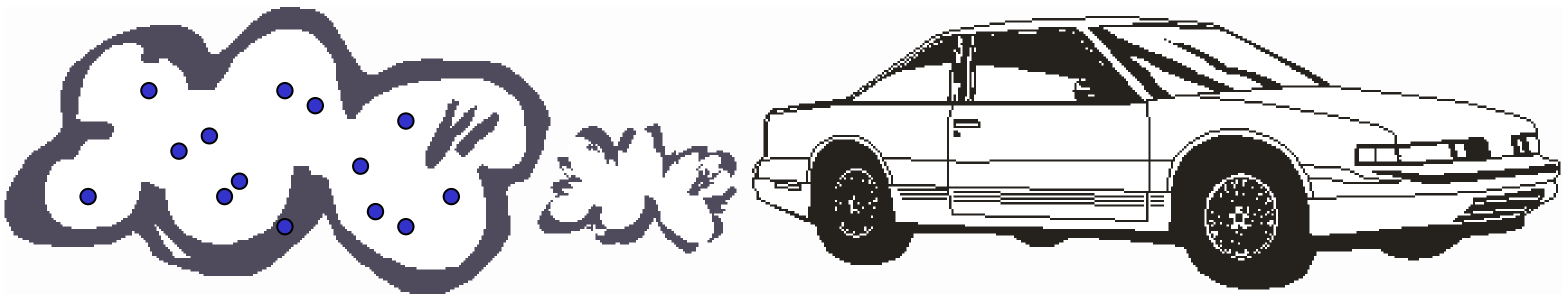
FI1002 Sistemas Newtonianos
Judit Lisoni
Sección 6

Unidad 3 Sistemas extendidos

Contenidos

1. ¿qué son los sistemas extendidos?
2. Masa y centro de masa
3. Dinámica de un sistema extendido
   - Velocidad, momentum y aceleración
   - Fuerzas internas e externas
   - Conservación del momento lineal
   - Energía potencial
   - Energía cinética
4. El momento de inercia

¿Qué son los sistemas extendidos?



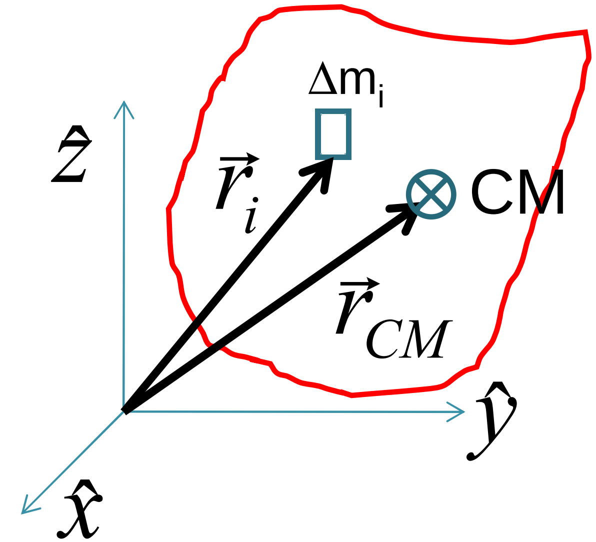
Partículas "no interactuando" entre ellas

sólidos

Masa y centro de masa

$$M_{total} = \sum_{i=1}^{N} m_i = cons\tan te$$

$$\vec{r}_{CM} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$



$$x_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i x_i}{M_{total}}$$

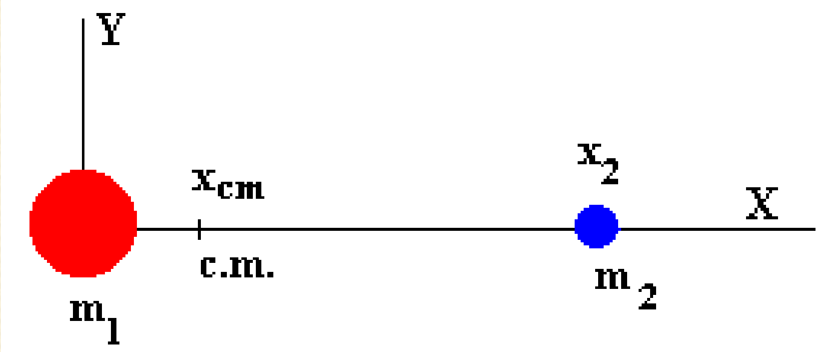
$$y_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i x_i}{M_{total}}$$

$$z_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i x_i}{M_{total}}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

Posición promedio ponderada de la masa del sistema

Ejemplo de cálculo



- El CM se ubicará en el eje entre las dos partículas
- $x_1=0$ y $x_2= d$ y $m_1=2m_2$

  $x_{CM}=d/3$
- CM se encuentra siempre más cerca de la partícula más masiva
- El CM de un objeto simétrico se ubica sobre el eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría

Dinámica de un sistema extendido

Sistema extendido descrito a través del movimiento del CM

Cinética de un sistema extendido
velocidad y momentum

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M_{total}}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\right) = \frac{1}{M_{total}}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{1}{M_{total}}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \text{velocidad de la iésima partícula/elemnto de masa}$$

$$\boxed{M_{total}\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \vec{P}_{total}}$$

El momentum total del sistema es equivalente a representar a dicho sistema como una sola partícula de masa M_{total} que se mueve con velocidad v_{cm}

Cinética de un sistema extendido

aceleración y fuerza

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M_{total}}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i\right) = \frac{1}{M_{total}}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right) = \frac{1}{M_{total}}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i$$

$\vec{a}_i = aceleración$ de la iésima partícula/elemento de masa

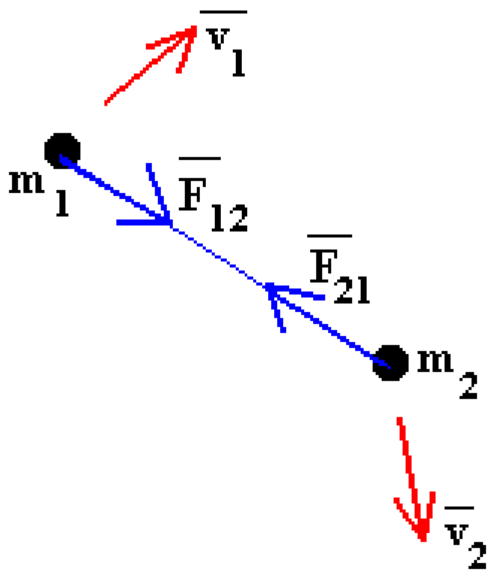
$$\boxed{M_{total}\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}$$

F_i = fuerza aplicada a la iésima partícula/elemento de masa

La aceleración del CM será como la aceleración de una partícula ficticia de masa M_{total}. Así esta aceleración será directamente proporcional a la fuerza total que actúa sobre el sistema e inversamente proporcional a su masa M_{total}: segunda ley de Newton

Cinética de un sistema extendido
aceleración y fuerza

$$M_{total}\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i-\text{internas}} + \vec{F}_{i-externas}$$

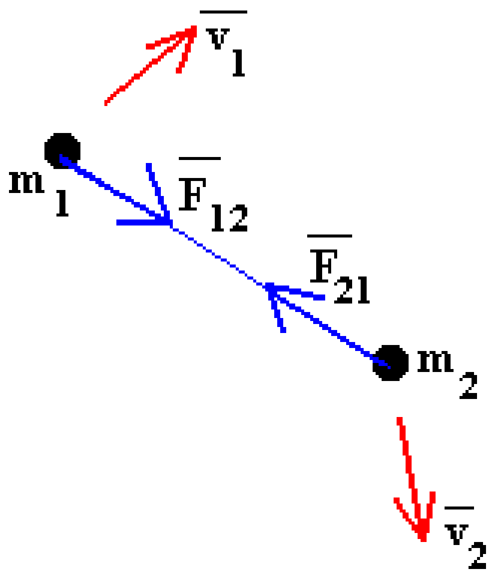


Tercera ley de Newton: si dos cuerpos interactúan la fuerza ejercida sobre el cuerpo 2 debido al cuerpo 1 es igual y opuesta a la fuerza ejercida sobre el cuerpo 1 debido al cuerpo 2

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Cinética de un sistema extendido
aceleración y fuerza

$$M_{total}\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \cancel{\vec{F}_{i-internas}} + \vec{F}_{i-externas}$$



Si existen fuerzas externas entonces el CM del sistema extendido se moverá como una partícula imaginaria de masa M_{total}

Cinética de un sistema extendido
aceleración y fuerza

$$M_{total}\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i-externas} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = constante$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{total}}{dt} = M_{total}\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{total} = M_{total}\vec{v}_{CM} = constante}$$

Si no existen fuerzas externas el momento lineal del sistema extendido es constante

➔sistema extendido está aislado, tanto el momento como la velocidad del CM serán constantes en el tiempo: primera ley de Newton

➔En ausencia de fuerzas externas

- si el sistema está en reposo seguirá en reposo
- Si el sistema se estaba moviendo seguirá en movimiento con una velocidad constante (=velocidad constante en línea recta)

Ejemplo: explosión de un proyectil

- El aire no opone resitencia
- Fuerza externa=gravedad
- Antes de la explosión el proyectil tiene una trayectoria parabólica
- Al explotar

Explosión=fuerzas internas

⇓

No afectan CM

⇓

CM continúa la trayectoria parabólica

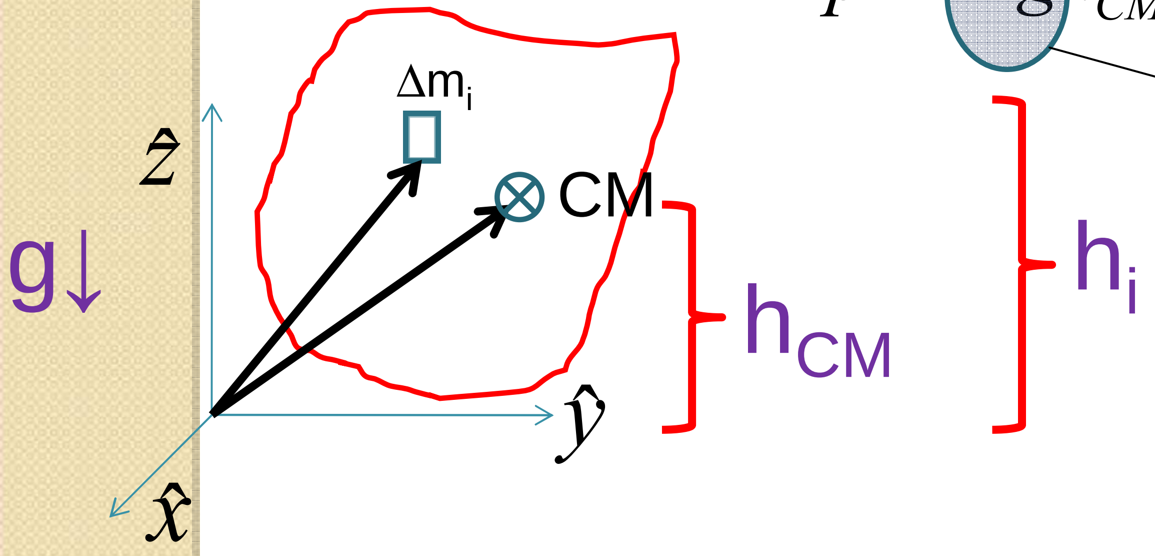
Energía potencial

Centro de gravedad

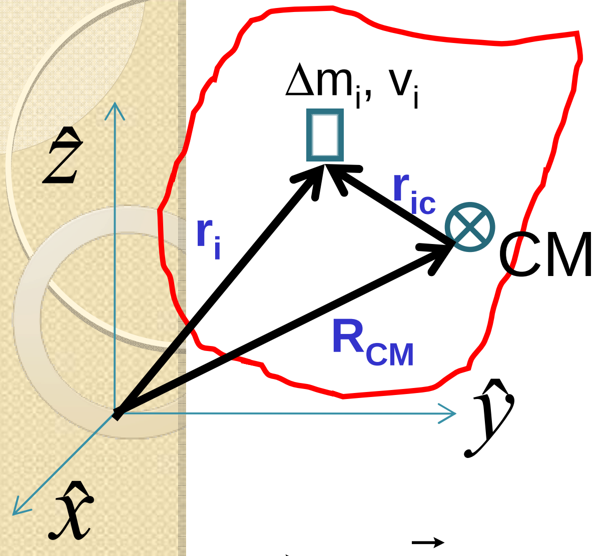
$$Ep = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{N} m_i g h_i = M_{total}\, g \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i h_i}{M_{total}}$$

$$Ep = Mgh_{CM}$$

$$\vec{F}_{gravedad} = M_{total}\,\vec{g}$$



Energía cinética



$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^{\,2}$$

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_{ic}$$

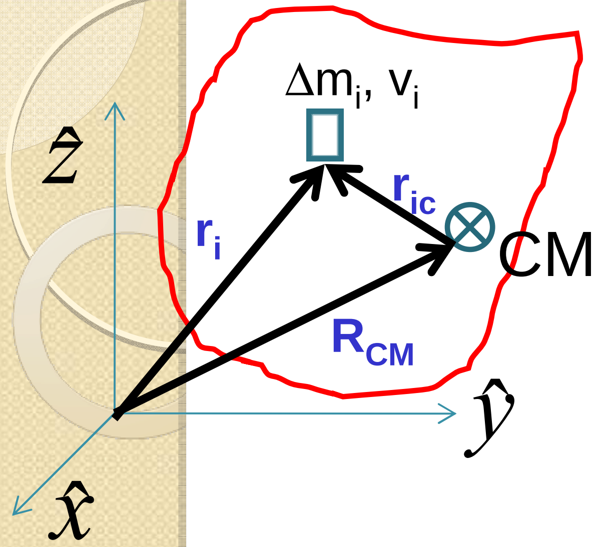
$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_{ic} \Rightarrow \vec{v}_i^{\,2} = \vec{v}_i \bullet \vec{v}_i = V_{CM}^2 + v^2{}_{ic} + 2\vec{V}_{CM} \bullet \vec{v}_{ic}$$

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (V_{CM}^2 + v^2{}_{ic} + 2\vec{V}_{CM} \bullet \vec{v}_{ic})$$

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v^2{}_{ic} + \cancel{\vec{V}_{CM} \bullet (\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{ic})}$$

La cantidad de movimiento de un sistema de partículas fijo respecto a un sistema de referencia fijo a su centro de masas es siempre nulo

Energía cinética



$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^{\,2}$$

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_{ic} \Rightarrow \vec{v}_i^{\,2} = \vec{v}_i \bullet \vec{v}_i = V_{CM}^2 + v^2{}_{ic} + 2\vec{V}_{CM} \bullet \vec{v}_{ic}$$

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (V_{CM}^2 + v^2{}_{ic} + 2\vec{V}_{CM} \bullet \vec{v}_{ic})$$

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v^2{}_{ic} + \vec{V}_{CM} \bullet (\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{ic})$$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} M_{total} V_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{ic}^2}$$

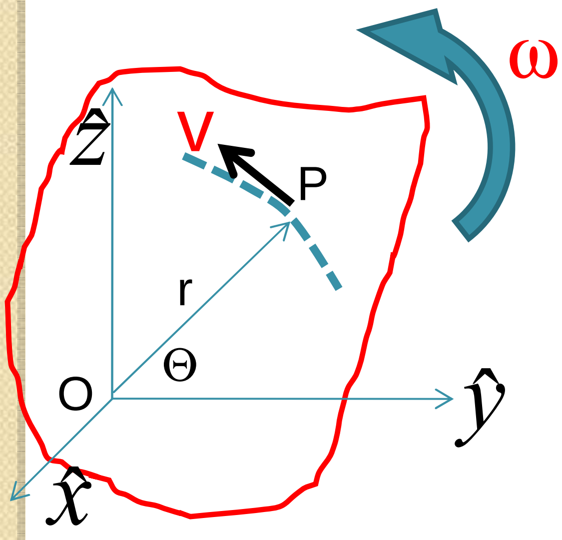
Momento de inercia

Para una partícula: INERCIA es la respuesta de un objeto a una fuerza externa: si intentamos cambiar la velocidad de un objeto éste se opone a dicho cambio

Intuitivamente: cuánto se opone → masa

Masa ↔ inercia

Momento de inercia



O: Eje de rotación

V=velocidad tangencial del punto P

ω↔ v?

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \text{s = distancia recorrida por P a través del arco}$$

$$s = r\Theta$$

$$v = \frac{d(r\Theta)}{dt} = r\frac{d\Theta}{dt} = r\omega$$

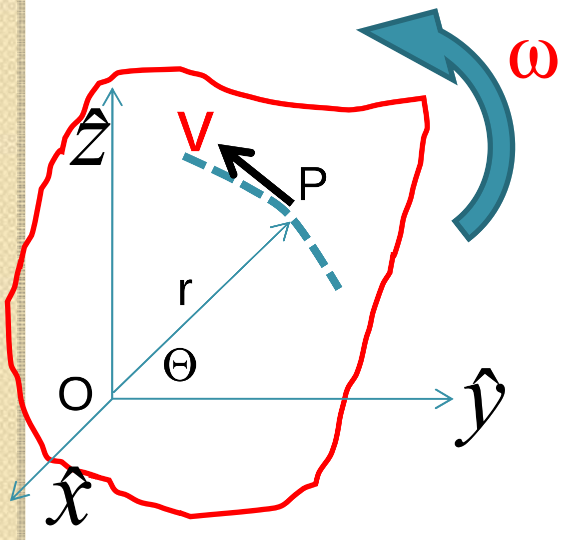
$$K_i = \text{energía cinética para el elemento iésimo}$$

$$\boxed{K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2}$$

Momento de inercia

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_{total} = \sum_{i=1}^{N} K_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right)\omega^2$$



$$\text{momento de inercia } I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

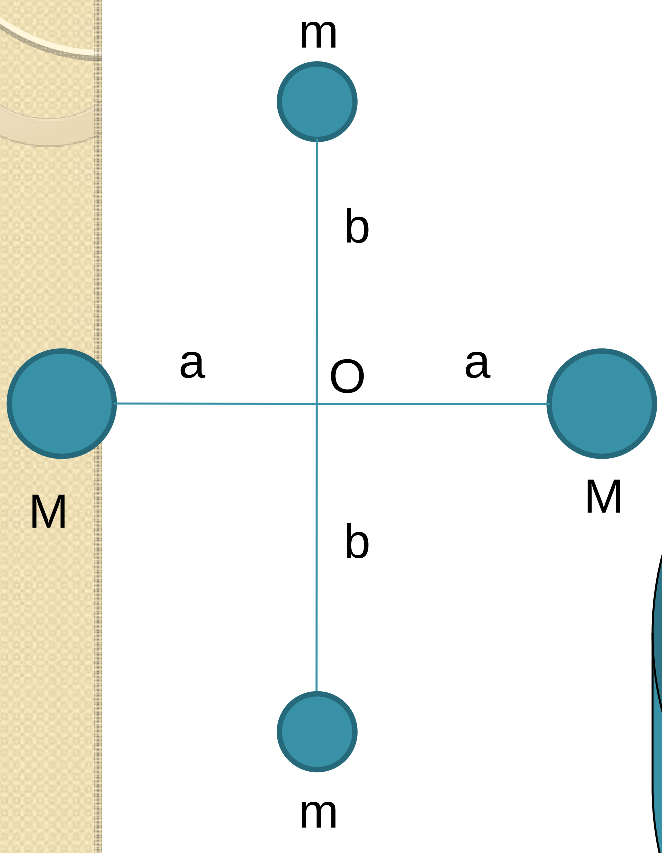
$$\boxed{K_{total} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

O: Eje de rotación

$I = ML^2 \rightarrow kg*m^2$ o $gr*cm2$

m, v ↔ I, ω

Ejemplo de cálculo



Resistencia a adquirir una aceleración angular

- Demostrar que I depende del del eje de rotación que se elija

$I_y=Ma^2+Ma^2=2Ma^2$

$K_{total}=2Ma^2*\omega^2/2$

$=Ma^2*\omega^2$

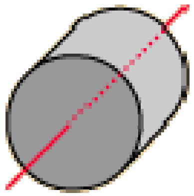
- Si ahora se gira con respecto a un eje perpendicular al plano de las partículas

$I_z=2Ma^2+2mb^2$

$K_{total}=(Ma^2+Mb^2)\omega^2$

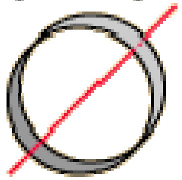
Momentos de inercia de sistemas conocidos

Cilindro sólido o disco, ejes de simetría



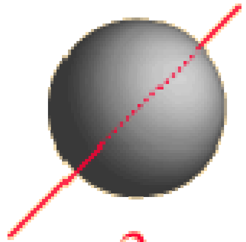
$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Anillo a través de su eje de simetría



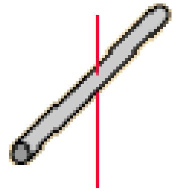
$$I = MR^2$$

Esfera sólida



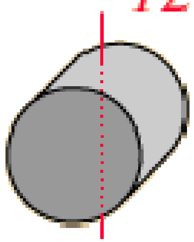
$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Varilla alrededor de su centro de simetría



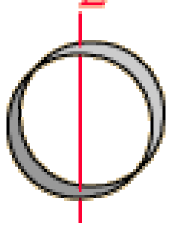
$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$



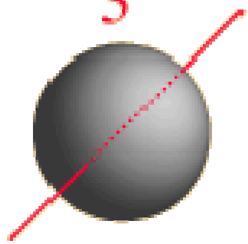
Cilindro sólido, diámetro central

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



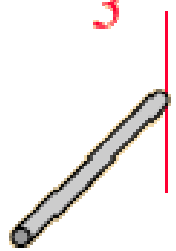
Anillo a través del diámetro

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



Casquete esférico hueco

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



Varilla a través de un extremo