approx x(t_0)$

$t_i = t_0 + i^*\Delta t \quad i=0,1,2\ldots$

$x_i = x(t_i)$



¿cómo encuentro un valor?



$t^* \sim t_i$ o $\sim t_{i+1}$

$t^* \sim t_i + \Delta t/2$ o $t_{i+1} - \Delta t/2$ o $(t_i + t_{i+1})/2$

Derivadas

Las leyes de Newton: Fuerzas

$$F(x,\dot{x}) = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$$

$$posición: x$$

$$velocidad: \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$aceleración: \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$$

Derivadas

Las leyes de Newton: Fuerzas

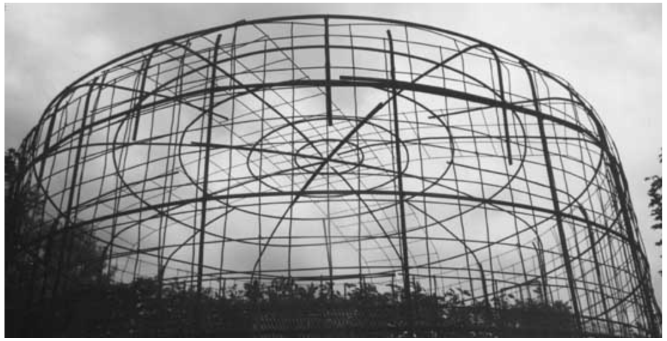
$$F = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$$

$$F(x,\dot{x}) = m\ddot{x} \Rightarrow complicado$$

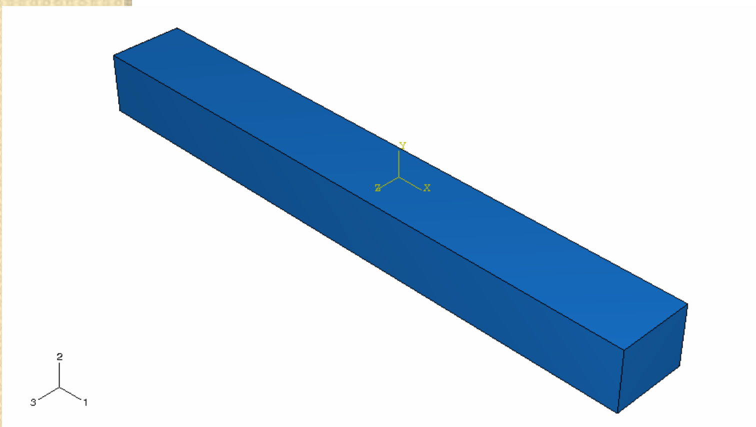
Herramientas numéricas: discretización del problema

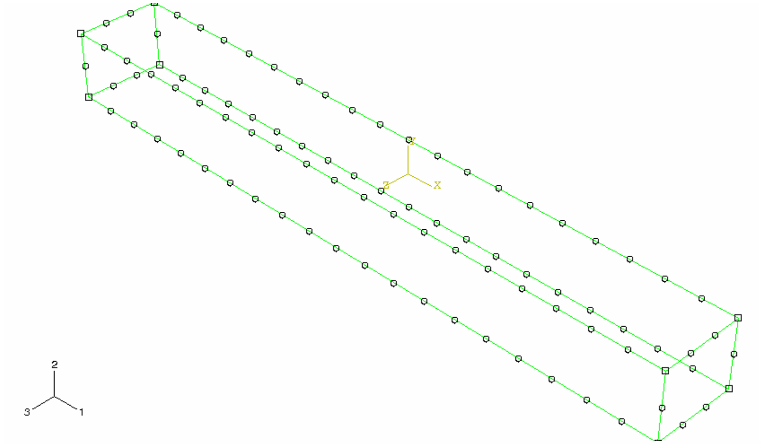
Derivadas: Discretización temporal

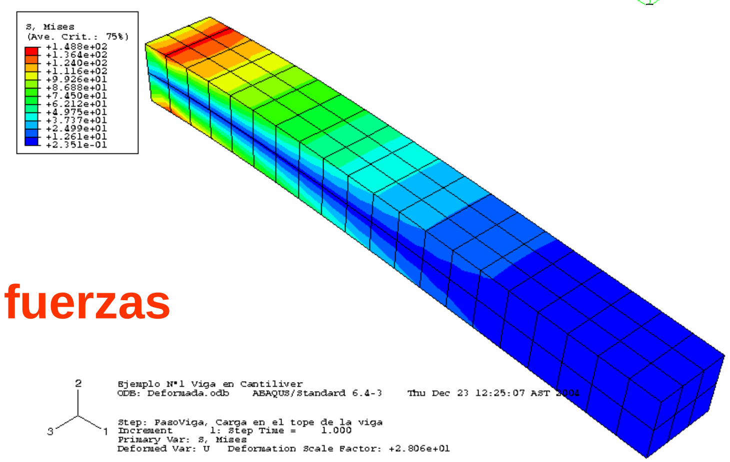
Ejemplo



Deformación de una barra







Escala de colores = escala de esfuerzos → fuerzas

EJEMPLOS USANDO LOS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS: ABAQUS Y PORTAL DE PORTICOS, Maylett Y. Uzcátegui Flores
http://www.cecalc.ula.ve/documentacion/tutoriales/abaqus/ejemplos_ABAQUS.pdf

Derivadas

Derivada hacia adelante

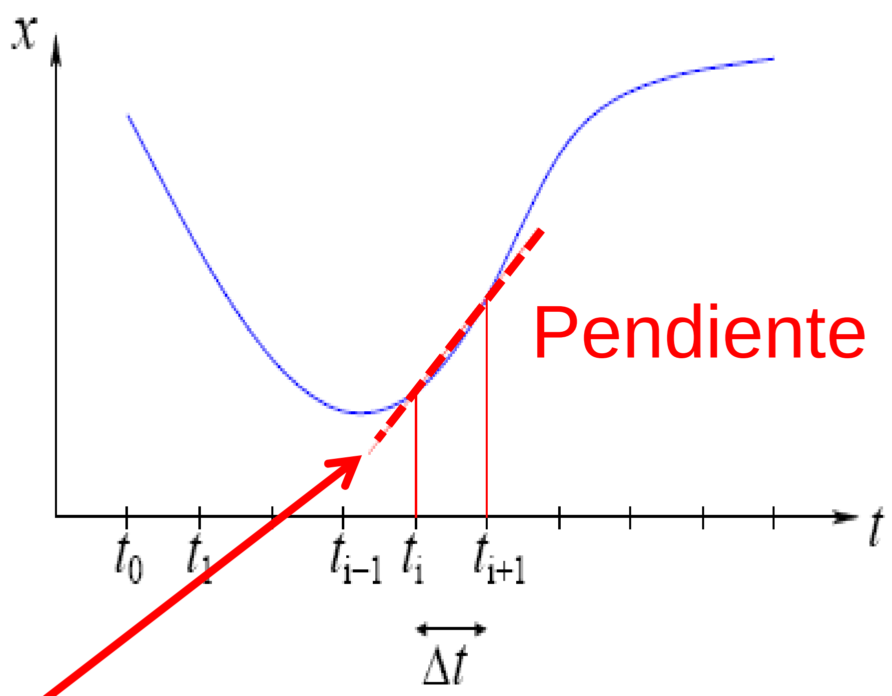
$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$t \longrightarrow t_i$$

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x(t_i+\Delta t) - x(t_i)}{\Delta t}$$

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t} \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}$$



Derivadas

Derivada hacia atrás **Δt → -Δt**

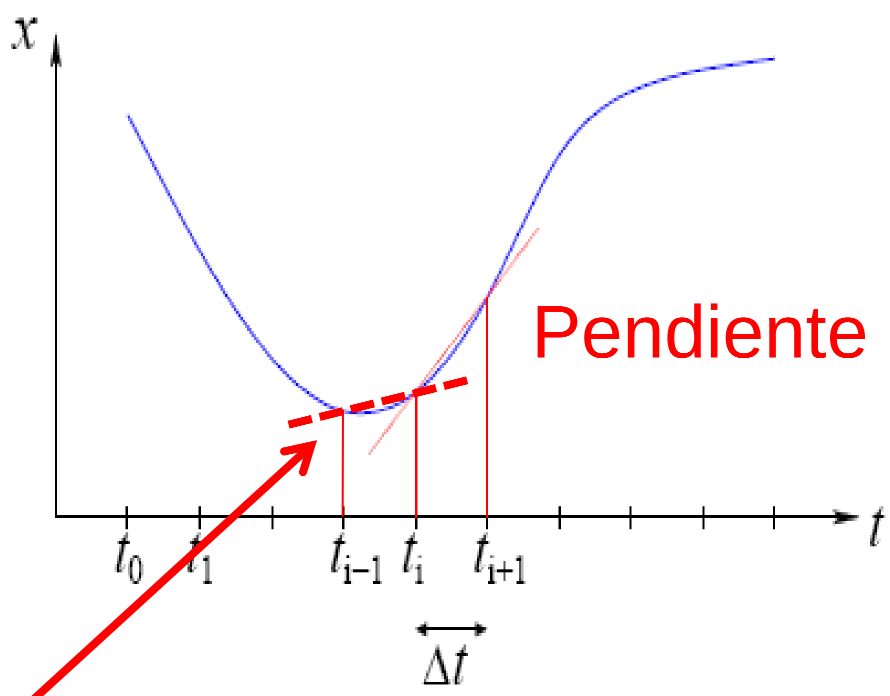
$$\dot{x}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t-\Delta t) - x(t)}{-\Delta t}$$

$$t \to t_i$$

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x(t_i - \Delta t) - x(t_i)}{-\Delta t}$$

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t} \approx \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}$$

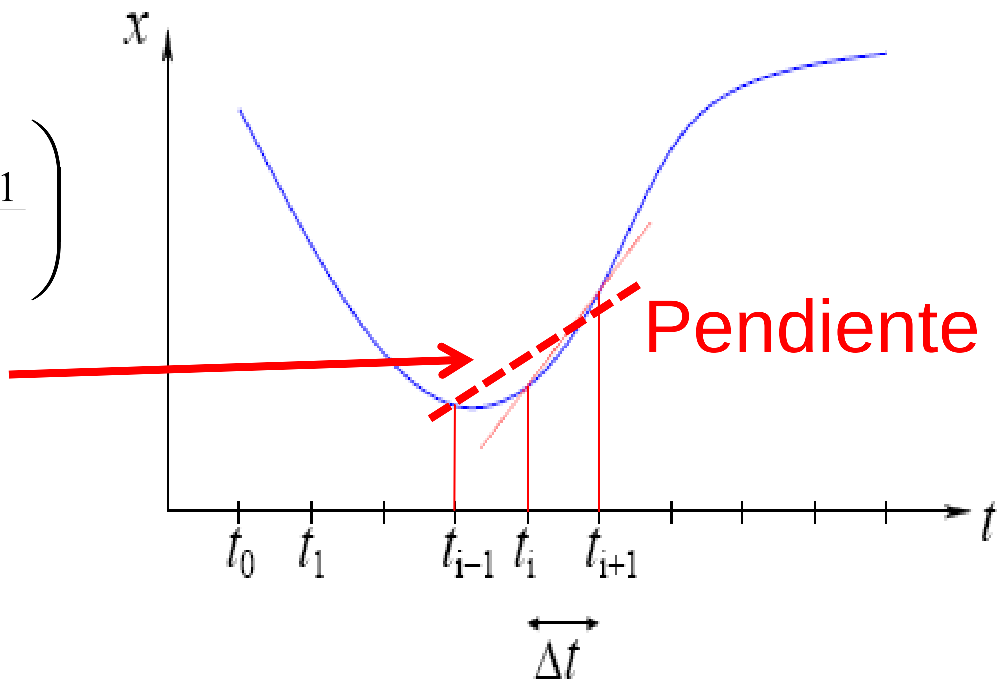


Derivadas

Derivada centrada

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}+\frac{x_i-x_{i-1}}{\Delta t}\right)$$

$$\approx \frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i-\Delta t)}{2\Delta t}$$



Derivada centrada es más precisa que la derivada hacia adelante o la derivada hacia atrás

Derivadas

Segunda derivada

Tarea

1.Obtén la expresión para la segunda derivada (ver página 22-23 del Apunte)

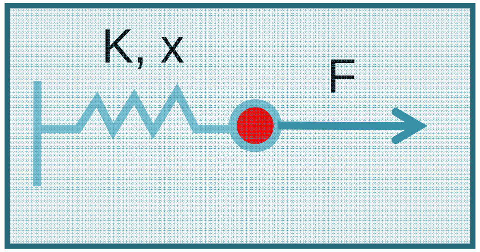
2.¿se obtiene la misma expresión si se utiliza?

$$(\dot{x}_i)^{\bullet}$$

$$\ddot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}$$

Solución ecuación de Newton

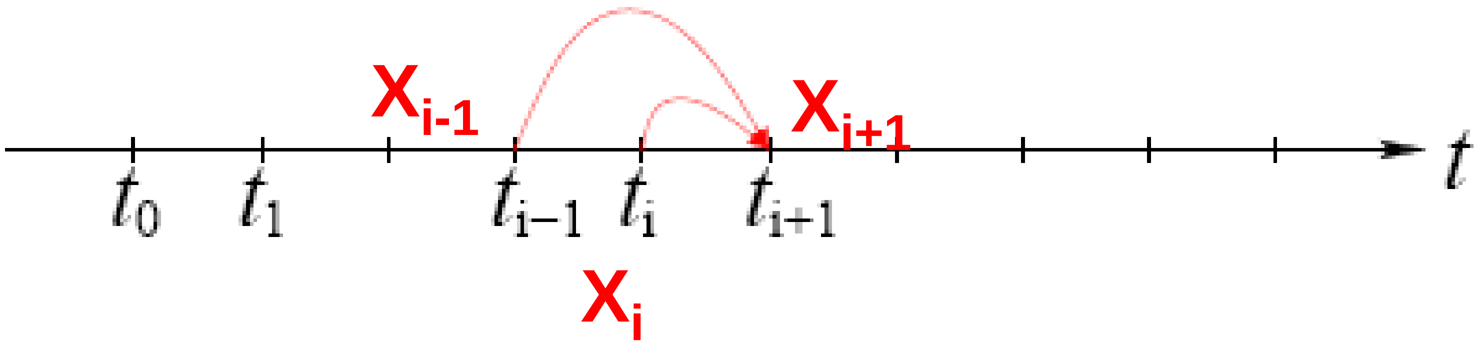
Método de Verlet



$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} = -kx_i$$

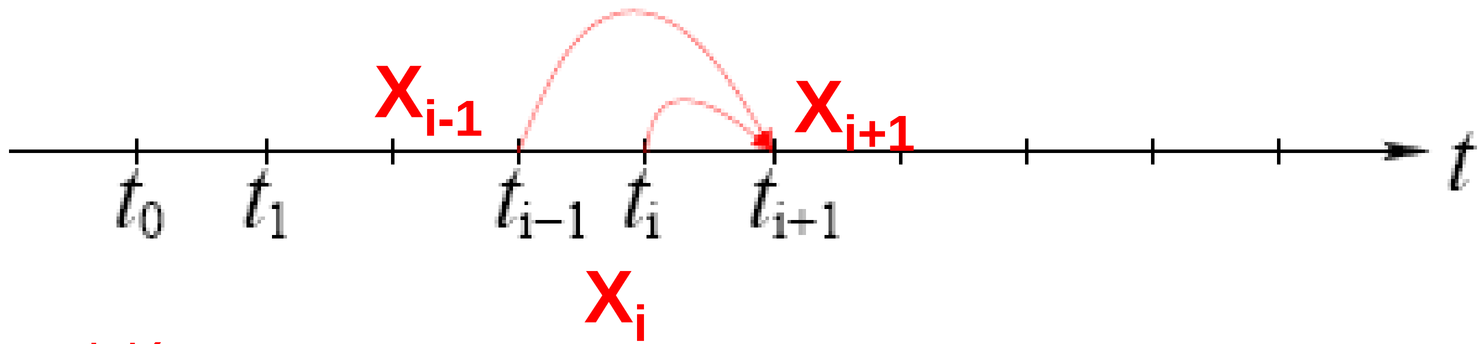
$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m}x_i\Delta t^2$$



Solución ecuación de Newton

Método de Verlet

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{F(x_i)}{m}\Delta t^2$$



Intuición:

•Si sé donde estoy → **x_0**

•Si conozco mi velocidad inicial → **v_0**

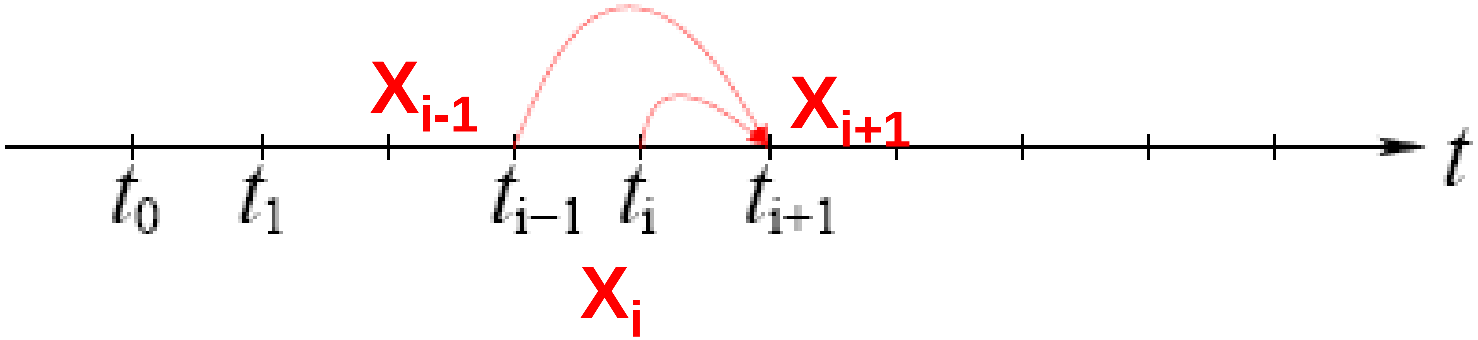
•Si conozco como mi velocidad cambia inicialmente → a_0

$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$ **(v_0 es contante al inicio y $\Delta t \rightarrow 0$)**

Solución ecuación de Newton

Método de Verlet

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{F(x_i)}{m}\Delta t^2$$



Resumen

- Dados x_0, v_0
- Calculo $x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$
- Itero desde i=1 hasta el tiempo final

Matlab

Programa que nos ayuda a realizar cálculos

Matlab está diseñado para trabajo con matrices

Matrices → discretización de una variable

Ejemplo:
una foto → seguir trayectorias