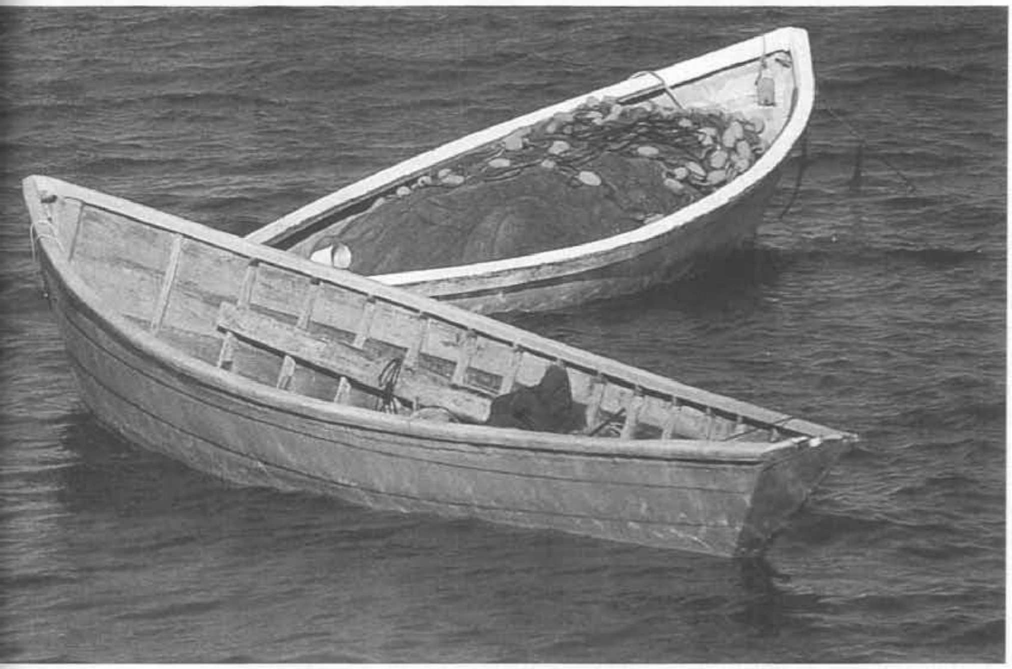
OSCILACIONES

Capítulo 14

14.1 Movimiento armónico simple
14.2 Energía del movimiento armónico simple
14.3 Algunos sistemas oscilantes
14.4 Oscilaciones amortiguadas
14.5 Oscilaciones forzadas y resonancia



Los botes de la fotografía se mueven con el oleaje del mar, ofreciéndonos un ejemplo de movimiento oscilatorio. La oscilación vertical máxima de la posición del bote se mide fácilmente, al igual que el tiempo que invierte el bote en completar un ciclo.

¿Cómo puede expresarse la posición vertical del bote en función del tiempo? (Véase el ejemplo 14.1.)

Cuando se perturba un sistema y éste pierde su posición de equilibrio estable, se producen oscilaciones. Hay muchos ejemplos familiares: los barcos se balancean arriba y abajo, los péndulos de reloj oscilan a un lado y otro, y las cuerdas y lengüetas de los instrumentos musicales vibran al producir los sonidos. Otros ejemplos menos familiares son las oscilaciones de las moléculas de aire en las ondas sonoras y las oscilaciones de las corrientes eléctricas en los aparatos de radio y televisión.

En este capítulo nos ocupamos del movimiento armónico simple, la forma más básica de movimiento oscilatorio. Mediante el uso de la cinemática y de la dinámica del movimiento armónico se puede analizar una amplia variedad de sistemas de interés. En algunas situaciones, las fuerzas dissipativas amortiguan el movimiento oscilatorio, mientras que en otras, la acción de fuerzas impulsoras compensa el amortiguamiento.

14.1 Movimiento armónico simple

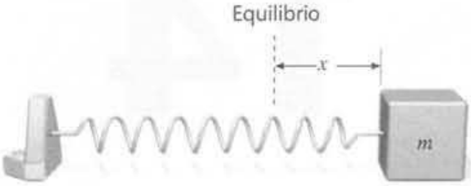


Figura 14.1 Cuerpo unido a un muelle que descansa sobre una mesa sin rozamiento. Se mide el desplazamiento x desde la posición de equilibrio. El desplazamiento es positivo si el muelle se estira y negativo si el muelle se comprime.

Un tipo corriente y muy importante de movimiento oscilatorio es el **movimiento armónico simple**, como el de un cuerpo unido a un muelle, como puede verse en la figura 14.1. En el equilibrio, el muelle no ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Cuando éste se ve desplazado en una cantidad x de su posición de equilibrio, el muelle ejerce una fuerza $-kx$, que viene dada por la ley de Hooke:[1]

$$F_x = -kx \tag{14.1}$$

en donde k es la constante del muelle, característica de su rigidez. El signo menos indica que se trata de una fuerza restauradora; es decir, se opone al sentido del desplazamiento respecto al punto de equilibrio. Combinando la ecuación 14.1 con la segunda ley de Newton ($F_x = ma_x$) se tiene

$$-kx = ma_x$$

es decir

$$a_x = -\frac{k}{m}x \qquad \left(\text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x\right) \tag{14.2}$$

La aceleración es proporcional al desplazamiento y tiene sentido contrario. Esta es la característica que define el movimiento armónico simple y puede utilizarse para identificar sistemas que presentan esta clase de movimiento:

Siempre que la aceleración de un objeto sea proporcional a su desplazamiento pero con sentido opuesto, el objeto se moverá con movimiento armónico simple.

CONDICIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE EN FUNCIÓN DE LA ACELERACIÓN

Como la aceleración es proporcional a la fuerza neta, siempre que la fuerza neta sobre un objeto sea proporcional a su desplazamiento y con sentido opuesto, el objeto se moverá con movimiento armónico simple.

El tiempo que emplea el objeto desplazado para realizar una oscilación completa alrededor de su posición de equilibrio se denomina **periodo** T. El recíproco es la **frecuencia** f, que es el número de oscilaciones por segundo:

$$f = \frac{1}{T} \tag{14.3}$$

La unidad de frecuencia es el ciclo por segundo (ciclo/s), que recibe el nombre de **hertz** (Hz). Por ejemplo, si el tiempo necesario para una oscilación completa es 0,25 s, la frecuencia es 4 Hz.

La figura 14.2 muestra cómo se puede obtener experimentalmente x en función de t para una masa sobre un muelle. La ecuación correspondiente a esta curva es

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{14.4}$$

POSICIÓN EN UN MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

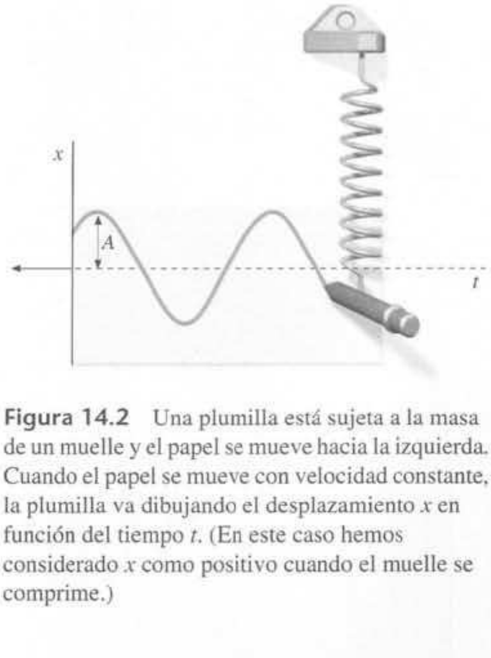
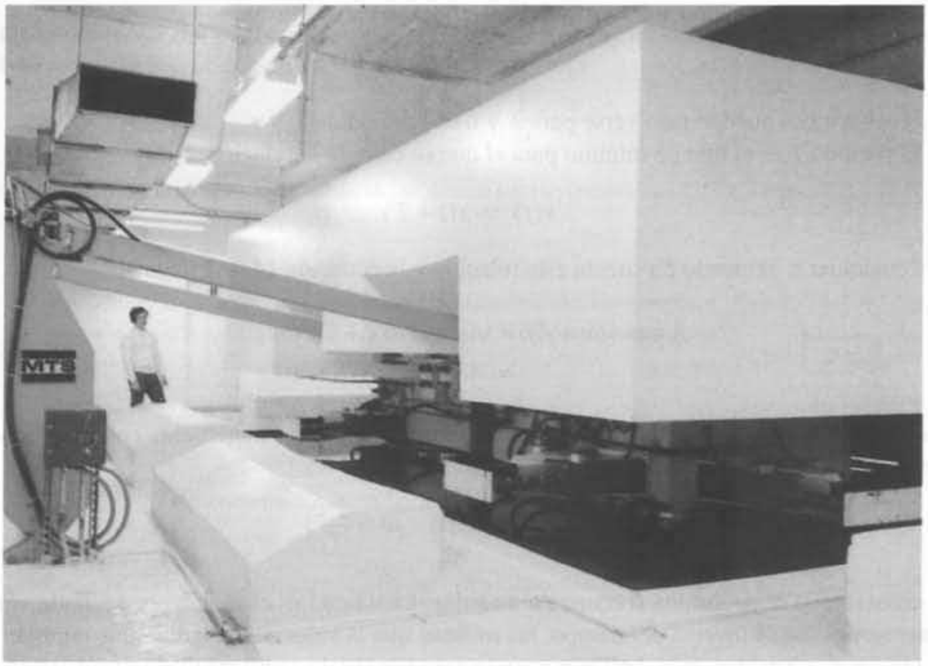


Figura 14.2 Una plumilla está sujeta a la masa de un muelle y el papel se mueve hacia la izquierda. Cuando el papel se mueve con velocidad constante, la plumilla va dibujando el desplazamiento x en función del tiempo t. (En este caso hemos considerado x como positivo cuando el muelle se comprime.)

en donde A, ω y δ son constantes. El desplazamiento máximo $x_{máx}$ respecto a la posición de equilibrio se denomina **amplitud** A. El argumento de la función coseno, $\omega t + \delta$, se denomina **fase** de movimiento y la constante δ se denomina **constante de fase**. Esta constante corresponde a la fase cuando $t = 0$. (Obsérvese que $\cos(\omega t + \delta) = \text{sen}(\omega t + \delta + \pi/2)$, por lo tanto, expresar la ecuación como una función coseno o seno depende simplemente de la fase de la oscilación en el momento que elijamos como $t = 0$.) Si tenemos sólo un sistema oscilante siempre podemos elegir $t = 0$ de modo que $\delta = 0$. Si tenemos dos sistemas oscilantes con igual amplitud y frecuencia, pero diferente fase, podemos elegir $\delta = 0$ para uno de ellos. Las ecuaciones de los dos sistemas son entonces

$$x_1 = A\cos(\omega t)$$

[1] La ley de Hooke se ha introducido en el capítulo 4, sección 4.



El balanceo debido a la acción de vientos fuertes en el edificio Citicorp de Nueva York se reduce mediante el amortiguador de la fotografía, instalado en uno de los pisos más altos. El amortiguador consiste en un bloque de 400 toneladas que está acoplado al edificio mediante un muelle cuya constante se elige de forma que la frecuencia natural del sistema muelle-bloque sea la misma que la frecuencia natural de balanceo del edificio. Si el viento hace oscilar el edificio, el oscilador y el edificio oscilan con una diferencia de fase de 180°, con lo cual se reduce la oscilación.

y

$$x_2 = A \cos (\omega t + \delta)$$

Si la diferencia de fase δ es 0 ó un número entero de veces 2π, entonces $x_2 = x_1$ y se dice que los sistemas están en fase. Si la diferencia de fase δ es π o un número entero impar de veces π, entonces $x_2 = -x_1$ y se dice que los sistemas están fuera de fase en 180°.

Podemos demostrar que la ecuación 14.4 es una solución de la ecuación 14.2 derivando x dos veces respecto al tiempo. La primera derivada de x es la velocidad v:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen} (wt + \delta) \tag{14.5}$$

VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Derivando la velocidad respecto al tiempo se obtiene la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos (\omega t + \delta) \tag{14.6}$$

Sustituyendo x por $A \cos(\omega t+\delta)$(véase la ecuación 14.4) se obtiene

$$a = -\omega^2 x \tag{14.7}$$

ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Comparando $a = -\omega^2 x$ con $a = -(k/m)\, x$ (ecuación 14.2), vemos que $x = A \cos (\omega t + \delta)$ es una solución de la ecuación 14.2 (que puede escribirse de la forma $d^2x/dt^2 = -(k/m)\, x$) si

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.8}$$

La amplitud A y la constante de fase δ pueden determinarse a partir de la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 del sistema. Haciendo $t = 0$ en $x = A \cos (\omega t + \delta)$ se obtiene

$$x_0 = A \cos \delta \tag{14.9}$$

De igual modo, haciendo $t = 0$ en $v = dx/dt = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$ resulta

$$v_0 = -A\omega \operatorname{sen} \delta \tag{14.10}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para A y δ en función de x_0 y v_0.

El periodo T es el tiempo mínimo para el que se cumple la relación

$$x(t) = x(t+T)$$

para cualquier t. Teniendo en cuenta esta relación y la ecuación 14.4 se llega a

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \delta) &= A \cos[\omega(t+T) + \delta] \\ &= A \cos(\omega t + \delta + \omega T) \end{aligned}$$

Las funciones coseno (y seno) repiten su valor cuando la fase se incrementa en 2π, de modo que

$$\omega T = 2\pi \qquad \left(\text{o} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

La constante ω se denomina **frecuencia angular**. La unidad es el radián por segundo y sus dimensiones son la inversa del tiempo, las mismas que la velocidad angular, que también se designa por ω. Sustituyendo $2\pi/T$ por ω en la ecuación 14.4 se obtiene

$$x = A \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \delta\right)$$

Trabajando en esta relación se ve que cada vez que t aumenta en T, la fase crece 2π y, por lo tanto, esto indica que se ha completado un ciclo completo del movimiento.

La frecuencia es la recíproca del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{14.11}$$

DEFINICIÓN —FRECUENCIA, PERIODO Y FRECUENCIA ANGULAR

El astronauta Alan L. Bean midiendo la masa de su cuerpo durante el segundo viaje del Skylab. Lo hace sentándose en un asiento atado a un muelle y oscilando adelante y atrás. La masa total del astronauta más la del aparato está relacionada con su frecuencia de vibración por la ecuación 14.12.

Como $\omega = \sqrt{k/m}$, la frecuencia y el periodo de un objeto ligado a un muelle están relacionados con la constante de fuerza k y la masa m por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.12}$$

FRECUENCIA Y PERIODO DE UN OBJETO LIGADO A UN MUELLE

La frecuencia crece cuando aumenta k (rigidez del muelle) y disminuye cuando aumenta la masa.

EJEMPLO 14.1 | Movimiento de un bote sobre las olas

Un bote se balancea arriba y abajo. El desplazamiento vertical del bote y viene dado por

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

(*a*) Determinar la amplitud, frecuencia angular, constante de fase, frecuencia y periodo del movimiento. (*b*) ¿Dónde se encuentra el bote cuando $t = 1$ s? (*c*) Determinar la velocidad y la aceleración en cualquier tiempo t. (*d*) Calcular los valores iniciales de la posición, la velocidad y la aceleración del bote.

Planteamiento del problema Para determinar las magnitudes solicitadas en (*a*) comparamos la ecuación del movimiento

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

con la ecuación estándar del movimiento armónico simple (ecuación 14.4). La velocidad y la aceleración se determinan derivando $y(t)$.

(a) 1. Comparar la ecuación correspondiente al desplazamiento vertical del bote con la ecuación 14.4, $y = A\cos(\omega t + \delta)$, para deducir A, ω y δ:

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{t}{2\text{ s}} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$A = \boxed{1{,}2\text{ m,}}\qquad \omega = \boxed{1/2\text{ rad/s,}}\qquad \delta = \boxed{\pi/6\text{ rad}}$$

2. La frecuencia y el periodo se deducen de ω:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \boxed{0{,}0796\text{ Hz,}}\qquad T = \frac{1}{f} = \boxed{12{,}6\text{ s}}$$

(b) Hacer $t = 1$ s para determinar la posición del bote:

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left[\frac{1}{2\text{ s}}(1\text{ s}) + \frac{\pi}{6}\right] = \boxed{0{,}624\text{ m}}$$

(c) La velocidad y la aceleración se obtienen derivando una y dos veces la posición respecto al tiempo:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \delta)]$$
$$= -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$
$$= -\frac{1}{2s}(1{,}2\text{ m})\,\text{sen}\left(\frac{1}{2\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \boxed{-(0{,}6\text{ m/s})\,\text{sen}\left(\frac{1}{2\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)]$$
$$= -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$$
$$= -\left(\frac{1}{2\text{ s}}\right)^2(1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \boxed{-(0{,}3\text{ m/s}^2)\cos\left(\frac{1}{2\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

(d) Hacer $t = 0$ para determinar y_0, v_{y0} y a_{y0}:

$$y_0 = (1{,}2\text{ m})\cos\frac{\pi}{6} = \boxed{1{,}04\text{ m}}$$

$$v_{y0} = -(0{,}6\text{ m/s})\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = \boxed{-0{,}300\text{ m/s}}$$

$$a_{y0} = -(0{,}3\text{ m/s}^2)\cos\frac{\pi}{6} = \boxed{-0{,}260\text{ m/s}^2}$$

Ejercicio Un objeto de 0,8 kg está sujeto a un muelle de constante de fuerza $k = 400$ N/m. Determinar la frecuencia y el periodo del movimiento del objeto cuando se desplaza del equilibrio. (*Respuesta* $f = 3{,}56$ Hz, $T = 0{,}281$ s.)

La figura 14.3 muestra dos masas idénticas sujetas a muelles iguales que descansan sobre una superficie sin rozamiento. Un muelle se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo, ¿cuál de los dos cuerpos alcanza primero la posición de equilibrio?

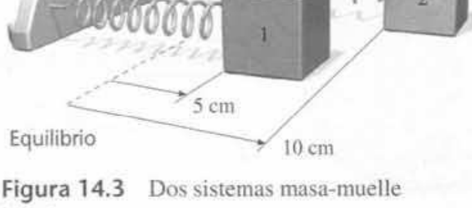


Figura 14.3 Dos sistemas masa-muelle idénticos.

Según la ecuación 14.12, el periodo depende sólo de k y m, pero no de la amplitud. Como k y m son los mismos para ambos sistemas, los periodos son iguales. Por lo tanto, los objetos alcanzan la posición de equilibrio al mismo tiempo. El segundo objeto tiene que recorrer una distancia doble a la del primero para alcanzar el equilibrio, pero también posee una velocidad media doble. La figura 14.4 muestra un esquema de las funciones de posición de los dos objetos. Esto ilustra una propiedad general importante del movimiento armónico simple:

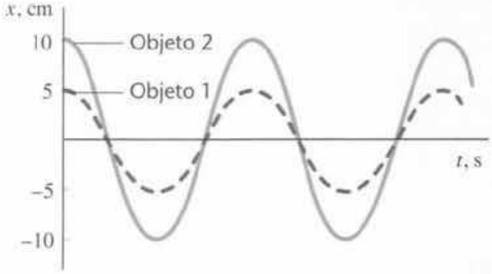


Figura 13.4 Posición x en función de t para los sistemas de la figura 14.3. Ambos alcanzan la posición de equilibrio al mismo tiempo.

En el movimiento armónico simple, la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud.

El hecho de que la frecuencia del movimiento armónico simple sea independiente de la amplitud tiene importantes consecuencias en muchos campos. En música, por ejemplo, significa que el tono (que corresponde a la frecuencia) de una nota que se toca en un piano no depende de la fuerza con que se toca la nota (es decir, de la intensidad de la misma que corresponde a la amplitud).[1] Si las variaciones de amplitud tuviesen un gran efecto sobre la frecuencia, los instrumentos musicales no serían armoniosos.

EJEMPLO 14.2 | Un objeto que oscila

Un objeto oscila con frecuencia angular $\omega = 8{,}0$ rad/s. En $t = 0$, el objeto se encuentra en $x = 4$ cm con una velocidad inicial $v = -25$ cm/s. (*a*) Determinar la amplitud y la constante de fase para este movimiento. (*b*) Escribir x en función del tiempo.

Planteamiento del problema La posición y velocidad iniciales nos proporcionan dos ecuaciones a partir de las cuales se determinan la amplitud A y la constante de fase δ.

(a) 1. La posición inicial y la velocidad están relacionadas con la amplitud y con la constante de fase. La posición viene dada por la ecuación 14.4 y la velocidad se calcula derivando con respecto del tiempo:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

y

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

2. Cuando $t = 0$, la posición y la velocidad valen:

$$x_0 = A\cos\delta \qquad \text{y} \qquad v_0 = -\omega A \operatorname{sen}\delta$$

3. Dividir estas ecuaciones para eliminar A:

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{-\omega A \operatorname{sen}\delta}{A\cos\delta} = -\omega \operatorname{tg}\delta$$

4. Reemplazando por los valores numéricos se obtiene δ:

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

por lo tanto

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}\left[-\frac{-25\ \text{cm/s}}{(8{,}0\ \text{rad/s})(4\ \text{cm})}\right]$$

$$= \boxed{0{,}663\ \text{rad}}$$

5. La amplitud puede determinarse utilizando la ecuación para x_0 o v_0. Aquí utilizamos la de x_0:

$$A = \frac{x_0}{\cos\delta} = \frac{4\ \text{cm}}{\cos 0{,}663} = \boxed{5{,}08\ \text{cm}}$$

(b) Comparando con la ecuación 14.4 resulta x:

$$x = \boxed{(5{,}08\ \text{cm})\cos[(8{,}0\ \text{s}^{-1})t + 0{,}663]}$$

Cuando la constante de fase es $\delta = 0$, las ecuaciones 14.4, 14.5 y 14.6 se convierten en

$$x = A\cos\omega t \qquad (14.13a)$$

$$v = -\omega A \operatorname{sen}\omega t \qquad (14.13b)$$

y

$$a = -\omega^2 A\cos\omega t \qquad (14.13c)$$

Estas funciones vienen representadas en la figura 14.5.

[1] En muchos instrumentos musicales existe una ligera dependencia de la frecuencia con la amplitud. El tono de la lengüeta de un oboe, por ejemplo, depende de la fuerza con que se sople el instrumento porque la vibración no es exactamente armónica simple. Sin embargo, este efecto puede ser corregido por un músico experto.

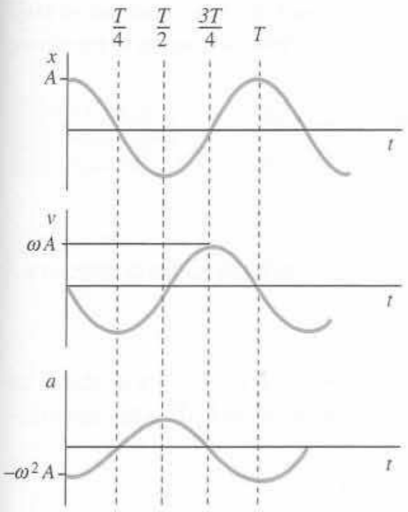


Figura 14.5 Gráficos de x, v y a en función del tiempo t para $\delta = 0$. En $t = 0$, el desplazamiento es máximo, la velocidad es cero y la aceleración es negativa e igual a $-\omega^2 A$. La velocidad se hace negativa cuando el objeto se mueve hacia atrás buscando su posición de equilibrio. Después de un cuarto de periodo ($t = T/4$), el objeto está en equilibrio, $x = 0$, $a = 0$ y la velocidad alcanza su valor máximo ωA. En $t = T/2$, el desplazamiento es $-A$, la velocidad es de nuevo cero y la aceleración $+\,\omega^2 A$. En $t = 3T/4$, $x = 0$, $a = 0$ y $v = +\,\omega A$.

EJEMPLO 14.3 | Objeto ligado a un muelle

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un objeto de 2 kg se sujeta a un muelle como indica la figura 14.1. La constante de fuerza del muelle es $k = 196$ N/m. El objeto se mantiene a una distancia de 5 cm de la posición de equilibrio y se deja en libertad en el tiempo $t = 0$. (*a*) Determinar la frecuencia angular ω, la frecuencia f y el periodo T. (*b*) Expresar x en función del tiempo.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Calcular ω utilizando $\omega = \sqrt{k/m}$.	$\omega = \boxed{9{,}90 \text{ rad/s}}$
2. Utilizar este resultado para determinar f y T.	$f = \boxed{1{,}58 \text{ Hz.}}$ $\quad T = \boxed{0{,}635 \text{ s}}$
3. Determinar A y δ a partir de las condiciones iniciales.	$A = 5$ cm. $\quad d = 0$
(b) Expresar $x(t)$ utilizando los resultados de A, ω y δ.	$x = \boxed{(5 \text{ cm}) \cos (9{,}90 \text{ s}^{-1}\, t)}$

EJEMPLO 14.4 | Velocidad y aceleración de un objeto en un muelle

Considerar un objeto ligado a un muelle cuya posición viene dada por la ecuación $x = (5 \text{ cm}) \cos (9{,}90 \text{ s}^{-1}\, t)$. (*a*) ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto? (*b*) ¿En qué instante se alcanza por vez primera esta velocidad máxima? (*c*) ¿Cuál es la aceleración máxima del objeto? (d) ¿En qué instante se alcanza por vez primera esta aceleración máxima?

Planteamiento del problema Como el objeto se deja libre desde el reposo, $\delta = 0$ y la velocidad y la aceleración vienen dadas por las ecuaciones 14.13a, b y c.

(a) 1. La posición se obtiene de la ecuación 14.13a, con $\delta = 0$. La velocidad se obtiene derivando con respecto del tiempo:

$$x = A \cos \omega t$$

por lo tanto

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \text{ sen } \omega t$$

2. La velocidad máxima tiene lugar cuando $|\text{sen } \omega t| = 1$:

$$|v| = \omega A |\text{sen } \omega t|$$

y entonces

$$|v|_{\text{máx}} = \omega A = (9{,}90 \text{ rad/s})(5 \text{ cm}) = \boxed{49{,}5 \text{ cm/s}}$$

(b) 1. El $|\text{sen } \omega t| = 1$ por vez primera se da cuando $\omega t = \pi/2$:

$$|\text{sen } \omega t| = 1 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

2. Despejar t cuando $\omega t = \pi/2$:

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(9{,}90 \text{ s}^{-1})} = \boxed{0{,}159 \text{ s}}$$

(c) 1. Determinar la aceleración derivando la velocidad, obtenida en el paso 1 del apartado (a):

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t$$

2. La aceleración máxima corresponde a $\cos \omega t = -1$:

$$a_{máx} = \omega^2 A = (9{,}90 \text{ rad/s})^2(5 \text{ cm})$$

$$= \boxed{490 \text{ cm/s}^2 \approx \tfrac{1}{2}\, g}$$

(d) La aceleración máxima tiene lugar cuando $|\cos \omega t| = 1$, lo que ocurre cuando $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$:

$$\omega t = \pi$$

y despejando t

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{9{,}90 \text{ s}^{-1}} = \boxed{0{,}317 \text{ s}}$$

Observación La velocidad máxima ocurre por vez primera después de un cuarto de periodo,

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(2\pi/T)} = \frac{1}{4}\,T$$

El máximo del módulo de la aceleración se da cuando $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ que corresponde a $t = 0, \frac{1}{2}T, \frac{2}{2}T, \frac{3}{2}T, \ldots$

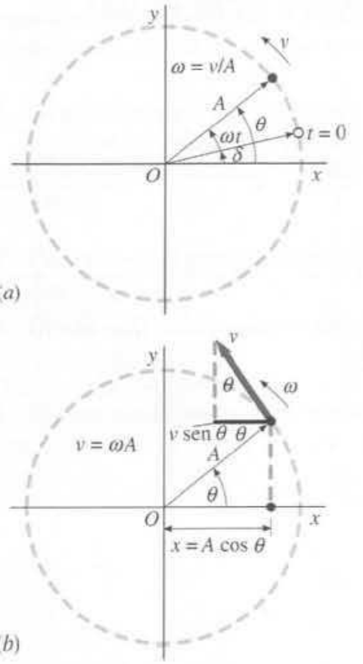


Figura 14.6 Una partícula se mueve en una trayectoria circular con velocidad constante. (*a*) La componente x de la posición describe un movimiento armónico simple, y (*b*) la componente x de la velocidad describe la velocidad de un movimiento armónico simple

Las burbujas de la espuma que genera una hélice en movimiento por el agua producen un patrón sinusoidal.

Movimiento armónico simple y movimiento circular

Existe una relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular con velocidad constante. Consideremos una partícula que se mueve con una velocidad cuyo módulo v es constante sobre una circunferencia de radio A como se indica en la figura 14.6*a*. El desplazamiento angular de la partícula respecto al eje x viene dado por

$$\theta = \omega t + \delta \tag{14.14}$$

en donde δ es el desplazamiento angular en el instante $t = 0$ y $\omega = v/A$ es la velocidad angular de la partícula. La componente x de la posición de la partícula viene dada por

$$x = A \cos \theta = A \cos (\omega t + \delta)$$

que coincide con la ecuación 14.4 del movimiento armónico simple.

La proyección sobre un diámetro de una partícula que se mueve con movimiento circular uniforme es un movimiento armónico simple (figura 14.6).

La velocidad de una partícula que se mueve sobre una circunferencia es $r\omega$, donde r es el radio. En el caso de la partícula de la figura 14.6*b*, $r = A$, por lo que su velocidad es $A\omega$. La proyección del vector velocidad sobre el eje x da $v_x = -v \text{ sen } \theta$. Sustituyendo los valores de v y de θ se obtiene la ecuación

$$v_x = -\omega A \text{ sen } \theta = -\omega A \text{ sen}(\omega t + \delta)$$

que coincide con la ecuación 14.5 del movimiento armónico simple.

14.2 Energía del movimiento armónico simple

Cuando un objeto oscila con movimiento armónico simple, las energías cinética y potencial del sistema varían con el tiempo. Su suma, la energía total $E = E_c + U$, es constante. Consideremos un objeto a una distancia x del equilibrio, sobre el que actúa una fuerza de restitución $-kx$. La energía potencial del sistema es

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

Esta es la ecuación 6.21. Para un movimiento armónico simple, $x = A\cos(\omega t + \delta)$ y sustituyendo en la ecuación anterior

$$U = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) \quad (14.15)$$

ENERGÍA POTENCIAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La energía cinética del sistema es

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2$$

en donde m es la masa del objeto y v su velocidad. En el movimiento armónico simple, $v_x = -A\omega\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \delta)$. Sustituyendo resulta

$$E_c = \tfrac{1}{2}mA^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,(\omega t + \delta)$$

Teniendo en cuenta que $\omega^2 = k/m$ resulta

$$E_c = \tfrac{1}{2}kA^2\,\mathrm{sen}^2\,(\omega t + \delta) \quad (14.16)$$

ENERGÍA CINÉTICA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

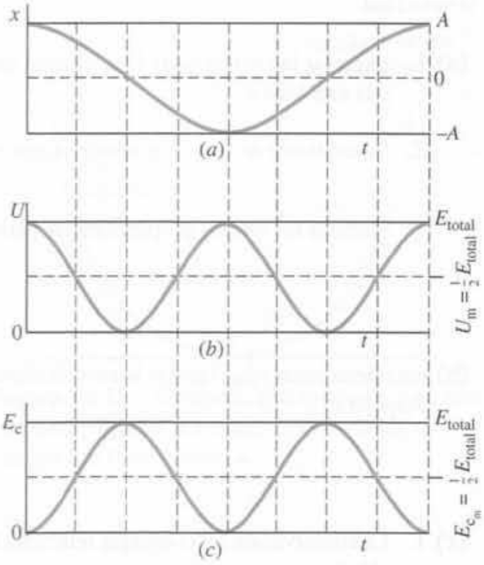


Figura 14.7 Gráficos de x, U y E_c en función de t.

La energía mecánica total es la suma de las energías potencial y cinética:

$$E_{total} = U + E_c = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) + \tfrac{1}{2}kA^2\,\mathrm{sen}^2\,(\omega t + \delta)$$
$$= \tfrac{1}{2}kA^2\,[\cos^2(\omega t + \delta) + \mathrm{sen}^2\,(\omega t + \delta)]$$

Como $\mathrm{sen}^2\,(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) = 1$

$$E_{total} = \tfrac{1}{2}kA^2 \quad (14.17)$$

ENERGÍA TOTAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Esta ecuación nos enseña una importante propiedad general del movimiento armónico simple:

La energía total del movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Para un objeto en su desplazamiento máximo, la energía total es toda energía potencial. Cuando el objeto se mueve hacia su posición de equilibrio, la energía cinética del sistema crece y la energía potencial disminuye. Cuando atraviesa la posición de equilibrio, la velocidad del objeto es máxima, la energía potencial del sistema es cero y la energía total es igual a la energía cinética.

Cuando el objeto sobrepasa el punto de equilibrio, su energía cinética comienza a decrecer y la energía potencial del sistema crece hasta que el objeto de nuevo se detiene momentáneamente en su desplazamiento máximo (ahora en el sentido opuesto). En todo momento, la suma de las energías potencial y cinética es constante. La figura 14.7 muestra los gráficos de U y E_c en función del tiempo. Ambas curvas tienen la misma forma, excepto que cuando una es cero, la otra pasa por un máximo. Sus valores medios en uno o más ciclos son iguales y como $U + E_c = E$, estos valores medios vienen dados por

$$U_m = E_{c_m} = \tfrac{1}{2}E \quad (14.18)$$

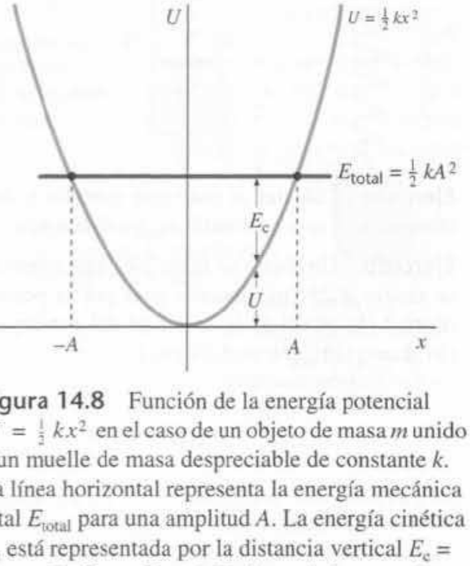


Figura 14.8 Función de la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ en el caso de un objeto de masa m unido a un muelle de masa despreciable de constante k. La línea horizontal representa la energía mecánica total E_{total} para una amplitud A. La energía cinética E_c está representada por la distancia vertical $E_c = E_{total} - U$. Como $E_{total} \geq U$, el movimiento está restringido a $-A \leq x \leq +A$.

En la figura 14.8 se ha representado la energía potencial U en función de x. La energía total E_{total} es constante y está representada por una línea horizontal. Esta línea corta a la curva de la energía potencial en $x = A$ y $x = -A$. Éstos son los puntos en que los objetos, en su oscilación, cambian el sentido de la velocidad y vuelven hacia la posición de equilibrio. Dado que $U \leq E_{total}$, el movimiento está restringido a $A \leq x \leq +A$.

EJEMPLO 14.5 | Velocidad y energía de un objeto que oscila

Un objeto de 3 kg ligado a un muelle oscila con una amplitud de 4 cm y un periodo de 2 s. (*a*) ¿Cuál es la energía total? (*b*) ¿Cuál es el módulo máximo de la velocidad del objeto? (*c*) ¿En qué posición x_1 el módulo de velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

Planteamiento del problema (*a*) La energía total puede determinarse a partir de la amplitud del movimiento y de la constante de fuerza del muelle, que puede calcularse mediante la masa del objeto y el periodo. (*b*) La velocidad máxima tiene lugar cuando la energía cinética es igual a la energía total. (*c*) Mediante el principio de conservación de la energía podemos relacionar la posición con el módulo la velocidad.

(a) 1. Expresar la energía total E en función de la constante de fuerza k y la amplitud A:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2$$

2. La constante de fuerza se relaciona con el periodo y la masa:

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

3. Sustituir los valores proporcionados para determinar E:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(3\text{ kg})\left(\frac{2\pi}{2\text{s}}\right)^2(0{,}04\text{ m})^2 = \boxed{2{,}37 \times 10^{-2}\text{ J}}$$

(b) Para determinar $v_{máx}$, igualar la energía cinética con la energía total y despejar v:

$$\tfrac{1}{2}mv_{máx}^2 = E$$

con lo cual

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(2{,}37 \times 10^{-2}\text{ J})}{3\text{ kg}}} = \boxed{0{,}126\text{ m/s}}$$

(c) 1. La conservación de la energía relaciona la posición x con la velocidad v:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

2. Sustituir $v = \frac{1}{2}v_{máx}$ y despejar x_1. Es conveniente determinar x en función de E y a partir de $E = \frac{1}{2}kA^2$ deducir una expresión de x en función de A:

$$E = \tfrac{1}{2}m(\tfrac{1}{2}v_{máx})^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}mv_{máx}^2\right) + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{4}E + \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

por lo tanto

$$\tfrac{1}{2}kx_1^2 = E - \tfrac{1}{4}E = \tfrac{3}{4}E$$

y

$$x_1 = \sqrt{\frac{3E}{2k}} = \sqrt{\frac{3}{2k}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(4\text{ cm}) = \boxed{3{,}46\text{ cm}}$$

Ejercicio Calcular ω para este ejemplo y determinar $v_{máx}$ a partir de la expresión $v_{máx} = \omega A$. (*Respuesta* $\omega = 3{,}14$ rad/s, $v_{máx} = 0{,}126$ m/s.)

Ejercicio Un objeto de masa 2 kg está sujeto a un muelle de constante de fuerza 40 N/m. El objeto se mueve a 25 cm/s cuando pasa por la posición de equilibrio. (*a*) ¿Cuál es la energía total del objeto? (*b*) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (*Respuesta* (*a*) $E_{total} = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 = 0{,}0625$ J, (*b*) $A = \sqrt{2E_{total}/k} = 5{,}59$ cm.)

*Movimiento general próximo al equilibrio

En general se da movimiento armónico simple cuando una partícula se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio estático. La figura 14.9 es un gráfico de la energía potencial U en función de x para una fuerza que tiene una posición de equilibrio estable y otra de equilibrio inestable. Como se vio en el capítulo 6, el máximo en x_2 de la figura 14.9 corresponde al equilibrio inestable, mientras que el mínimo en x_1 corresponde al equilibrio estable. Cualquier curva continua que presente un mínimo como el de la figura 14.9 puede aproximarse cerca del mínimo por una parábola. La curva de trazos de la figura es una parábola que aproximadamente corresponde a la curva de energía potencial cerca del punto de equilibrio estable. La ecuación general de una parábola que tiene un mínimo en el punto x_1 puede expresarse en la forma

$$U = A + B(x - x_1)^2 \tag{14.19}$$

en donde A y B son constantes. La constante A es el valor de U en la posición de equilibrio $x = x_1$. La fuerza está relacionada con la curva de la energía potencial por $F_x = -dU/dx$. Por lo tanto,

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -2B(x - x_1)$$

Si hacemos $2B = k$, esta ecuación se reduce a

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_1) \tag{14.20}$$

De acuerdo con la ecuación 14.20, la fuerza es proporcional al desplazamiento y está dirigida en sentido opuesto, de modo que el movimiento es armónico simple. En la figura 14.9 se representa la función energía potencial del sistema $U(x)$, que tiene una posición de equilibrio estable en $x = x_1$. La figura 14.10 muestra, en cambio, una función energía potencial que tiene una posición de equilibrio estable en $x = 0$. El sistema que responde a una función como la que se representa en esta figura es una partícula pequeña de masa m que oscila en el fondo de un cuenco con forma esférica.

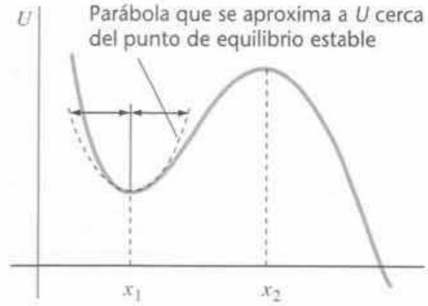


Figura 14.9 Gráfico de U en función de x para una fuerza que tiene una posición de equilibrio estable (x_1) y otra de equilibrio inestable (x_2).

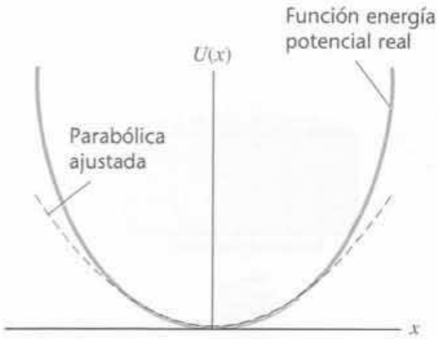


Figura 14.10 Dibujo de U respecto a x para una partícula pequeña que oscila en el fondo de un cuenco con forma esférica.

14.3 Algunos sistemas oscilantes

Objeto colgado de un muelle vertical

Cuando un objeto cuelga de un muelle vertical, además de la fuerza del muelle hay una fuerza vertical adicional hacia abajo que es el peso mg (figura 14.11). Si se elige la dirección hacia abajo como el sentido positivo del eje y, la fuerza del muelle sobre el objeto es $-ky$, donde y es el alargamiento del muelle. La fuerza neta sobre el objeto es

$$\sum F_y = -ky + mg \tag{14.21}$$

Esta ecuación puede simplificarse definiendo una nueva variable $y' = y - y_0$, donde $y_0 = mg/k$ es la longitud que se alarga el muelle cuando el objeto está en equilibrio. Sustituyendo $y = y' + y_0$ nos lleva a

$$\sum F_y = -k(y' + y_0) + mg$$

Pero $ky_0 = mg$, por lo que

$$\sum F_y = -ky' \tag{14.22}$$

La segunda ley de Newton ($\Sigma F_y = ma_y$) nos lleva a

$$-ky' = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

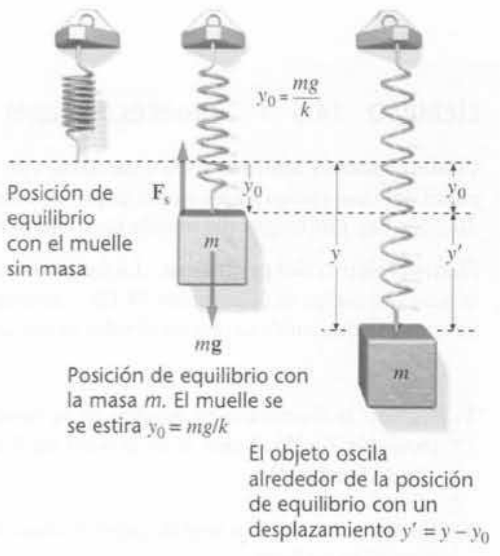


Figura 14.11 El problema de una masa colgada de un muelle vertical se simplifica si el desplazamiento (y') se mide desde la posición de equilibrio del muelle conectado a la masa.

Sin embargo, $y = y' + y_0$, donde $y_0 = mg/k$ es constante. Así, $d^2y/dt^2 = d^2y'/dt^2$, por lo tanto

$$-ky' = m\frac{d^2y'}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k}{m}y'$$

que es la ecuación 14.2 con y' reemplazando a x. La solución de esta ecuación nos es familiar:

$$y' = A\cos(\omega t + \delta)$$

en donde $\omega = \sqrt{k/m}$.

Así pues, el efecto de la fuerza gravitatoria mg consiste meramente en desplazar la posición de equilibrio desde $y = 0$ hasta $y' = 0$. Cuando el objeto se pasa de su posición de equilibrio una cantidad y', la fuerza neta es $-ky'$. El objeto oscila respecto a la posición de equilibrio con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$, la misma frecuencia con la que se movería un objeto atado a un muelle horizontal.

Si una fuerza realiza un trabajo que es independiente del camino se dice que la fuerza es conservativa. La fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por un muelle son conservativas, y la suma de estas fuerzas (ecuaciones 14.21 y 14.22) también lo es. La energía potencial U asociada con la suma de estas fuerzas es el trabajo realizado, con signo negativo, más una constante de integración arbitraria. Es decir,

$$U = -\int -ky'\,dy' = \tfrac{1}{2}\,ky'^2 + U_0$$

en donde la constante de integración U_0 es el valor de U en la posición de equilibrio ($y' = 0$). Por lo tanto,

$$U = \tfrac{1}{2}\,ky'^2 + U_0 \qquad (14.23)$$

EJEMPLO 14.6 | Muelles de papel — ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Confeccionamos adornos para una fiesta con muelles de papel. Construimos un muelle de papel del cual cuelga una hoja de papel de color que lo alarga 8 cm. ¿Cuántas hojas de papel de color hay que colgar del muelle para que oscile con la frecuencia de 1 ciclo/s?

Planteamiento del problema La frecuencia depende del cociente entre la constante del muelle y la masa que cuelga de él (ecuación 14.12), y no sabemos ni una cosa ni otra. Sin embargo, a partir de la información disponible se obtiene el valor de este cociente usando la ley de Hooke (ecuación 14.1).

1. Escribir la frecuencia en función de la constante k y de la masa M (ecuación 14.12), donde M es la masa de N hojas de papel. Tenemos que determinar N: $\quad f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

2. Cuando se cuelga una hoja de papel de masa m el muelle se alarga una distancia $y_0 = 8$ cm: $\quad ky_0 = mg$ y entonces $\dfrac{k}{m} = \dfrac{g}{y_0}$

3. La masa de N hojas de papel se calcula multiplicando por N la masa de una hoja m: $\quad M = Nm$

4. Se despeja k/M usando los resultados de los pasos 2 y 3: $\quad \dfrac{k}{M} = \dfrac{k}{Nm} = \dfrac{1}{N}\dfrac{g}{y_0}$

5. Se sustituye el resultado del paso 4 en el resultado del paso 1 y se despeja N:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{N}\frac{g}{y_0}}$$

por lo tanto

$$N = \frac{g}{(2\pi f)^2 y_0} = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{4\pi^2(1\ \text{Hz})^2(0{,}08\ \text{m})} = 3{,}11$$

$\boxed{\text{Hay que colgar tres hojas de papel de color}}$

Observación Obsérvese que en este ejemplo no hemos usado el valor de m o de k, ya que la frecuencia depende del cociente k/m que resulta ser g/y_0. Las unidades también salen bien, ya que 1 Hz = 1 ciclo/s, y un ciclo es una unidad sin dimensiones.

Ejercicio ¿Cuánto se alarga el muelle de papel cuando un adorno hecho con tres hojas de papel colgando está en equilibrio? (*Respuesta* 24 cm)

EJEMPLO 14.7 | Una bolita de abalorio sobre un bloque

Un bloque descansa sobre un muelle y oscila verticalmente con una frecuencia de 4 Hz y una amplitud de 7 cm. Una bolita de abalorio se sitúa sobre el bloque oscilante justo cuando éste alcanza su punto más bajo. Suponiendo que la masa de la bolita es tan pequeña que no afecta el movimiento del bloque, ¿a qué distancia de la posición de equilibrio del bloque la bolita pierde contacto con éste?

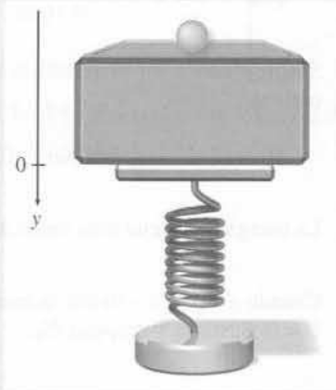


Figura 14.12

Planteamiento del problema Las fuerzas que actúan sobre la bola son su peso mg hacia abajo y la fuerza normal ejercida por el bloque hacia arriba. El módulo de esta fuerza normal cambia con las variaciones de la aceleración. A medida que el bloque se mueve hacia arriba, *por encima de la posición de equilibrio*, su aceleración y la de la bolita van *hacia abajo* y aumentan en módulo. Cuando la aceleración alcanza el valor g, la fuerza normal es cero. Si la aceleración hacia abajo a la que está sometido el bloque supera hacia abajo este valor, la bolita pierde contacto con el bloque.

1. Dibujar un esquema del sistema (figura 14.12). Incluir el eje de coordenadas y con el origen situado en la posición de equilibrio y con la dirección positiva dirigida hacia abajo:

2. Buscar el valor de y para el cual la aceleración es g dirigida hacia abajo. Usar la ecuación 14.7:

$$a_y = -\omega^2 y$$
$$g = -\omega^2 y$$

3. Sustituir $2\pi f$ por ω y despejar y:

$$g = -(2\pi f)^2 y$$

por lo tanto

$$y = -\frac{g}{(2\pi f)^2} = -\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{[2\pi(4\ \text{Hz})]^2}$$
$$= -0{,}0155\ \text{m} = \boxed{-1{,}55\ \text{cm}}$$

Comprobar el resultado La bola se separa del bloque cuando y es negativa, lo cual se produce cuando la bolita está por encima de la posición de equilibrio, como era de esperar.

EJEMPLO 14.8 | Energía potencial del sistema Tierra-muelle

Un objeto de 3 kg alarga en 16 cm la longitud de un muelle cuando cuelga de él verticalmente y está en equilibrio. El muelle se estira 5 cm más desde su posición de equilibrio y se deja el objeto en libertad. Sea U la energía potencial total del sistema muelle-objeto-planeta. Determinar U cuando la separación de la masa respecto de su posición de equilibrio es máxima (*a*) si $U = 0$ en la posición de equilibrio y (*b*) si $U = 0$ cuando el muelle está sin deformar.

Planteamiento del problema (*a*) Con $U = 0$ en la posición de equilibrio, la energía potencial total U es $1/2ky'^2$, donde y' es el desplazamiento de la posición de equilibrio. (*b*) Si $U = 0$ cuando el muelle está sin deformar, la energía potencial total es la energía potencial del muelle más la energía potencial gravitatoria.

(a) 1. Dibujar tres esquemas del sistema, uno con el muelle sin deformar, otro con el muelle deformado 16 cm y un tercero con el muelle alargado 21 cm (figura 14.13).

2. Si la dirección positiva de y' es la dirección hacia abajo y si $y' = 0$ en la posición de equilibrio, la energía potencial total vale (ecuación 14.23)

$$U = \tfrac{1}{2}ky'^2$$

3. Para determinar U primero hay que saber cuánto vale la constante del muelle k. Cuando hay equilibrio la fuerza hacia arriba del muelle iguala la fuerza hacia abajo de la gravedad. Utilizando este hecho, calcular el valor de k:

$$ky_0 = mg$$

por lo tanto

$$k = \frac{mg}{y_0} = \frac{(3\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)}{0{,}16\text{ m}} = 184\text{ N/m}$$

4. Sustituyendo k en el resultado del paso 1 y despejando U se obtiene:

$$U = \tfrac{1}{2}ky'^2 = \tfrac{1}{2}(184\text{ N/m})(0{,}05\text{ m})^2 = \boxed{0{,}230\text{ J}}$$

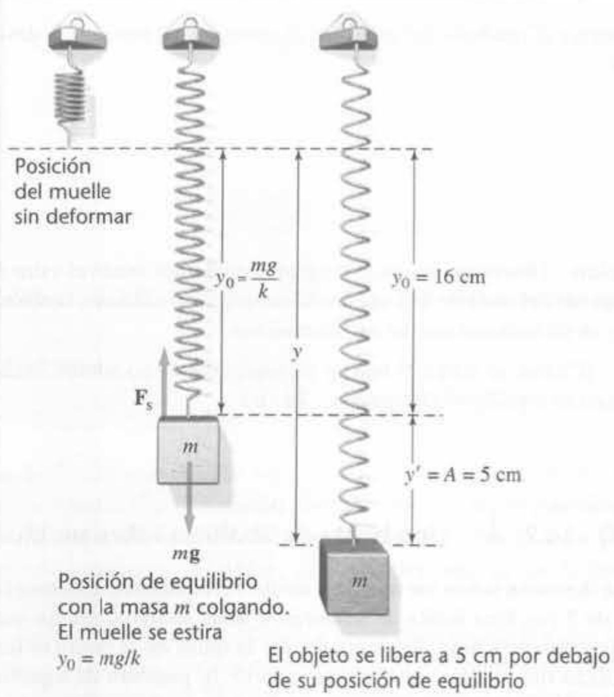


Figura 14.13

(b) 1. La energía potencial total viene dada por la ecuación 14.23:

$$U = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

2. Cuando $y' = y'_{\text{ref}} = -16$ cm, la energía potencial vale cero, es decir, $U = 0$. Sustituir y despejar U_0:

$$0 = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

por lo tanto

$$U_0 = -\tfrac{1}{2}ky'^2_{\text{ref}} = -\tfrac{1}{2}(184\text{ N/m})(-0{,}16\text{ m})^2$$
$$= -2{,}35\text{ J}$$

3. Sustituyendo U_0 en el resultado del paso 1 del apartado b se obtiene:

$$U = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0$$
$$= \tfrac{1}{2}(184\text{ N/m})(0{,}05\text{ m})^2 - 2{,}35\text{ J} = \boxed{-2{,}12\text{ J}}$$

Comprobar el resultado La energía potencial calculada en el apartado (b) debe coincidir con la suma de la energía potencial del muelle U_m en $y = 21$ cm más la energía potencial gravitatoria U_g en $y = 21$cm, ya que cada una de estas energías potenciales es cero en $y = 0$, donde el muelle está sin deformar, y la dirección positiva de y está dirigida hacia abajo. $U_s = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}(184\text{ N/m})(0{,}21\text{m})^2 = 4{,}06$ J y $U_g = mg(-y) = (3\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(-0{,}21\text{ m}) = -6{,}18$ J. Efectivamente, la suma de estos dos términos da: 4,06 J − 6,18 J = −2,12 J, que coincide con el resultado obtenido en el apartado (b) del ejercicio.

El péndulo simple

Un péndulo simple consta de una cuerda de longitud L y una lenteja de masa m. Cuando la lenteja se deja en libertad desde un ángulo inicial ϕ_0 con la vertical, oscila a un lado y a otro con un periodo T.

Ejercicio de análisis dimensional Parece lógico suponer que el periodo de un péndulo simple depende de la masa m de la lenteja, la longitud L del péndulo, la aceleración debida a la gravedad, g, y el ángulo inicial ϕ_0. Determinar una combinación simple de estas magnitudes que ofrezca las dimensiones correctas del periodo. (*Respuesta* $\sqrt{L/g}$.)

Observación Las unidades de longitud, masa y g son m, kg y m/s^2, respectivamente. Si dividimos L por g los metros se cancelan y permanecen segundos al cuadrado, lo que sugiere la forma $\sqrt{L/g}$. Si la fórmula del periodo contuviera la masa, la unidad kg debería cancelarse por alguna otra magnitud. Sin embargo, ninguna combinación de L y g puede cancelar las unidades de masa. Así pues, el periodo no puede depender de la masa de la lenteja. Como el ángulo ϕ_0 es adimensional, no podemos saber por análisis dimensional si es o no un factor del periodo. Más adelante veremos que para valores pequeños de ϕ_0, el periodo viene expresado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.)

Las fuerzas que actúan sobre la lenteja son su peso $m\mathbf{g}$ y la tensión $\mathbf{T}$ de la cuerda (figura 14.14). Cuando la cuerda forma un ángulo ϕ con la vertical, el peso tiene las componentes $mg\cos\phi$ a lo largo de la cuerda y mg sen ϕ tangencial al arco circular en el sentido de ϕ decreciente. Para la componente tangencial, la segunda ley de Newton ($\Sigma F_t = ma_t$) nos da

$$-mg\,\text{sen}\,\phi = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{14.24}$$

en donde la longitud del arco s está relacionada con el ángulo ϕ mediante $s = L\phi$. Derivando dos veces con respecto del tiempo ambos lados de la expresión $s = L\phi$ se obtiene

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Sustituyendo en la ecuación 14.24 $L\,d^2\phi/dt^2$ por d^2s/dt^2 se obtiene

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\phi \tag{14.25}$$

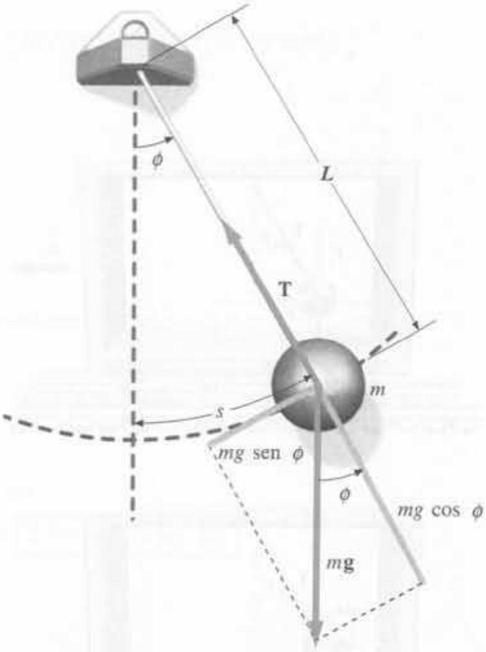


Figura 14.14 Fuerzas sobre la lenteja de un péndulo.

Obsérvese que la masa m no aparece en la ecuación 14.25, es decir, el movimiento de un péndulo no depende de su masa. Para valores pequeños de ϕ, sen $\phi \approx \phi$ y

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\,\phi \tag{14.26}$$

La ecuación 14.26 es de la misma forma que la ecuación 14.2 para un objeto ligado a un muelle. El movimiento de un péndulo es, por lo tanto, aproximadamente armónico simple para pequeños desplazamientos angulares.

La ecuación 14.26 también puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi, \quad \text{en donde} \quad \omega^2 = \frac{g}{L} \tag{14.27}$$

y ω es la frecuencia angular —no la velocidad angular— del movimiento del péndulo. En consecuencia, el periodo del péndulo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{14.28}$$

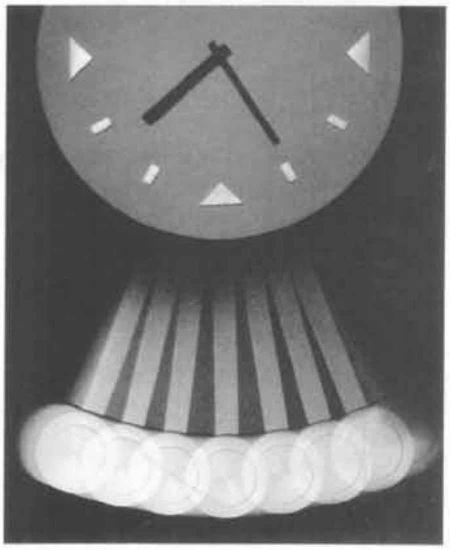
PERIODO DE UN PÉNDULO SIMPLE

La solución de la ecuación 14.27 es

$$\phi = \phi_0\cos(\omega t + \delta)$$

en donde ϕ_0 es el desplazamiento angular máximo.

De acuerdo con la ecuación 14.28, cuanto mayor es la longitud del péndulo, mayor es el periodo, lo cual está de acuerdo con lo observado experimentalmente. Obsérvese también que la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud de la oscilación (para amplitudes pequeñas), lo cual es una característica general del movimiento armónico simple.



Todos los relojes mecánicos mantienen la hora exacta porque el periodo del elemento oscilante del mecanismo permanece constante. El periodo de cualquier péndulo cambia con las variaciones de la amplitud, pero el mecanismo que mueve un reloj de péndulo mantiene la amplitud a un valor constante.

Ejercicio Determinar el periodo de un péndulo simple de 1 m de longitud. (*Respuesta* 2,01 s.)

La aceleración debida a la gravedad puede medirse fácilmente utilizando un péndulo simple. Únicamente es necesario medir la longitud L y el periodo T. Mediante la ecuación 14.28 se calcula g. (Para determinar T, habitualmente medimos el tiempo necesario para n oscilaciones y dividimos por n, lo cual minimiza el error de la medida.)

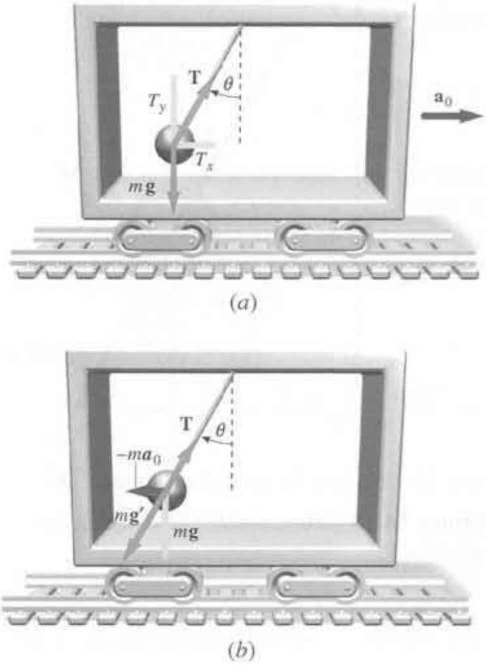


Figura 14.15 (*a*) Péndulo simple en equilibrio aparente en un furgón con movimiento acelerado. Las fuerzas que se muestran corresponden a un sistema estacionario exterior. (*b*) Fuerzas que actúan sobre la lenteja observadas en el sistema acelerado. Sumar la pseudofuerza $-m\mathbf{a}_0$ es equivalente a reemplazar $\mathbf{g}$ por $\mathbf{g}'$.

El péndulo en un sistema de referencia acelerado La figura 14.15*a* muestra un péndulo simple suspendido del techo de un furgón de ferrocarril que se mueve con aceleración $\mathbf{a}_0$ relativa al suelo hacia la derecha, y $\mathbf{a}$ es la aceleración de la lenteja relativa al suelo. Aplicando la segunda ley de Newton a la lenteja se obtiene

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \tag{14.29}$$

Si la lenteja permanece en reposo con respecto del furgón, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ y se cumple

$$\sum F_x = T \operatorname{sen} \theta = ma_0$$
$$\sum F_y = T \cos \theta - mg = 0$$

en donde θ_0 es el ángulo de equilibrio, que según esto viene dado por tg $\theta_0 = a_0/g$. Si la lenteja se mueve con respecto al furgón, entonces $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$, donde $\mathbf{a}'$ es la aceleración de la lenteja relativa al furgón. Sustituyendo $\boldsymbol{a}$ en la ecuación 14.29 se obtiene

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0)$$

Restando $m\mathbf{a}_0$ en los dos términos de la expresión anterior se llega a

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g}' = m\mathbf{a}'$$

en donde $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_0$. Reemplazando $\mathbf{g}$ por $\mathbf{g}'$ y $\boldsymbol{a}$ por $\mathbf{a}'$ en la ecuación 14.29 se obtiene el movimiento de la lenteja relativa al furgón. En la figura 14.15*b* se muestran los vectores $\mathbf{T}$ y $m\mathbf{g}'$. Si la cuerda se rompe y, por lo tanto, $\mathbf{T} = 0$, la ecuación anterior nos conduce a $\mathbf{a}' = \mathbf{g}'$, lo cual significa que $\mathbf{g}'$ es la aceleración de caída libre en el sistema de referencia del furgón. Si se desplaza ligeramente la lenteja de su posición de equilibrio, oscilará con un periodo T dado por la ecuación 14.28, donde g ha sido reemplazada por g'.

Ejercicio Un péndulo simple de longitud 1 m se encuentra en un furgón que se mueve horizontalmente con una aceleración $a_0 = 3$ m/s². Determinar g' y el periodo T. (*Respuesta* $g' = 10{,}26$ m/s², $T = 1{,}96$ s.)

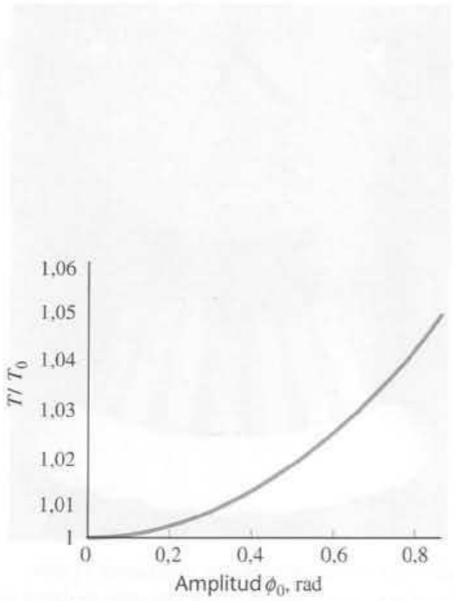


Figura 14.16 Obsérvese que los valores de las ordenadas van de 1 a 1,06. En un rango de ϕ entre 0 y 0,8 rad (46°) el periodo cambia en 5% aproximadamente.

Oscilaciones de gran amplitud Cuando la amplitud de un péndulo se hace grande, su movimiento continúa siendo periódico pero deja de ser armónico simple. Para determinar el periodo debe tenerse en cuenta una ligera dependencia con la amplitud. Para una amplitud angular cualquiera ϕ_0, se demuestra que el periodo viene dado por la expresión

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2}\phi_0 + \ldots\right] \tag{14.30}$$

PERIODO PARA OSCILACIONES DE GRAN AMPLITUD

en donde $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ es el periodo correspondiente a amplitudes muy pequeñas. La figura 14.16 muestra T/T_0 en función de la amplitud ϕ_0.

EJEMPLO 14.9 | Un reloj de péndulo

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un reloj de péndulo simple se calibra para marchar de modo exacto con una amplitud angular de $\phi_0 = 10°$. Cuando la amplitud ha disminuido hasta ser muy pequeña, ¿el reloj se adelantará o se atrasará? ¿Cuánto se adelantará o se atrasará en un día si la amplitud sigue siendo muy pequeña?

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. Responder a la primera cuestión determinando si el periodo aumenta o disminuye.	T disminuye cuando ϕ disminuye de modo que $\boxed{\text{el reloj se adelanta.}}$
2. Utilizar la ecuación 14.30 para determinar la variación relativa en porcentaje, $[(T - T_0)/T_0] \times 100\%$, para $\phi = 10°$. Utilizar sólo el primer término de corrección.	0,190%.
3. Determinar el número de minutos de un día.	Hay 1440 minutos en un día.
4. Combinar las pasos 2 y 3 para determinar la variación del número de minutos en un día según el reloj del ejemplo.	Se produce un adelanto de $\boxed{\text{2,73 minutos por día.}}$

Observación Para evitar que el reloj se adelante, los mecanismos los relojes de péndulo se diseñan de modo que mantengan la amplitud apreciablemente constante.

*El péndulo físico

Un cuerpo rígido que pueda girar libremente alrededor de un eje horizontal que no pase por su centro de masas oscilará cuando se desplace de su posición de equilibrio. Este sistema recibe el nombre de **péndulo físico**. Consideremos una figura plana con un eje de rotación situado a una distancia D del centro de masas y desplazada de su posición de equilibrio un ángulo ϕ (figura 14.17). El momento respecto al eje tiene como módulo MgD sen ϕ y tiende a disminuir $|\phi|$. La segunda ley de Newton aplicada a la rotación es

$$\tau = I\alpha$$

en donde α es la aceleración angular e I el momento de inercia respecto al eje. Sustituyendo el momento neto τ por $-MgD$ sen ϕ y $d^2\phi/dt^2$ por α tenemos

$$-MgD \text{ sen } \phi = I\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

o sea,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I} \text{ sen } \phi \qquad (14.31)$$

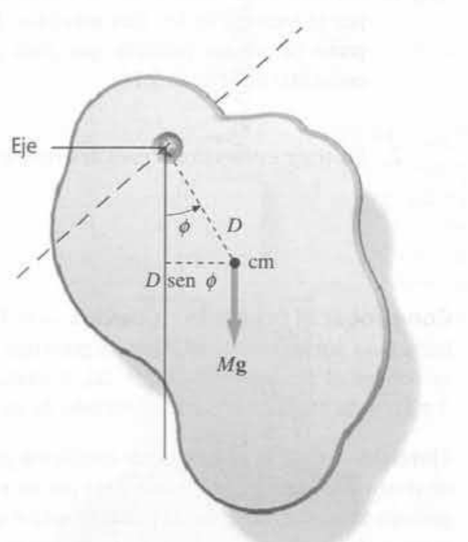


Figura 14.17 Péndulo físico.

Igual que en el péndulo simple, el movimiento es aproximadamente armónico simple si los desplazamientos angulares son pequeños, de manera que la aproximación sen $\phi \approx \phi$ sea válida. En este caso tenemos

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -\frac{MgD}{I}\phi = -\omega^2\phi \qquad (14.32)$$

en donde $\omega = \sqrt{MgD/I}$ es la frecuencia angular —no la velocidad angular— del movimiento. En consecuencia, el periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} \qquad (14.33)$$

PERIODO DE UN PÉNDULO FÍSICO

Para grandes amplitudes, el periodo viene dado por la ecuación 14.30 con T_0 expresado por la ecuación 14.33. Para un péndulo simple de longitud L, el momento de inercia es $I = ML^2$ y $D = L$. La ecuación 14.33 nos da $T = 2\pi\sqrt{ML^2/MgL} = 2\pi\sqrt{L/g}$, igual que en la ecuación 14.28.

EJEMPLO 14.10 | La barra oscilante

Una barra uniforme de masa M y longitud L puede girar libremente alrededor de un eje horizontal perpendicular a la barra y que pasa por uno de sus extremos. (*a*) Determinar el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares. (*b*) Determinar el periodo de oscilación si el eje de rotación está a una distancia x del centro de masas.

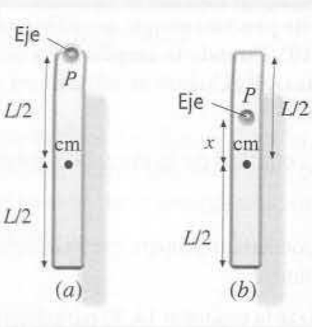


Figura 14.18

Planteamiento del problema (*a*) El periodo viene dado por la ecuación 14.33. El centro de masas se encuentra en el centro de la barra, de modo que la distancia del centro de masas al eje de rotación es la mitad de la longitud de la barra (figura 14.18*a*). El momento de inercia de una barra uniforme puede encontrarse en la tabla 9.1. (*b*) Para rotaciones alrededor de un eje que pasa por un punto P (figura 14.18*b*) el momento de inercia se deduce a partir del teorema de los ejes paralelos $I = I_{cm} + MD^2$ (ecuación 9.44) en donde I_{cm} puede encontrarse en la tabla 9.1.

(a) 1. El periodo viene dado por la ecuación 14.33: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MgD}}$

2. El valor de I respecto al extremo se encuentra en la tabla 9.1 y D es la mitad de la longitud de la barra: $I = \frac{1}{3}ML^2; \qquad D = \frac{1}{2}L$

3. Aplicar los valores de I y D para determinar T: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\,(\frac{1}{2}L)}} = \boxed{2\pi\sqrt{\dfrac{2L}{3g}}}$

(b) 1. Alrededor del punto P, $D = x$ y el momento de inercia viene dado por el teorema de los ejes paralelos. El momento de inercia respecto de un eje paralelo que pasa por el centro de masas se encuentra en la tabla 9.1:

$$D = x$$
$$I = I_{cm} + MD^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 + Mx^2$$

2. Sustituir estos valores para determinar T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2)}{Mgx}}$$
$$= \boxed{2\pi\sqrt{\frac{(\frac{1}{12}L^2 + x^2)}{gx}}}$$

Comprobar el resultado Cuando $x \to 0$, $T \to \infty$ como era de esperar. (Si el eje de rotación de la barra pasa por su centro de masas la gravedad no ejerce un momento restaurador.) Cuando $x = L/2$, se obtiene el mismo resultado de (a), y cuando $x >> L$ la expresión del periodo se acerca a $T = 2\pi\sqrt{x/g}$, la cual corresponde al periodo de un péndulo simple de longitud x (ecuación 14.28).

Ejercicio ¿Cuál es el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares de una regla de metro alrededor de un eje que pasa por un extremo? (*Respuesta* $T = 1{,}64$ s. Obsérvese que este periodo es menor que el de un péndulo simple de longitud $L = 1$ m. El periodo del péndulo simple es mayor porque el cociente entre su momento de inercia y el momento restaurador es mayor.)

Ejercicio Demostrar que cuando $x = L/6$, el periodo es el mismo que cuando $x = L/2$.

Observación En la figura 14.19 se muestra el periodo T en función de la distancia x del centro de masas para una barra de longitud 1 m.

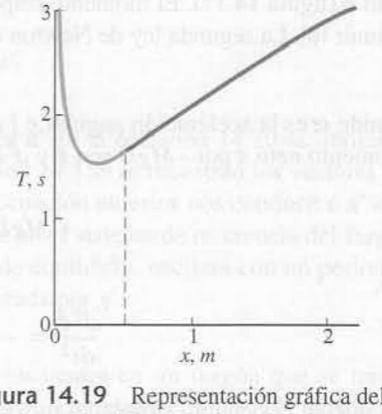


Figura 14.19 Representación gráfica del periodo en función de la distancia al centro de masas. Si $x > 0{,}5$ m el pivote está fuera del extremo de la barra.

EJEMPLO 14.11 | Revisión del ejercicio de la barra que oscila

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Determinar el valor de x en el ejemplo 14.10 para que el periodo sea mínimo.

Planteamiento del problema En el valor de x para el cual T es un mínimo, $dT/dx = 0$.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. El periodo viene dado por el resultado del apartado (b) del ejercicio 14.10 en el cual $T = 2\pi\sqrt{Z/g}$, donde $Z = (\frac{1}{12}L^2 + x^2)/x$. Determinar el periodo cuando x se acerca a cero y a infinito.	Cuando $x \to 0$, $Z \to \infty$, y $T \to \infty$. Cuando $x \to \infty$, $Z \to \infty$, y $T \to \infty$.

2. El periodo tiende a infinito cuando x se acerca a cero y a infinito. En algún punto del intervalo $0 < x < \infty$ el periodo es un mínimo. Para determinar el mínimo, se impone $dT/dx = 0$ y se despeja x.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dZ}\frac{dZ}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}Z^{-1/2}\frac{dZ}{dx}$$

$Z > 0$ en todo el intervalo $0 < x < \infty$, con lo cual $\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = 0$

$$\frac{dZ}{dx} = 0 \Rightarrow x = \boxed{\frac{L}{\sqrt{12}} = 0{,}289L}$$

14.4 Oscilaciones amortiguadas

Si un muelle o un péndulo oscilan libremente, siempre acaban parándose porque las fuerzas de rozamiento disipan su energía mecánica. Un movimiento con estas características se denomina movimiento **amortiguado.** Si el amortiguamiento es muy grande, como por ejemplo en el caso de un péndulo que oscila en melaza, el oscilador ni tan solo ejecuta una oscilación completa, sino que se mueve hacia la posición de equilibrio con una velocidad que se aproxima a cero cuando el objeto se acerca a dicha posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina **sobreamortiguado.** Si, en cambio, el amortiguamiento del movimiento es débil, de modo que la amplitud decrece lentamente con el tiempo, como le ocurre a un niño que se divierte en un columpio de un parque cuando su madre deja de empujarle, el movimiento resultante se denomina **subamortiguado**. Cuando se tiene el amortiguamiento mínimo para que se produzca un movimiento no oscilatorio se dice que el sistema está **amortiguado críticamente.** (Cualquier amortiguamiento inferior produce un movimiento subamortiguado.)

Movimiento subamortiguado La fuerza de amortiguamiento ejercida por un oscilador como el que se muestra en la figura 14.20*a* puede representarse mediante la expresión empírica

$$\mathbf{F}_d = -b\mathbf{v}$$

en donde b es una constante. Un sistema que cumple la ecuación anterior se dice que está amortiguado linealmente. El análisis siguiente corresponde a este tipo de movimiento. La fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección del movimiento, por lo tanto, realiza un trabajo negativo y hace que la energía mecánica del sistema disminuya. Esta energía es proporcional al cuadrado de la amplitud (ecuación 14.17) y el cuadrado de la amplitud disminuye exponencialmente a medida que aumenta el tiempo. Por lo tanto,

$$A^2 = A_0^2 e^{-t/\tau} \qquad (14.34)$$

DEFINICIÓN—CONSTANTE DE TIEMPO

en donde A es la amplitud, A_0 es la amplitud cuando $t = 0$, y τ es el **tiempo de extinción** o **constante de tiempo.** La constante de tiempo es el tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor e.

El movimiento de un sistema amortiguado puede deducirse de la segunda ley de Newton. Para un objeto de masa m ligado a un muelle de constante de fuerza k, la fuerza neta es $-kx - b(dx/dt)$. Igualando la fuerza neta con el producto de la masa por la aceleración d^2x/dt^2, se obtiene

$$-kx - b\,\frac{dx}{dt} = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (14.35)$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN OSCILADOR AMORTIGUADO

La solución exacta de esta ecuación puede determinarse utilizando los métodos conocidos de las ecuaciones diferenciales. La solución para el caso subamortiguado es

$$x = A_0 e^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \delta) \qquad (14.36)$$

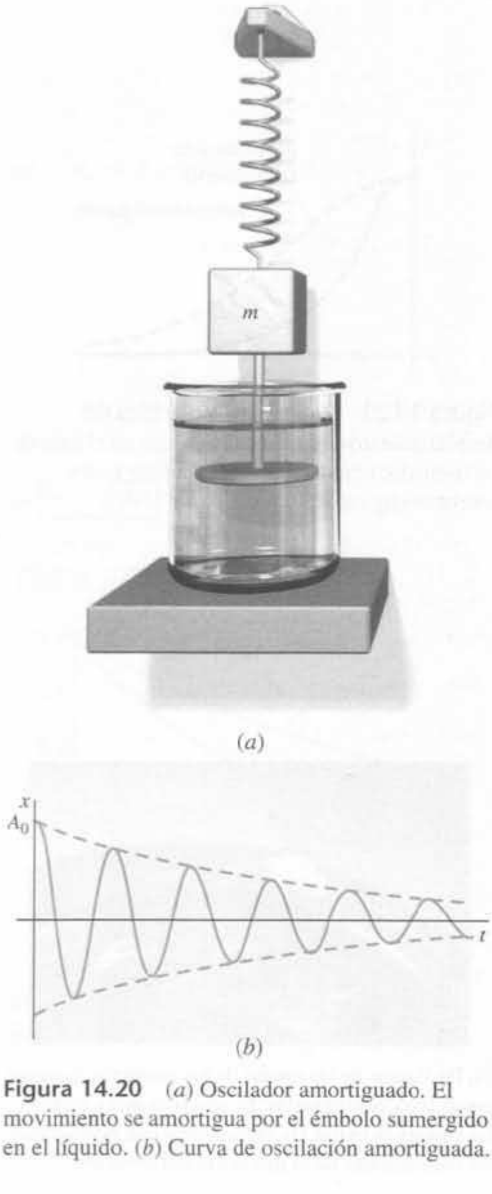


Figura 14.20 (*a*) Oscilador amortiguado. El movimiento se amortigua por el émbolo sumergido en el líquido. (*b*) Curva de oscilación amortiguada.

Para amortiguar la oscilación de esta camioneta se utilizan los amortiguadores (cilindros amarillos) que absorven los choques.

en donde A_0 es la amplitud máxima. La frecuencia ω' viene dada por

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} \tag{13.37}$$

en donde ω_0 es la frecuencia cuando no hay amortiguamiento ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$ para una masa ligado a un muelle). Para un amortiguamiento débil, $b/2\,m\omega_0 << 1$ y ω' es aproximadamente igual a ω_0. Las curvas de trazos de la figura 14.20 corresponden a $x = A$ y $x = -A$, en donde A viene dado por

$$A = A_0 e^{-(b/2m)t} \tag{14.38}$$

Elevando al cuadrado los dos términos de esta ecuación y comparando el resultado con la ecuación 14.34 podemos identificar

$$\tau = \frac{m}{b} \tag{14.39}$$

Si la constante de amortiguamiento b crece gradualmente, la frecuencia angular ω' disminuye hasta hacerse igual a cero en el valor crítico

$$b_c = 2\,m\omega_0 \tag{14.40}$$

Figura 14.21 Representación gráfica del desplazamiento en función del tiempo en el caso de un oscilador amortiguado críticamente y otro sobreamortiguado.

Si b es igual o mayor que b_c, el sistema no oscila. Cuando b es mayor que b_c el sistema es **sobreamortiguado**. Cuanto menor sea b, más rápidamente volverá el objeto al equilibrio. Cuando $b = b_c$, se dice que el sistema está **amortiguado críticamente**, y vuelve a su posición de equilibrio en el tiempo más breve posible sin oscilar. La figura 14.21 muestra el desplazamiento en función del tiempo correspondiente a un oscilador amortiguado críticamente y sobreamortiguado. En muchas aplicaciones prácticas se usa un amortiguador crítico o casi crítico para evitar las oscilaciones y sin embargo conseguir que el sistema vuelva al equilibrio rápidamente. Un ejemplo es el empleo de amortiguadores (sistemas que absorben choques) para amortiguar las oscilaciones de un automóvil sobre sus muelles. Esto puede verse empujando la parte delantera o trasera de un coche. Si el coche vuelve al equilibrio sin oscilar, el sistema de absorción de choques está amortiguado críticamente o sobreamortiguado. (Normalmente en un vehículo vacío se producen una o dos oscilaciones antes de que el sistema quede en reposo, lo que indica que la constante de tiempo está justo bajo su valor crítico.)

Como la energía de un oscilador es proporcional al cuadrado de la amplitud, la energía de un oscilador subamortiguado (valor promediado en un ciclo) también disminuye exponencialmente con el tiempo:

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(A_0 e^{-(b/2m)t})^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau} \tag{14.41}$$

en donde $E_0 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A_0^2$ y

$$\tau = \frac{m}{b} \tag{14.42}$$

En las llantas de las ruedas de los coches se colocan pesos para equilibrarlas. El objetivo de equilibrar las ruedas es evitar las vibraciones que producirían las oscilaciones de la dirección del vehículo.

Un oscilador amortiguado se describe normalmente por su **factor *Q*** (o factor de calidad).

$$Q = \omega_0 \tau \tag{14.43}$$

DEFINICIÓN —FACTOR Q

El factor Q es adimensional. (Como las dimensiones de ω_0 son las recíprocas del tiempo, $\omega_0\tau$ no tiene diemensiones.) Podemos relacionar Q con la pérdida relativa de energía por ciclo. Diferenciando la ecuación 14.41, se obtiene

$$dE = -\frac{1}{\tau} E_0 e^{-t/\tau}\, dt = -\frac{1}{\tau} E\, dt$$

Si la amortiguación es suficientemente débil para que la pérdida de energía por ciclo sea pequeña, podemos reemplazar dE por ΔE y dt por el periodo T. Por lo tanto $|\Delta E|/E$ en un ciclo (un periodo) viene dado por

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q} \tag{14.44}$$

o sea,

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{ciclo}}}, \quad \frac{|\Delta E|}{E} << 1 \tag{14.45}$$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE Q PARA UN AMORTIGUAMIENTO LEVE

Así pues, Q es inversamente proporcional a la pérdida relativa de energía por ciclo.

EJEMPLO 14.12 | Componiendo música

Cuando se pulsa la nota do-central en el piano (frecuencia 262 Hz), la mitad de su energía se pierde en 4 segundos. (*a*) ¿Cuál es el tiempo de extinción τ? (*b*) ¿Cuál es el factor Q de esta cuerda de piano? (*c*) ¿Cuál es la pérdida de energía relativa por ciclo?

Planteamiento del problema (*a*) Utilizamos $E = E_0 e^{-t/\tau}$ haciendo $E = \frac{1}{2}E_0$. (*b*) El valor Q puede determinarse entonces a partir del tiempo de extinción y de la frecuencia.

(a) 1. Igualamos la energía de la nota pulsada en el tiempo $t = 4$ s con la mitad de su energía original:

$E = E_0 e^{-t/\tau}$ de modo que $\frac{1}{2}E_0 = E_0 e^{-4\text{ s}/\tau}$

$\frac{1}{2} = e^{-4\text{ s}/\tau}$

2. Despejar el tiempo tomando logaritmos neperianos de la expresión anterior:

$\ln\frac{1}{2} = -\frac{4\text{ s}}{\tau}$

despejando τ se obtiene

$\tau = \frac{4\text{ s}}{\ln 2} = \boxed{5{,}77\text{ s}}$

(b) Calcular Q a partir de τ y ω_0:

$Q = \omega_0 \tau = 2\pi f \tau$

$= 2\pi(262\text{ Hz})(5{,}77\text{ s}) = \boxed{9{,}50 \times 10^3}$

(c) La pérdida de energía relativa en un periodo viene dada por la ecuación 14.44 y la frecuencia por $f = 1/T$:

$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{f\tau} = \frac{1}{(262\text{ Hz})(5{,}77\text{ s})} = \boxed{6{,}61 \times 10^{-4}}$

Comprobar el resultado El factor Q también puede calcularse a partir de $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}} = 2\pi/(6{,}61 \times 10^{-4}) = 9{,}50 \times 10^3$. Obsérvese que la pérdida de energía relativa después de 4 s no coincide con el producto del número de ciclos (4 × 262) por la pérdida de energía relativa por ciclo, ya que el decrecimiento de energía relativa no es constante, sino exponencial.

Observación La figura 14.22 muestra la amplitud relativa A/A_0 y la energía relativa E/E_0 en función del tiempo de la oscilación de una cuerda de piano después de pulsar la nota do-central. Al cabo de los 4 s, la amplitud ha disminuido a unas 0,7 veces su valor inicial y la energía, proporcional al cuadrado de la amplitud, es aproximadamente la mitad de su valor inicial.

Obsérvese que Q es bastante grande. Es fácil estimar τ y Q de diversos sistemas oscilantes. Dése un pequeño golpe a un vaso de cristal y obsérvese el tiempo que tarda el sonido en extinguirse. Un tiempo mayor supone un mayor valor de τ y Q y menor amortiguamiento. Los vasos de vidrio del laboratorio suelen tener un Q elevado. Probar con una taza de plástico. ¿Cómo es el amortiguamiento comparado con el vaso del laboratorio?

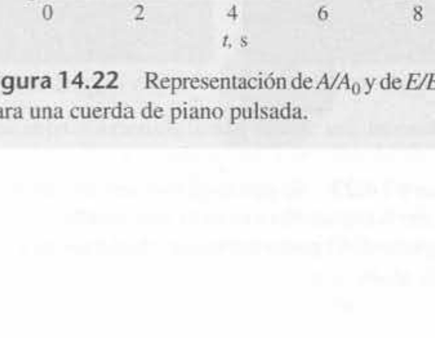


Figura 14.22 Representación de A/A_0 y de E/E_0 para una cuerda de piano pulsada.

En función de Q, la frecuencia exacta de un oscilador subamortiguado es

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \tag{14.46}$$

Como b es pequeña (Q es grande) para un oscilador débilmente amortiguado (ejemplo 14.12), vemos que ω' es casi igual a ω_0.

Mediante consideraciones energéticas podemos entender cualitativamente el comportamiento de un oscilador amortiguado. La potencia disipada por la fuerza amortiguadora es igual a la variación instantánea de la energía mecánica total por unidad de tiempo

$$P = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_\mathrm{d} \cdot \mathbf{v} = -b\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -bv^2 \qquad (14.47)$$

En un oscilador ligeramente amortiguado, la energía mecánica total disminuye poco a poco con el tiempo. La energía cinética media es igual a la mitad de la energía total

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_\mathrm{m} = \frac{1}{2}E \qquad \text{o} \qquad (v^2)_\mathrm{m} = \frac{E}{m}$$

Dándose impulso en el columpio, la persona de la fotografía transfiere parte de su energía interna la energía mecánica del oscilador.

Si sustituimos $(v^2)_\mathrm{m} = E/m$ por v^2 en la ecuación 14.47, resulta

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 \approx -b(v^2)_\mathrm{m} = -\frac{b}{m}E \qquad (14.48)$$

Reordenando la ecuación 14.48 nos queda

$$\frac{dE}{E} = -\frac{b}{m}dt$$

ecuación que integrada tiene la solución

$$E = E_0 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

que es la ecuación 14.41.

14.5 Oscilaciones forzadas y resonancia

Para mantener en marcha un sistema amortiguado debemos ir suministrando energía al sistema. Cuando se lleva a cabo esto, se dice que el oscilador es forzado. Por ejemplo, al sentarse en un columpio y hacerlo oscilar, el suministro de energía se realiza moviendo el cuerpo y las piernas hacia delante y hacia atrás, de forma que se convierte en un oscilador forzado. Si se introduce energía en el sistema a un ritmo mayor del que se disipa, la energía aumenta con el tiempo, lo cual se aprecia por un aumento de la amplitud del movimiento. Si la energía se introduce al mismo ritmo que se disipa, la amplitud permanece constante con el tiempo. En este caso se dice que el oscilador está en estado estacionario.

Una manera de suministrar energía a un sistema formado por un objeto que cuelga de un muelle vertical es mover el punto de soporte hacia arriba y hacia abajo, con un movimiento armónico simple de frecuencia ω (figura 14.23). Al principio el movimiento es complicado, pero finalmente alcanza un estado estacionario en el que el sistema oscila con la misma frecuencia de la fuerza externa impulsora y con amplitud constante y, por lo tanto, con energía constante. En el estado estacionario, la energía introducida en el sistema por la fuerza impulsora durante un ciclo es igual a la disipada en el ciclo debido al amortiguamiento.

Figura 14.23 Se puede ejercer una fuerza externa sobre un objeto sujeto a un muelle desplazando el punto del soporte hacia arriba y hacia abajo.

La amplitud y, por lo tanto, la energía de un sistema en estado estacionario, no sólo depende de la amplitud del sistema impulsor sino también de su frecuencia. Se define la **frecuencia natural** de un oscilador, ω_0 como la que tendría si no estuviesen presentes ni el amortiguamiento ni el sistema impulsor. (Por ejemplo, la frecuencia angular natural de un muelle es $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.) Si la frecuencia impulsora es aproximadamente igual a la frecuencia natural del sistema, éste oscilará con una amplitud relativamente grande. Por ejemplo, si el soporte de la figura 14.23 oscila con la frecuencia natural del sistema masa-muelle, la masa oscilará con una amplitud mucho mayor que si el soporte oscila con frecuencias mayores o menores. Este fenómeno se denomina **resonancia**. Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural del oscilador, la energía absorbida por éste en cada ciclo es máxima. Por ello la frecuencia natural del sistema se denomina **frecuencia de resonancia** del mismo. (Matemáticamente es más conveniente utilizar la frecuencia angular ω que la frecuencia $f = \omega/(2\pi)$. Como ω y f son proporcionales, la mayoría de las afirmaciones concernientes a la frecuencia angular también son válidas para la frecuencia. En descripciones verbales normalmente se omite la palabra angular siempre que esta omisión no provoque confusión.) En la figura 14.24 se muestra un diagrama de la potencia media transmitida a un oscilador en función de la frecuencia de la fuerza impulsora para dos valores diferentes del amortiguamiento. Estas curvas reciben el nombre de **curvas de resonancia**. Cuando el amortiguamiento es pequeño (el valor de Q es alto), la anchura del pico de la curva de resonancia es correspondientemente estrecha y se dice que la resonancia es aguda. Cuando el amortiguamiento es grande, la curva de resonancia es ancha. La anchura $\Delta\omega$ de cada curva de resonancia, indicada en la figura, es la anchura a la mitad de la altura máxima. Para un amortiguamiento relativamente pequeño, se demuestra que el cociente entre la anchura de resonancia y la frecuencia de resonancia es igual al valor inverso del factor Q (véase problema 126):

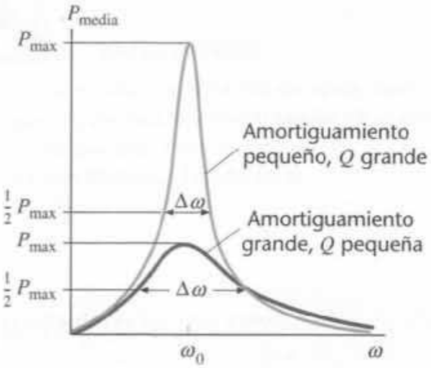


Figura 14.24 Resonancia en un oscilador. La anchura $\Delta\omega$ del pico de resonancia para un oscilador que tiene una Q grande es pequeña comparada con la frecuencia natural ω_0.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \tag{14.49}$$

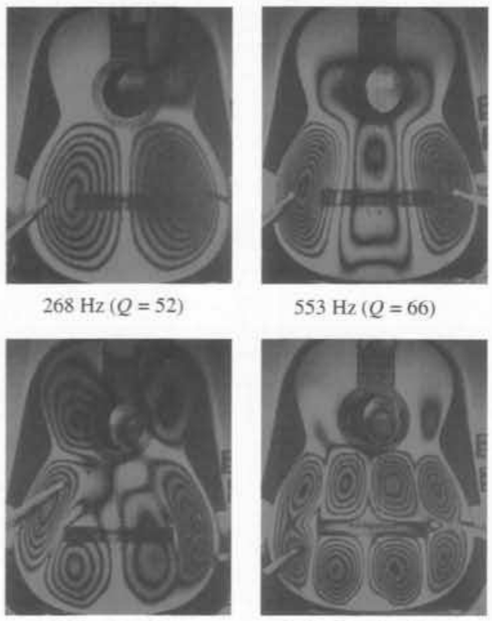
ANCHURA DE RESONANCIA PARA UN AMORTIGUAMIENTO PEQUEÑO

Por lo tanto, el factor Q es una medida directa de la agudeza de la resonancia.

Puede hacerse un experimento simple que demuestre la resonancia. Se sostiene una regla por un extremo con dos dedos, de modo que actúe como un péndulo. (Si no se dispone de una regla, se puede usar cualquier otro objeto conveniente, como un palo de golf.) Se suelta el otro extremo desde una cierta distancia angular y se observa la frecuencia natural del movimiento. Después se mueve la mano adelante y atrás horizontalmente para darle impulso con la frecuencia natural de la regla. Aunque la amplitud del movimiento de la mano sea pequeña, la regla oscilará con una amplitud considerable. Si la mano se mueve adelante y atrás a una frecuencia el doble o triple de la frecuencia natural, se observará una disminución de la amplitud de la regla oscilante.

Existen muchos ejemplos familiares de resonancia. Cuando nos sentamos en un columpio aprendemos intuitivamente a mover el cuerpo con la misma frecuencia que la natural del columpio. Muchas máquinas vibran porque tienen piezas en rotación que no están perfectamente equilibradas. (Observar, por ejemplo, una máquina de lavar en el periodo de centrifugado.) Si se sujeta una de estas máquinas a una estructura que pueda vibrar, dicha estructura se convierte en un sistema oscilatorio forzado que puede iniciar su movimiento por la acción de la máquina. Los técnicos han hecho grandes esfuerzos para equilibrar las partes giratorias de estas máquinas u otras semejantes, amortiguando sus vibraciones y aislándolas de los edificios que las soportan.

Puede romperse un vaso con bajo amortiguamiento mediante una onda sonora intensa con una frecuencia igual o muy próxima a la frecuencia natural de vibración del mismo. Este efecto se emplea a menudo en demostraciones de física utilizando un oscilador de audio y un amplificador adecuado.



268 Hz ($Q = 52$) 553 Hz ($Q = 66$) 672 Hz ($Q = 61$) 1010 Hz ($Q = 80$)

Los objetos extensos tienen más de una frecuencia de resonancia. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, se transmite la energía al cuerpo del instrumento. Las oscilaciones del cuerpo de la guitarra, acopladas a las oscilaciones de la masa del aire que encierra, producen los diagramas de resonancia que se indican en estas figuras.

*Tratamiento matemático de la resonancia

Vamos a estudiar matemáticamente el oscilador forzado suponiendo que, además de estar sometido a una fuerza restauradora y a una fuerza de amortiguamiento, está sujeto a una fuerza externa (fuerza impulsora) que varía armónicamente con el tiempo:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t \tag{14.50}$$

en donde F_0 y ω son el módulo y la frecuencia angular de la fuerza impulsora. Generalmente esta frecuencia no está relacionada con la frecuencia angular natural del sistema ω_0.

La segunda ley de Newton aplicada a un objeto de masa m atado a un muelle de constante de fuerza k y sujeto a una fuerza amortiguadora $-bv_x$ y a una fuerza externa $F_0 \cos \omega t$, nos da

$$\sum F_x = ma_x$$

$$-kx - bv_x + F_0 \cos \omega t = m\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

en donde se ha usado que $a_x = d^2x/dt^2$. Sustituyendo $m\omega_0^2$ por k (ecuación 14.8) y ordenando los términos se obtiene

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t \tag{14.51}$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN OSCILADOR FORZADO

Abordaremos la solución general de la ecuación 14.51 cualitativamente. La solución de la ecuación consta de dos partes, la **solución transitoria** y la **solución estacionaria**. La parte transitoria de la solución es idéntica a la de un oscilador amortiguado no forzado dada en la ecuación 14.36. Las constantes de esta solución dependen de las condiciones iniciales. Transcurrido cierto tiempo, esta parte de la solución se hace despreciable porque la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo. De este modo sólo queda la solución estacionaria, que puede escribirse en la forma

$$x = A \cos (\omega t - \delta) \tag{14.52}$$

POSICIÓN DE UN OSCILADOR FORZADO

en donde la frecuencia angular ω es la misma que la de la fuerza impulsora. La amplitud A viene dada por

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \tag{14.53}$$

AMPLITUD DE UN OSCILADOR FORZADO

y la constante de fase δ viene dada por

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{14.54}$$

CONSTANTE DE FASE DE UN OSCILADOR FORZADO

Comparando las ecuaciones 14.50 y 14.52, podemos ver que el desplazamiento del sistema y la fuerza impulsora oscilan con la misma frecuencia pero difieren en fase en δ. Cuando la frecuencia impulsora ω es mucho menor que la frecuencia natural ω_0, $\delta \approx 0$, como puede verse a partir de la ecuación 14.54. En la resonancia, $\delta = \pi/2$. Cuando ω es mucho mayor que ω_0, $\delta \approx \pi$. Al comienzo de este capítulo hemos visto que el desplazamiento de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple viene dado por $x = A \cos (\omega t + \delta)$ (ecuación 14.4). Esta ecuación es idéntica a la ecuación 14.52 excepto en el signo que precede a la constante δ. La fase de un oscilador forzado siempre va retrasada con respecto a la fase de la fuerza impulsora. El signo negativo de la ecuación 14.52 asegura que δ siempre es positivo.

En el experimento simple de la regla impulsada por el movimiento de la mano adelante y atrás, obsérvese que, en la resonancia, la oscilación de la mano no está en fase ni en desfase de 180° con la oscilación de la regla. Si se mueve la mano adelante y atrás con una frecuencia varias veces la frecuencia natural de la regla, el movimiento en el estado estacionario de ésta se habrá desfasado respecto a la mano casi 180°.

La velocidad del objeto en estado estacionario se obtiene derivando x respecto a t:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen} (\omega t - \delta)$$

En la resonancia, $\delta = \pi/2$, y la velocidad está en fase con la fuerza impulsora:

$$v = -A\omega \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = +A\omega \cos \omega t$$

Así pues, en la resonancia, el objeto siempre se está moviendo en el sentido en que actúa la fuerza impulsora, como era de esperar para que se consiguiese el máximo aporte de energía. La amplitud de velocidad ωA es máxima para $\omega = \omega_0$.

EXPLORANDO

¿Tienen solución numérica las ecuaciones para los osciladores amortiguados y forzados? Investigue esto y mucho más en www.whfreeman.com/tipler5e

EJEMPLO 14.13 | Un objeto en un muelle

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un objeto de masa 1,5 kg situado sobre un muelle de constante de fuerza 600 N/m pierde el 3% de su energía en cada ciclo. El sistema viene impulsado por una fuerza sinusoidal con un valor máximo de $F_0 = 0{,}5$ N. (*a*) ¿Cuál es el valor de Q para este sistema? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia (angular) de resonancia? (*c*) Si la frecuencia impulsora varía, ¿cuál es la anchura $\Delta\omega$ de la resonancia? (*d*) ¿Cuál es la amplitud en la resonancia? (*e*) ¿Cuál es la amplitud de la frecuencia impulsora si $\omega = 19$ rad/s?

Planteamiento del problema La pérdida de energía por ciclo es del 3%, por lo que la amortiguación es débil. El factor Q puede determinarse mediante la expresión $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}}$ (ecuación 14.45) y después utilizar este resultado y $\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q$ (ecuación 14.49) para determinar la anchura de la resonancia $\Delta\omega$. La frecuencia de resonancia es la frecuencia natural. La amplitud puede determinarse a partir de la ecuación 14.53 tanto en resonancia como fuera de resonancia, con la constante de amortiguamiento calculada mediante Q utilizando la definición de Q (ecuación 14.43) $Q = \omega_0\tau = \omega_0 m/b$.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) El amortiguamiento es débil. Relacionar Q con la pérdida de energía usando la ecuación 14.45 y despejar Q.	$Q \approx \dfrac{2\pi}{(\lvert\Delta E\rvert/E)_{\text{ciclo}}} = \dfrac{2\pi}{0{,}03} = \boxed{209}$
(b) Relacionar la frecuencia de resonancia con la frecuencia natural del sistema.	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \boxed{20 \text{ rad/s}}$
(c) Relacionar la anchura de la resonancia $\Delta\omega$ con Q.	$\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q} = \boxed{0{,}0957 \text{ rad/s}}$
(d) 1. Escribir una expresión para la amplitud A válida para cualquier frecuencia impulsora ω.	$A(\omega) = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$
2. Aplicar $\omega = \omega_0$ para el cálculo de A en la resonancia.	$A(\omega_0) = \dfrac{F_0}{b\omega_0}$
3. Utilizar la ecuación 14.43 para relacionar la constante de amortiguamiento b con Q.	$b = \dfrac{m\omega_0}{Q} = 0{,}144$ kg/s
4. Utilizar los resultados de los dos pasos previos para calcular la amplitud en la resonancia.	$A(\omega_0) = \dfrac{F_0}{b\omega_0} = \boxed{17{,}4 \text{ cm}}$
(e) Calcular la amplitud para $\omega = 19$ rad/s. (Podemos omitir las unidades para simplificar la ecuación. Como todas las magnitudes se expresan en unidades del SI, A se expresa en metros).	$A(19\ \text{s}^{-1}) = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{1{,}5^2(20^2-19^2)^2 + 0{,}144^2(19)^2}} = \boxed{0{,}854 \text{ cm}}$

Observación Para una separación de 1 rad/s del valor ω de la resonancia, la amplitud disminuye en un factor 20. Esto no es sorprendente, ya que la anchura de la resonancia es sólo de 0,0957 rad/s. Obsérvese que fuera de la resonancia, el término $b^2\omega^2$ es despreciable comparado con el otro término del denominador de la expresión de A. Cuando $\omega - \omega_0$ es superior en varias veces la anchura $\Delta\omega$ a mitad de altura, como en este ejemplo, podemos despreciar el término $b^2\omega^2$ y calcular A según la expresión $A \approx F_0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$. La figura 14.25 muestra la amplitud en función de la frecuencia impulsora ω. Obsérvese que la escala horizontal corresponde a un rango pequeño de ω.

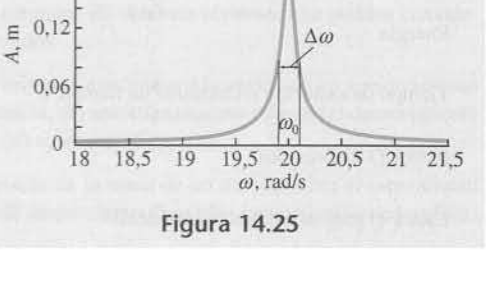


Figura 14.25

Resumen

1 El movimiento armónico simple tiene lugar cuando la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento contado desde el equilibrio. Tiene numerosas aplicaciones en el estudio de las oscilaciones, ondas, circuitos eléctricos y de la dinámica molecular.

2 La resonancia es un fenómeno importante en múltiples áreas de la física. Tiene lugar cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es similar a la frecuencia natural del sistema oscilante.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Movimiento armónico simple	En el movimiento armónico simple, la fuerza neta y la aceleración son proporcionales al desplazamiento, pero tienen sentido contrario a éste.	
Función desplazamiento	$x = A\cos(\omega t + \delta)$	(14.4)
Velocidad	$v = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$	(14.5)
Aceleración	$a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$	(14.6)
	$a_x = -\omega^2 x$	(14.7)
Frecuencia angular	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$	(14.11)
Energía total	$E_{\text{total}} = E_c + U = \frac{1}{2}kA^2$	(14.17)
Energía cinética y potencial medias	$E_{c_m} = U_m = \frac{1}{2}E_{\text{total}}$	(14.18)
Movimiento circular	Cuando una partícula se mueve sobre una circunferencia con velocidad constante, la proyección de la posición de la partícula sobre un diámetro de esa circunferencia se mueve con movimiento armónico simple.	
Movimiento general próximo al equilibrio	Si un objeto experimenta un pequeño desplazamiento a partir de cualquier posición de equilibrio estable, oscila alrededor de esta posición con movimiento armónico simple.	
2. Frecuencias angulares para diversos sistemas		
Masa ligada a un muelle	$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	(14.8)
Péndulo simple	$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$	(14.27)
*Péndulo físico	$\omega = \sqrt{\dfrac{MgD}{I}}$	(14.32)
	en donde D es la distancia del centro de masas al eje de rotación e I es el momento de inercia respecto a dicho eje.	
3. Oscilaciones amortiguadas	En las oscilaciones de los sistemas reales, el movimiento está amortiguado debido a fuerzas disipativas. Si el amortiguamiento es mayor que cierto valor crítico, el sistema no oscila sino que regresa simplemente a su posición de equilibrio si ha sido perturbado. El movimiento de un sistema ligeramente amortiguado es muy semejante al movimiento armónico simple pero tiene una amplitud que disminuye exponencialmente con el tiempo.	
Frecuencia	$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$	(14.46)
Amplitud	$A = A_0 e^{-(b/2m)t}$	(14.38)
Energía	$E = E_0 e^{-t/\tau}$	(14.41)
Tiempo de extinción o constante de tiempo	$\tau = \dfrac{m}{b}$	(14.42)
Factor Q (definición)	$Q = \omega_0 \tau$	(14.43)
Factor Q para amortiguamiento débil	$Q = \dfrac{2\pi}{(\lvert\Delta E\rvert/E)_{\text{ciclo}}}, \quad \dfrac{\lvert\Delta E\rvert}{E} << 1$	(14.45)

4. Oscilaciones forzadas

Cuando un sistema ligeramente amortiguado ($b < b_c$) se ve forzado a oscilar por la acción de una fuerza externa que varía sinusoidalmente con el tiempo, $F_{ext} = F_0 \cos \omega t$, el sistema oscila con una frecuencia ω igual a la del sistema impulsor y con una amplitud A que depende de esta frecuencia.

Frecuencia de resonancia

$$\omega = \omega_0$$

Anchura de resonancia para amortiguamiento débil

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \tag{14.49}$$

*Función desplazamiento

$$x = A \cos(\omega t - \delta) \tag{14.52}$$

*Amplitud

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \tag{14.53}$$

*Constante de fase

$$\mathrm{tg}\, \delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{14.54}$$

Problemas

- ● Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- ●● Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- ●●● Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

Problemas conceptuales

1 ● ¿Cuál es el módulo de la aceleración de un oscilador de amplitud A y frecuencia f cuando el módulo de su velocidad es máximo? ¿Y cuándo es máximo su desplazamiento?

2 ● ¿Pueden tener el mismo sentido el desplazamiento y la aceleración de un oscilador armónico simple? ¿Y el desplazamiento y la velocidad? ¿Y la aceleración y la velocidad? Razonar las respuestas.

3 ● Verdadero o falso:

(*a*) En el movimiento armónico simple, el periodo es proporcional al cuadrado de la amplitud.
(*b*) En el movimiento armónico simple, la frecuencia no depende de la amplitud.
(*c*) Si la aceleración de una partícula que se mueve en una dimensión es proporcional al desplazamiento pero de sentido opuesto, el movimiento es armónico simple.

4 ● SSM Si la amplitud de un oscilador armónico simple se triplica, ¿en qué factor se modifica la energía?

5 ●● Un objeto sujeto a un muelle tiene un movimiento armónico simple de amplitud 4,0 cm. Cuando el objeto se encuentra a 2,0 cm de la posición de equilibrio, ¿qué fracción de su energía total es energía potencial? (*a*) Un cuarto. (*b*) Un tercio. (*c*) La mitad. (*d*) Dos tercios. (*e*) Tres cuartos.

6 ● Verdadero o falso:

(*a*) El periodo de un objeto que oscila sobre un determinado muelle es el mismo independientemente de que el muelle sea vertical u horizontal.
(*b*) El módulo máximo de la velocidad de un objeto que oscila con amplitud A sobre un determinado muelle es el mismo independientemente de que el muelle sea vertical u horizontal.

7 ● Verdadero o falso: El movimiento de un péndulo simple es armónico simple para cualquier desplazamiento angular inicial.

8 ● Verdadero o falso: El movimiento de un péndulo simple es periódico para cualquier desplazamiento angular inicial.

9 ●● SSM Dos carros idénticos están unidos por un muelle en una vía de aire sin rozamiento. De repente uno de ellos recibe un golpe que lo separa del otro. El movimiento resultante de los carros es muy irregular: primero se mueve uno, que se para cuando el otro inicia el movimiento, el cual a su vez se para de modo que el primer carro se pone en movimiento de nuevo y así sucesivamente. Explicar este movimiento de forma cualitativa.

10 ●● SSM Cuando sube la temperatura la cuerda de un péndulo simple se alarga como consecuencia de la dilatación. ¿Cómo afectaría esto al funcionamiento de un reloj que funcionara con un péndulo simple?

11 ● Verdadero o falso: La energía mecánica de un oscilador no forzado, amortiguado, decrece exponencialmente con el tiempo.

12 ● Verdadero o falso:

(*a*) La resonancia tiene lugar cuando la frecuencia impulsora es igual a la frecuencia natural.
(*b*) Si el valor de Q es alto, la resonancia es aguda.

13 ● Dar algunos ejemplos de sistemas comunes que pueden considerarse como osciladores forzados.

14 ● Una copa de cristal que estalla por la acción de un sonido intenso es un ejemplo de (*a*) resonancia, (*b*) amortiguamiento crítico, (*c*) decrecimiento exponencial de la energía, (*d*) sobreamortiguamiento.

15 ● SSM El efecto de la masa de un muelle sobre el movimiento de un objeto atado a él suele despreciarse. Describir cualitativamente su efecto cuando se tiene en cuenta.

16 ●● Una lámpara que cuelga del techo de un vagón-club de un tren oscila con periodo T_0 cuando el tren está en reposo. El periodo será (emparejar las columnas derecha e izquierda)

1. mayor que T_0 cuando	A. el tren se mueve horizontalmente con velocidad constante.
2. menor que T_0 cuando	B. el tren se mueve por una curva de radio R con velocidad v.
3. igual a T_0 cuando	C. el tren asciende por una colina de inclinación θ a velocidad constante.
	D. el tren pasa por una colina de radio de curvatura R con velocidad constante.

17 ●● Dos sistemas masa-muelle oscilan con frecuencias f_A y f_B. Si $f_A = 2f_B$ y las constantes de los dos muelles son iguales, las masas de ambos sistemas cumplen la relación (*a*) $M_A = 4M_B$, (*b*) $M_A = M_B/\sqrt{2}$, (*c*) $M_A = M_B/2$, (*d*) $M_A = M_B/4$.

18 ●● Dos sistemas masa-muelle A y B oscilan de modo que sus energías son iguales. Si $M_A = 2M_B$, ¿cuál de las siguientes fórmulas relaciona las amplitudes de oscilación? (*a*) $A_A = A_B/4$. (*b*) $A_A = A_B/\sqrt{2}$. (*c*) $A_A = A_B$. (*d*) No hay suficiente información para determinar la relación de las amplitudes.

19 ●● Dos sistemas masa-muelle A y B oscilan de modo que sus energías son iguales. Si $k_A = 2k_B$, ¿cuál de las siguientes fórmulas relaciona las amplitudes de oscilación? (*a*) $A_A = A_B/4$. (*b*) $A_A = A_B/\sqrt{2}$. (*c*) $A_A = A_B$. (*d*) No hay suficiente información para determinar la relación de las amplitudes.

20 ●● El péndulo A tiene una lenteja de masa M_A y longitud L_A; el péndulo B tiene una lenteja de masa M_B y longitud L_B. Si el periodo de A es doble al de B, será (*a*) $L_A = 2L_B$ y $M_A = 2M_B$. (*b*) $L_A = 4L_B$ y $M_A = M_B$. (*c*) $L_A = 4L_B$ cualquiera que sea la relación M_A/M_B. (*d*) $L_A = \sqrt{2}\,L_B$ cualquiera que sea la relación M_A/M_B.

Aproximaciones y estimaciones

21 ●● Un niño se está columpiando en un columpio. Si no se le suministra energía mecánica, la amplitud de su oscilación disminuye un factor $1/e$ cada ocho periodos. Estimar el factor Q para este sistema.

22 ●● SSM (*a*) Estimar el periodo natural de oscilación del batir de brazos de una persona cuando camina, suponiendo que no lleva ningún peso. (*b*) Estimar el periodo natural de oscilación si la persona mueve una cartera muy pesada. Obsérvese cómo camina la gente y estímese si estos dos cálculos se ajustan a lo que se percibe en el mundo real.

Movimiento armónico simple

23 ● iSOLVE La posición de una partícula viene dada por $x = (7\text{ cm})\cos 6\pi t$, en donde t viene dado en segundos. Determinar (*a*) la frecuencia, (*b*) el periodo y (*c*) la amplitud del movimiento de la partícula. (*d*) ¿Cuál es el primer instante después de $t = 0$ en que la partícula está en su posición de equilibrio? ¿En qué sentido se está moviendo en ese instante?

24 ● ¿Cuál es la constante de fase δ de la ecuación 14.4 si la posición de la partícula oscilante en el instante $t = 0$ es (*a*) 0, (*b*) $-A$, (*c*) A, (*d*) $A/2$?

25 ● SSM Una partícula de masa m empieza estando en reposo en $x = +25$ cm y oscila alrededor de su posición de equilibrio en $x = 0$ con un periodo de 1,5 s. Escribir las ecuaciones para (*a*) la posición x en función del tiempo t, (*b*) la velocidad v en función de t y (*c*) la aceleración a en función de t.

26 ● Hallar el módulo máximo de (*a*) la velocidad y (*b*) la aceleración de la partícula del problema 23. (*c*) ¿Cuál es la primera vez que la partícula está en $x = 0$ y moviéndose hacia la derecha?

27 ●● Resolver el problema 25 para el caso en que la partícula está inicialmente en $x = 25$ cm y se está moviendo con velocidad $v_0 = +50$ cm/s.

28 ●● El periodo de una partícula oscilante es 8 s y su amplitud 12 cm. En el tiempo $t = 0$ se encuentra en la posición de equilibrio. Determinar la distancia recorrida durante el intervalo (*a*) $t = 0$ a $t = 2$ s, (*b*) $t = 2$ s a $t = 4$ s, (*c*) $t = 0$ a $t = 1$ s y (*d*) $t = 1$ s a $t = 2$ s.

29 ●● El periodo de una partícula oscilante es 8 s. En $t = 0$, la partícula está en reposo en $x = A = 10$ cm. (*a*) Hacer un gráfico de x en función de t. (*b*) Hallar la distancia recorrida en el primer, segundo, tercer y cuarto segundo después de $t = 0$.

30 ●● SSM iSOLVE En las especificaciones militares es frecuente que exijan que los dispositivos electrónicos sean capaces de resistir aceleraciones de $10g = 98{,}1\text{ m/s}^2$. Para asegurarse de que sus productos cumplen con esta especificación, los fabricantes los someten a ensayos en una mesa vibrante que puede hacer vibrar un equipo a diversas frecuencias y amplitudes especificadas. Si un determinado dispositivo se somete a una vibración de 1,5 cm de amplitud, ¿cuál deberá ser su frecuencia para que cumpla con la especificación militar de los $10g$?

31 ●● iSOLVE✓ La posición de una partícula viene dada por $x = 2{,}5\cos \pi t$, en donde x se expresa en metros y t en segundos. (*a*) Determinar la velocidad máxima y la aceleración máxima de la partícula. (*b*) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $x = 1{,}5$ m.

32 ●● SSM (*a*) Demostrar que $A_0 \cos(\omega t + \delta)$ puede escribirse también como $A_s \operatorname{sen}(\omega t) + A_c \cos(\omega t)$, y determinar A_s y A_c en función de A_0 y δ. (*b*) Relacionar A_s y A_c con la posición y la velocidad iniciales de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple.

Movimiento armónico simple y movimiento circular

33 ● iSOLVE Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 40 cm con una velocidad constante de 80 cm/s. Hallar (*a*) la frecuencia y (*b*) el periodo del movimiento. (*c*) Escribir una ecuación para la componente x de la posición de la partícula en función del tiempo t, suponiendo que la partícula está sobre el eje x en el instante $t = 0$.

34 ● SSM Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 15 cm, dando 1 revolución cada 3 s. (*a*) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de la partícula? (*b*) ¿Cuál es su velocidad angular ω? (*c*) Escribir una ecuación para la componente x de la posición de la misma en función de t, suponiendo que está sobre el eje x positivo en el instante $t = 0$.

La energía en el movimiento armónico simple

35 ● Un objeto de 2,4 kg está sujeto a un muelle horizontal de constante de fuerza $k = 4{,}5$ kN/m. El muelle se estira 10 cm desde el equilibrio y se deja en libertad. Determinar su energía total.

36 ● Determinar la energía total de un objeto de 3 kg que oscila sobre un muelle horizontal con una amplitud de 10 cm y una frecuencia de 2,4 Hz.

37 ● Un objeto de 1,5 kg oscila con movimiento armónico simple unido a un muelle de constante de fuerza $k = 500$ N/m. Su velocidad máxima es 70 cm/s. (*a*) ¿Cuál es la energía total? (*b*) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

38 ● Un objeto de 3 kg que oscila unido a un muelle de constante 2 kN/m tiene una energía total de 0,9 J. (*a*) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (*b*) ¿Cuál es su velocidad máxima?

39 ● Un objeto oscila unido a un muelle con una amplitud de 4,5 cm. Su energía total es 1,4 J. ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle?

40 ●● SSM iSOLVE✓ Un objeto de 3 kg oscila sobre un muelle con una amplitud de 8 cm. Su aceleración máxima es $3{,}50\text{ m/s}^2$. Determinar la energía total.

Muelles

41 • Un objeto de 2,4 kg está sujeto a un muelle horizontal de constante de fuerza $k = 4{,}5$ kN/m. El muelle se estira 10 cm desde el equilibrio y se deja en libertad. Determinar (*a*) la frecuencia del movimiento, (*b*) el periodo, (*c*) la amplitud, (*d*) la velocidad máxima y (*e*) la aceleración máxima. (*f*) ¿Cuándo alcanza el objeto por vez primera su posición de equilibrio? ¿Cuál es su aceleración en ese instante?

42 • Responder a las cuestiones del problema 41 para un objeto de 5 kg sujeto a un muelle de constante de fuerza $k = 700$ N/m, teniendo en cuenta que el muelle está inicialmente separado 8 cm de la posición de equilibrio.

43 • Un objeto de 3 kg sujeto a un muelle horizontal oscila con una amplitud $A = 10$ cm y una frecuencia $f = 2{,}4$ Hz. (*a*) ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle? (*b*) ¿Cuál es el periodo del movimiento? (*c*) ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto? (*d*) ¿Cuál es la aceleración máxima del objeto?

44 • SSM iSOLVE ✓ Una persona de 85 kg sube a un coche de masa 2400 kg, con lo cual sus ballestas descienden 2,35 cm. Suponiendo que no hay amortiguamiento, ¿con qué frecuencia vibrará el coche y el pasajero sobre las ballestas?

45 • Un objeto de 4,5 kg oscila sobre un muelle horizontal con una amplitud de 3,8 cm. Su aceleración máxima es de 26 m/s^2. Determinar (*a*) la constante de fuerza k, (*b*) la frecuencia y (*c*) el periodo del movimiento.

46 • Un objeto oscila con una amplitud de 5,8 cm sobre un muelle horizontal de constante de fuerza 1,8 kN/m. Su velocidad máxima es 2,20 m/s. Determinar (*a*) la masa del objeto, (*b*) la frecuencia del movimiento y (*c*) el periodo del movimiento.

47 •• iSOLVE ✓ Un bloque de 0,4 kg que está sujeto a un muelle de constante de fuerza 12 N/m oscila con una amplitud de 8 cm. Determinar (*a*) la velocidad máxima del bloque, (*b*) la velocidad y aceleración del bloque cuando se encuentra a $x = 4$ cm de la posición de equilibrio y (*c*) el tiempo que tarda el bloque en desplazarse de $x = 0$ a $x = 4$ cm.

48 •• SSM Un objeto de masa m está colgado de un muelle vertical de constante 1800 N/m. Cuando se estira de él hacia abajo separándole 2,5 cm del equilibrio y se le deja en libertad desde el reposo, el objeto oscila con una frecuencia de 5,5 Hz. (*a*) Hallar m. (*b*) Hallar cuánto se estira el muelle a partir de su longitud natural cuando el objeto está en equilibrio. (*c*) Escribir expresiones para el desplazamiento x, la velocidad v y la aceleración a en función de t.

49 •• iSOLVE ✓ Un muelle sin deformación cuelga verticalmente y en su extremo se cuelga un cuerpo de masa desconocida que se suelta desde el reposo. Cae 3,42 cm antes de que quede en reposo por primera vez. Hallar el periodo del movimiento.

50 •• Un muelle de constante $k = 250$ N/m se cuelga de un soporte rígido y se une a su extremo inferior un objeto de 1 kg de masa, que se deja en libertad partiendo del reposo cuando el muelle está sin deformar. (*a*) ¿A qué distancia por debajo del punto de partida está la posición de equilibrio del objeto? (*b*) ¿Cuánto desciende el objeto antes de empezar a ascender de nuevo? (*c*) ¿Cuál es el periodo de la oscilación? (*d*) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando alcanza por primera vez su posición de equilibrio? (*e*) ¿Cuándo sucede esto?

51 •• iSOLVE El Arco de St. Luis tiene una altura de 192 m. Supongamos que una atleta de 60 kg salta de la parte más alta del arco con una banda elástica atada a sus pies y alcanza justo el suelo con velocidad cero. Determinar su energía cinética E_c a los 2,00 segundos del salto. (Suponer que la banda elástica obedece la ley de Hooke y despreciar su longitud natural.)

52 •• SSM Una maleta de 20 kg de masa cuelga de dos cuerdas tal como se muestra en la figura 14.26. Cada cuerda se alarga 5 cm cuando la maleta está en equilibrio. Si se estira la maleta un poco hacia abajo y se suelta, ¿cuál será la frecuencia de la oscilación?

Figura 14.26 Problema 52

53 •• Un bloque de 0,12 kg está suspendido de un muelle. Cuando una pequeña piedra de masa 30 g se sitúa sobre el bloque, el muelle se alarga 5 cm más. Con la piedra sobre el bloque, el muelle oscila con una amplitud de 12 cm. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia del movimiento? (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará el bloque en recorrer la distancia entre el punto más bajo y el punto más alto? (*c*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la piedra cuando se encuentra en un punto de máximo desplazamiento hacia arriba?

54 •• Determinar en el problema 53 la máxima amplitud de oscilación con la condición de que la piedra permanezca sobre el bloque.

55 •• Un objeto de masa 2,0 kg está sujeto en la parte superior de un muelle vertical que está anclado en el suelo. La longitud natural del muelle es de 8,0 cm y la longitud del muelle cuando el objeto está en equilibrio es de 5,0 cm. Cuando el objeto está en reposo en su posición de equilibrio, se le da un impulso hacia abajo con un martillo, de tal manera que la velocidad inicial es de 0,3 m/s. (*a*) ¿A que máxima altura, respecto al nivel del suelo, se elevará el objeto? (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en alcanzar la máxima altura la primera vez? (*c*) ¿Volverá el muelle a estar sin compresión? ¿Qué velocidad inicial mínima debe darse al objeto para que el muelle no tenga compresión en un instante dado?

56 •• SSM En un torno, un bloque de 950 kg de masa cuelga del extremo de un cable de 150 GN/m^2 de módulo de Young, 1,5 cm^2 de área transversal y 2,5 m de longitud. (*a*) ¿Cuánto se alargará el cable? (*b*) Suponiendo que el cable se comporta como un muelle simple, ¿cuál es la frecuencia de oscilación del bloque en el extremo del cable?

Energía de un objeto sobre un muelle vertical

57 •• Un cuerpo de 2,5 kg cuelga de un muelle vertical de constante 600 N/m. Oscila con una amplitud de 3 cm. Cuando el cuerpo posee su máximo desplazamiento hacia abajo, encontrar (*a*) la energía total del sistema, (*b*) la energía potencial gravitatoria, y (*c*) la energía potencial del muelle. (*d*) ¿Cuál es la energía cinética máxima del cuerpo? (Escoger $U = 0$ cuando el cuerpo está en equilibrio.)

58 •• iSOLVE Un cuerpo de 1,5 kg, que alarga un muelle en 2,8 cm respecto a su longitud natural cuando cuelga de él en reposo, oscila con una amplitud de 2,2 cm. Hallar (*a*) la energía total del sistema, (*b*) la energía potencial gravitatoria en el máximo desplazamiento hacia abajo, (*c*) la energía potencial del muelle en su máximo desplazamiento hacia abajo y (*d*) ¿Cuál es la energía cinética máxima del cuerpo?

59 •• SSM Un objeto de 1,2 kg que cuelga de un muelle de constante de fuerza 300 N/m oscila con una velocidad máxima de 30 cm/s. (*a*) ¿Cuál es su desplazamiento máximo? Cuando el objeto está en su desplazamiento máximo, hallar (*b*) la energía total del sistema, (*c*) la energía potencial gravitatoria, y (*d*) la energía potencial del muelle.

Péndulos simples

60 ● Hallar la longitud de un péndulo simple si el periodo del péndulo es 5 s en un punto en donde $g = 9{,}81$ m/s^2.

61 ● ¿Cuál sería el periodo del péndulo del problema 60 en la Luna, en donde la aceleración de la gravedad es un sexto de la correspondiente a la Tierra?

62 ● Si el periodo de un péndulo de 70 cm de longitud es 1,68 s, ¿cuál es el valor de g en el sitio donde está situado el péndulo?

63 ● SSM Un péndulo colgado en el hueco de una escalera de un edificio de 10 pisos se compone de una masa grande suspendida de un alambre de 34,0 m de longitud. ¿Cuál es su periodo de oscilación si $g = 9{,}81$ m/s^2?

64 ●● Demostrar que la energía total de un péndulo simple que se mueve con oscilaciones de pequeña amplitud ϕ_0 es aproximadamente $E \approx 1/2mgL\phi_0^2$ (*Sugerencia: Utilizar la aproximación* $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$ *para valores pequeños de* ϕ.)

65 ●● Un péndulo simple de longitud L está sujeto a un carro que desliza sin rozamiento hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, como muestra la figura 14.27. Determinar el periodo de oscilación del péndulo que está sobre el carro deslizante.

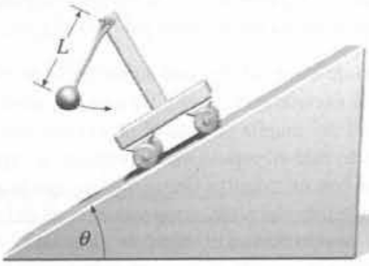


Figura 14.27 Problema 65

66 ●● Un péndulo simple de longitud L se libera partiendo del reposo desde un ángulo ϕ_0. (*a*) Suponiendo que el péndulo realiza un movimiento armónico simple, determinar su velocidad cuando pasa por la posición $\phi = 0$. (*b*) Considerando la conservación de la energía, determinar exactamente esta velocidad. (*c*) Demostrar que los resultados de (*a*) y (*b*) coinciden cuando ϕ_0 es pequeño. (*d*) Determinar la diferencia entre estos resultados para $\phi_0 = 0{,}20$ rad y $L = 1$ m.

*Péndulos físicos

67 ● Un disco delgado de 5 kg de masa y con un radio de 20 cm se suspende mediante un eje horizontal perpendicular al disco y que pasa por su borde. El disco se desplaza ligeramente del equilibrio y se suelta. Hallar el periodo del movimiento armónico simple que se produce.

68 ● Un aro circular de 50 cm de radio se cuelga de una varilla horizontal delgada, permitiéndose que oscile en el plano del aro. ¿Cuál es el periodo de su oscilación, suponiendo que la amplitud es pequeña?

69 ● Se suspende una figura plana de 3 kg de un punto situado a 10 cm de su centro de masas. Cuando está oscilando con amplitud pequeña, el periodo de oscilación es 2,6 s. Hallar el momento de inercia I respecto a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por el punto de oscilación.

70 ●● El péndulo de un enorme reloj de un ayuntamiento tiene una longitud de 4 m. (*a*) Considerando que su funcionamiento puede asimilarse al de un péndulo simple que realiza pequeñas oscilaciones, calcular su periodo de oscilación. (*b*) Para regular su periodo se ha colocado una caja en la mitad de la barra del péndulo con unas cuantas piezas de tamaño y peso parecido al de una moneda, de modo que para cambiar el periodo del péndulo basta añadir o quitar una pieza de la caja. Explicar por qué este método funciona. Si se añaden piezas, ¿el periodo del péndulo aumenta o disminuye?

71 ●● La figura 14.28 muestra una pesa con dos masas iguales (consideradas como masas puntuales) sujetas a los extremos de una barra muy delegada (masa despreciable) de longitud L. (*a*) Demostrar que el periodo de este péndulo es un mínimo cuando el punto de pivotamiento P se encuentra sobre una de las masas. (*b*) Determinar el periodo de este péndulo físico si la distancia entre P y la masa superior es $L/4$.

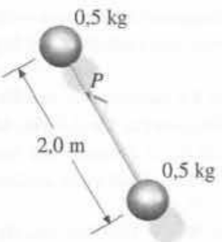


Figura 14.28 Problema 71

72 ●● Supongamos que la barra del problema 71 tiene una masa de $2m$ (figura 14.29). Determinar la distancia entre la masa superior y el punto de pivotamiento P, de tal modo que el periodo de este péndulo físico sea un mínimo.

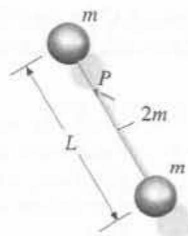


Figura 14.29 Problema 72

73 ●● SSM Tenemos una regla y se nos pide que taladremos un agujero de tal modo que cuando pivotemos la regla sobre él, el periodo del péndulo sea un mínimo. ¿Dónde taladraremos el agujero?

74 ●● La figura 14.30 muestra un disco uniforme de radio $R = 0{,}8$ m y masa 6 kg con un pequeño agujero a la distancia d del centro del disco que puede servir de punto de pivote. (*a*) ¿Cuál debe ser la distancia d para que el periodo de este péndulo físico sea 2,5 s? (*b*) ¿Cuál debe ser la distancia d para que este péndulo físico tenga el periodo menor posible? ¿Cuál es este periodo?

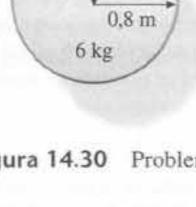


Figura 14.30 Problema 74

75 ●●● Un objeto plano tiene un momento de inercia I respecto a su centro de masas. Cuando se hace girar el objeto alrededor del punto P_1, como se indica en la figura 14.31, oscila alrededor del pivote con un periodo T. Existe otro punto P_2 en el lado opuesto del centro de masas respecto al cual el objeto oscila con el mismo periodo T. Demostrar que $h_1 + h_2 = gT^2/(4\pi^2)$.

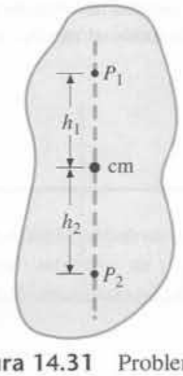


Figura 14.31 Problema 75

76 ●●● Se construye un péndulo físico a partir de una lenteja esférica de radio r y masa m colgada de una cuerda (figura 14.32). La distancia desde el centro de la esfera al punto de suspensión es L. Cuando r es mucho menor que L, este péndulo suele considerarse como un péndulo simple de longitud L. (*a*) Demostrar que para pequeñas oscilaciones el periodo viene dado por

$$T = T_0\sqrt{1+\frac{2r^2}{5L^2}}$$

en donde $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ es el periodo del péndulo simple de longitud L. (*b*) Demostrar que cuando r es mucho menor que L, el periodo vale aproximadamente $T \approx T_0(1 + r^2/5L^2)$. (*c*) Si $L = 1$ m y $r = 2$ cm, hallar el error cuando se utiliza la aproximación $T = T_0$ para este péndulo. ¿Qué tamaño deberá tener el radio de la lenteja para que el error sea del 1 por ciento?

Figura 14.32 Problema 76

77 ●●● La figura 14.33 muestra el péndulo de un reloj. La barra uniforme de longitud $L = 2{,}0$ m tiene una masa $m = 0{,}8$ kg. Sujeto a la barra hay un disco de masa $M = 1{,}2$ kg y radio 0,15 m. El reloj se ha construido de modo que marque un tiempo perfecto si el periodo del péndulo es exactamente 3,50 s. (*a*) ¿Cuál debe ser la distancia d para que el periodo del péndulo sea 2,5 s? (*b*) Supongamos que el reloj de péndulo atrasase a 5,0 min por día. ¿A qué distancia y en qué sentido debe desplazarse el disco para asegurar que el reloj marque correctamente el tiempo?

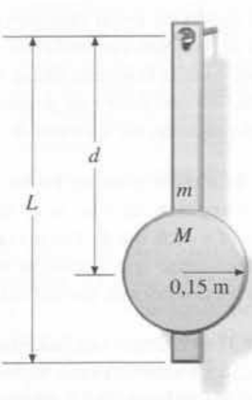


Figura 14.33 Problema 77

78 ●● SSM Un reloj de péndulo pierde 48 s por día cuando la amplitud del péndulo es 8,4°. ¿Cuál debería ser la amplitud del péndulo para que el reloj marcase el tiempo exacto?

79 ●● iSOLVE ✓ Un reloj de péndulo que oscila con una amplitud muy pequeña se adelanta 5 min cada día. ¿Qué amplitud angular deberá tener el péndulo para mantener el tiempo correcto?

Oscilaciones amortiguadas

80 ● Demostrar que la constante de amortiguamiento, b, tiene unidades de kg/s.

81 ● Un oscilador tiene un factor Q igual a 200. ¿En qué porcentaje disminuye su energía durante un periodo?

82 ● iSOLVE Un objeto de 2 kg ligado a un muelle de constante $k = 400$ N/m oscila con una amplitud inicial de 3 cm. Hallar (*a*) el periodo y (*b*) la energía inicial total. (*c*) Si la energía disminuye en un 1 por ciento por periodo, hallar la constante de amortiguamiento b y el factor Q.

83 ●● Demostrar que el cociente de las amplitudes de dos oscilaciones sucesivas en un oscilador forzado es constante.

84 ●● Un oscilador tiene un periodo de 3 s. Su amplitud disminuye en un 5 por ciento durante cada ciclo. (*a*) ¿En cuánto disminuye su energía durante cada ciclo? (*b*) ¿Cuál es la constante de tiempo τ? (*c*) ¿Cuál es el factor Q?

85 ●● Un oscilador posee un factor Q igual a 20. (*a*) ¿En qué fracción disminuye la energía en cada ciclo? (*b*) Utilizar la ecuación 14.37 para determinar la diferencia en porcentaje entre ω' y ω_0. (*Sugerencia: Utilizar la aproximación* $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ *para valores pequeños de* x.)

86 ●● iSOLVE Un sistema masa-muelle amortiguado oscila con una frecuencia de 200 Hz. La constante de tiempo del sistema es 2,0 s. En el tiempo $t = 0$, la amplitud de oscilación es 6,0 cm y la energía del sistema oscilante es 60 J. (*a*) ¿Cuáles son las amplitudes de oscilación para $t = 2{,}0$ s y $t = 4{,}0$ s? (*b*) ¿Cuánta energía se disipa en el primer intervalo de 2 s y en el segundo intervalo de 2 s?

87 ●● SSM iSOLVE Se ha establecido que cuando la Tierra vibra tiene un periodo de resonancia de 54 min y un factor Q de aproximadamente 400, y que después de un gran terremoto, la Tierra "tiembla" (se produce una vibración continua) durante dos meses. (*a*) Determinar el porcentaje de energía de vibración perdida debido a las fuerzas de amortiguamiento en cada ciclo. (*b*) Demostrar que después de n periodos, la energía es $E_n = (0{,}984)^n E_0$, siendo E_0 la energía inicial. (*c*) Si la energía inicial de vibración de un terremoto es E_0, ¿cuál es la energía al cabo de 2 días?

88 ●● Un péndulo compacto que se usa en un experimento de física tiene una masa de 15 g y una longitud de 75 cm. Para que el péndulo comience a oscilar un estudiante de física instala un ventilador, que produce un flujo horizontal de aire de velocidad 7 m/s hacia la lenteja. Con el ventilador en marcha, la lenteja está en equilibro cuando el péndulo está inclinado 5° respecto la dirección vertical. Cuando se para el ventilador, se deja que el péndulo oscile. (*a*) Si suponemos que la fuerza de resistencia a causa del aire viene dada por $-bv$, ¿cuál es la constante de tiempo o tiempo de extinción τ de las oscilaciones del péndulo? (*b*) ¿Cuánto tiempo pasará hasta que la amplitud de la oscilación sea de 1°?

Oscilaciones forzadas y resonancia

89 ● Determinar la frecuencia de resonancia de cada uno de los tres sistemas indicados en la figura 14.34.

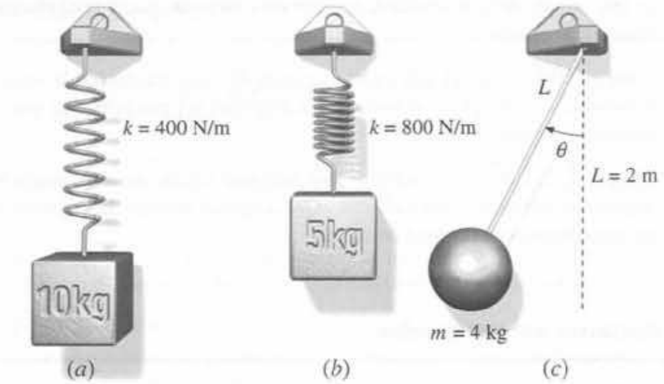


Figura 14.34 Problema 89

90 • Un oscilador amortiguado pierde el 2 por ciento de su energía en cada ciclo. (*a*) ¿Cuál es su factor Q? (*b*) Si su frecuencia de resonancia es 300 Hz, ¿cuál es la anchura de la curva de resonancia $\Delta\omega$ cuando el oscilador está forzado?

91 •• Un objeto de 2 kg oscila sobre un muelle de constante de fuerza $k = 400$ N/m. La constante de amortiguamiento es $b = 2{,}00$ kg/s. Está forzado por una fuerza sinusoidal de valor máximo 10 N y frecuencia angular $\omega = 10$ rad/s. (*a*) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones? (*b*) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia? (*c*) Hallar la amplitud de las vibraciones en la resonancia. (*d*) ¿Cuál es la anchura $\Delta\omega$ de la curva de resonancia?

92 •• Un oscilador amortiguado pierde el 3,5 por ciento de su energía durante cada ciclo. (*a*) ¿Cuántos ciclos han de transcurrir antes de que se disipe la mitad de su energía? (*b*) ¿Cuál es el factor Q? (*c*) Si la frecuencia natural es 100 Hz, ¿cuál es la anchura de la curva de resonancia cuando el oscilador se ve forzado exteriormente?

Colisiones

93 ••• La figura 14.35 muestra un sistema vibrante masa-muelle colocado en una superficie sin rozamiento y una segunda masa igual que se mueve hacia la masa vibrante con velocidad v. El movimiento de la masa vibrante viene dado por $x(t) = (0{,}1 \text{ m}) \cos (40 \text{ s}^{-1}t)$, en donde x es el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio. Las dos masas chocan elásticamente justo cuando la masa vibrante pasa por su posición de equilibrio y se mueve hacia la derecha. (*a*) ¿Cuál debe ser la velocidad v de la segunda masa para que el sistema masa-muelle quede en reposo después de la colisión elástica? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la segunda masa después de la colisión elástica?

Figura 14.35 Problema 93

94 ••• Después de la colisión elástica del problema 93, la energía cinética de la masa en retroceso es 8,0 J. Determinar el valor de las masas m y la constante del muelle k.

95 ••• Un objeto de 2 kg de masa apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento se une a un muelle de constante 600 N/m. Otro objeto de 1 kg de masa desliza sobre la superficie acercándose al primero a 6 m/s. (*a*) Hallar la amplitud de oscilación si el segundo objeto choca de forma perfectamente inelástica quedando unido también al muelle. ¿Cuál es el periodo de oscilación? (*b*) Hallar la amplitud y el periodo de oscilación si el choque es elástico. (*c*) Para cada tipo de colisión, escribir una expresión para la posición x en función del tiempo t para el objeto unido al muelle, suponiendo que el choque se produce en el instante $t = 0$.

Problemas generales

96 • Una partícula posee un desplazamiento dado por $x = 0{,}4 \cos (3t + \pi/4)$, en donde x viene en metros y t en segundos. (*a*) Hallar la frecuencia f y el periodo T del movimiento. (*b*) ¿En donde está la partícula en $t = 0$? (*c*) ¿Y en $t = 0{,}5$ s?

97 • (*a*) Hallar una expresión para la velocidad de la partícula cuya posición viene dada en el problema 96. (*b*) ¿Cuál es la velocidad en el instante $t = 0$? (*c*) ¿Cuál es la velocidad máxima? (*d*) ¿En qué momento después de $t = 0$ se da esta velocidad máxima por primera vez?

98 • Un cuerpo unido a un muelle horizontal oscila con un periodo de 4,5 s. Si el cuerpo se suspende verticalmente del muelle, ¿en cuánto se alarga el muelle respecto a su longitud natural cuando el cuerpo está en equilibrio?

99 •• SSM Una partícula pequeña de masa m se desliza sin rozamiento en un cuenco esférico de radio r. (*a*) Demostrar que el movimiento de la masa es el mismo que si estuviese sujeta a un muelle de longitud r. (*b*) Se desplaza una partícula de masa m_1 una pequeña distancia s_1 de la parte inferior del cuenco (figura 14.36), siendo s_1 mucho menor que r. Otra segunda masa m_2 se desplaza en sentido opuesto a una distancia $s_2 = 3s_1$ (s_2 es también mucho menor que r). Si las masas se dejan libres en el mismo instante, ¿en dónde se encontrarán? Explicarlo.

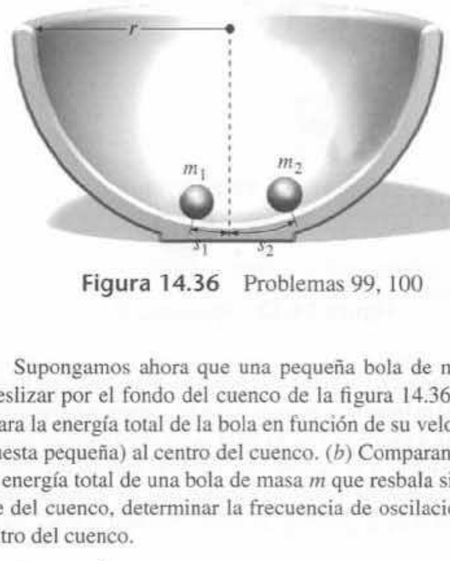


Figura 14.36 Problemas 99, 100

100 •• Supongamos ahora que una pequeña bola de masa m y radio R rueda sin deslizar por el fondo del cuenco de la figura 14.36. (*a*) Escribir una expresión para la energía total de la bola en función de su velocidad y de la distancia (supuesta pequeña) al centro del cuenco. (*b*) Comparando esta expresión con la de la energía total de una bola de masa m que resbala sin rozamiento por la superficie del cuenco, determinar la frecuencia de oscilación de la bola respecto al centro del cuenco.

101 •• ISOLVE✓ Cuando un avión disminuye su velocidad a fin de aterrizar, un viajero mide su aceleración suspendiendo un yo-yo como un péndulo simple y observando que cuando la lenteja (masa 40 g) está en reposo respecto a él, la cuerda (longitud 70 cm) forma un ángulo de 22° con la vertical. Determinar el periodo T para pequeñas oscilaciones de este péndulo.

102 •• Una balanza de torsión consiste en un objeto de momento de inercia I que se cuelga del extremo de un hilo. Si se retuerce el hilo, éste produce un momento restaurador $\tau = -\kappa\theta$, donde κ es la constante de torsión y θ es el ángulo de deformación. Demostrar que cuando se tuerce el hilo un ángulo pequeño la frecuencia de las oscilaciones de torsión vale $\omega = \sqrt{\kappa/I}$.

103 •• En la figura 14.37 se muestra una balanza de torsión sencilla que se utiliza en una rica variedad de experimentos de física (véase el problema 102). Supongamos que tenemos una barra de 5,0 cm de longitud y de masa despreciable que tiene dos partículas idénticas de 50 g de masa en sus extremos y que está atada al extremo del hilo de la balanza. Si el periodo de oscilación es de 80 s, ¿cuál es la constante de torsión de la balanza?

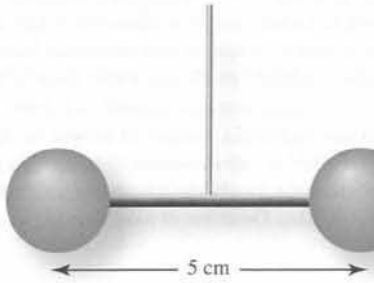


Figura 14.37 Problema 103

104 ●● SSM iSOLVE Un cubo de madera de arista a y masa m flota en agua con una de sus caras paralela a la superficie del agua. La densidad del agua es ρ. Determinar el periodo de oscilación en la dirección vertical cuando se empuja el cubo ligeramente hacia abajo.

105 ●● Un reloj de péndulo funciona correctamente en la superficie de la Tierra. ¿En qué situación el error será mayor: si el reloj se baja a una mina de profundidad h o si se eleva a una altura h? Suponer que $h << R_T$.

106 ●● iSOLVE La figura 14.38 muestra un péndulo de longitud L con una lenteja de masa M. La lenteja está unida a un muelle de constante k como se indica. Cuando la lenteja está directamente por debajo del soporte del péndulo, el muelle tiene su longitud natural de equilibrio. (a) Deducir una expresión para el periodo de este sistema oscilante para vibraciones de pequeña amplitud. (b) Suponer que M = 1 kg y L es tal que en ausencia del muelle el periodo es 2,0 s. ¿Cuál es la constante del muelle k si el periodo del sistema oscilante es 1,0 s?

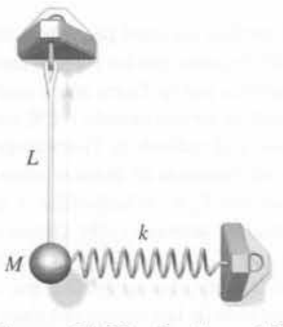


Figura 14.38 Problema 106

107 ●● Una masa m_1 que se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento está sujeta a un muelle de constante de fuerza k y oscila con amplitud A. Cuando el muelle está con su mayor deformación y la masa está instantáneamente en reposo, se coloca en la parte superior de m_1 otra masa m_2. (a) ¿Cuál es el menor valor del coeficiente de rozamiento estático μ_e que permite que m_2 no deslice sobre m_1? (b) Explicar cómo se modifican la energía total E, la amplitud A, la frecuencia angular ω y el periodo T al situar m_2 sobre m_1 suponiendo que el rozamiento es suficientemente grande para que no haya deslizamiento.

108 ●● Una caja de 100 kg de masa cuelga del techo de una habitación sujeta a un muelle de constante 500 N/m. El muelle tiene una longitud natural de 0,5 m. (a) Determinar la posición de equilibrio de la caja. (b) Un muelle idéntico se cuelga del techo y de la misma caja, al lado del anterior. Determinar qué frecuencia tendrán las oscilaciones cuando se libere la caja. (c) ¿Cuál será la nueva posición de equilibrio de la caja, cuando acabe parándose?

109 ●● La aceleración debida a la gravedad g varía con la situación geográfica debido a la rotación de la Tierra y a que la Tierra no es exactamente esférica. Este hecho fue descubierto por primera vez durante el siglo XVII, cuando se observó que un reloj de péndulo cuidadosamente ajustado para marcar el tiempo correcto en París, se atrasaba alrededor de 90 s/día cerca del ecuador. (a) Demostrar que una pequeña variación en la aceleración de la gravedad Δg produce un pequeño cambio ΔT en el periodo de un péndulo dado por $\Delta T/T \approx \frac{1}{2}\ \Delta g/g$. (Utilizar el cálculo diferencial para aproximar los valores de ΔT y Δg.) (b) ¿Qué variación de g se necesita para justificar un cambio de periodo de 90 s/día?

110 ●● La figura 14.39 muestra dos masas iguales de 0,6 kg unidas con pegamento entre sí y conectadas a un muelle de constante k = 240 N/m. Las masas, que descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento, se desplazan 0,6 m de su posición de equilibrio y se dejan en libertad. Antes de liberarse se depositan unas gotas de disolvente sobre el pegamento que las une. (a) Determinar la frecuencia de vibración y la energía total del sistema vibrante antes de que el pegamento se haya disuelto. (b) Determinar la frecuencia de vibración, amplitud y energía del sistema vibrante si el pegamento se disuelve (1) en la compresión máxima y (2) en la extensión máxima.

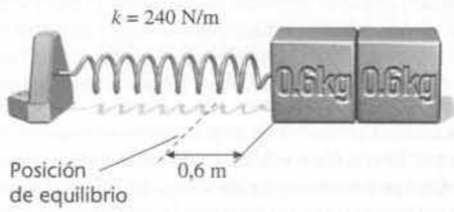


Figura 14.39 Problema 110

111 ●● Demostrar que en los dos casos de la figura 14.40a y b, el objeto oscila con una frecuencia $f = [1/(2\pi)]\sqrt{k_{ef}/m}$, en donde k_{ef} viene dado por (a) $k_{ef} = k_1 + k_2$ y (b) $1/k_{ef} = 1/k_1 + 1/k_2$. (*Indicación: Hallar la fuerza neta F sobre el objeto para un pequeño desplazamiento x y escribir* $F = -k_{ef}\,x$. *Obsérvese que en* (b) *los muelles se deforman en cantidades diferentes cuya suma es x.*)

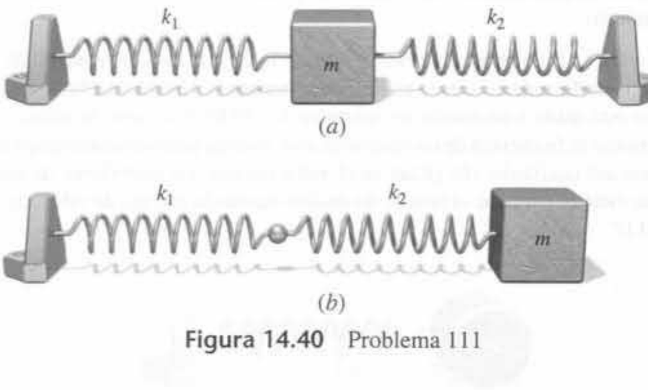


Figura 14.40 Problema 111

112 ●● SSM Un bloque pequeño de masa m_1 descansa sobre un pistón que está vibrando verticalmente con movimiento armónico simple dado por $y = A$ sen ωt. (a) Demostrar que el bloque se separará del pistón si $\omega^2 A > g$. (b) Si $\omega^2 A = 3g$ y A = 15 cm, ¿en qué instante el bloque se separará del pistón?

113 ●● iSOLVE El émbolo de una máquina de lanzamiento de bolas tiene una masa m_e y está conectado a un muelle de constante de fuerza k (figura 14.41). El muelle se comprime una distancia x_0 a partir de su posición de equilibrio, $x = 0$, y se deja en libertad. Una bola de masa m_b está junto al émbolo. (a) ¿En qué punto la bola se separa del émbolo? (b) ¿Cuál es la velocidad v_b de la bola cuando ésta se separa? (c) ¿A qué distancia x_f el émbolo se detiene momentáneamente? (Suponer que la superficie es horizontal y sin rozamiento de modo que la bola se desliza sin rodar.)

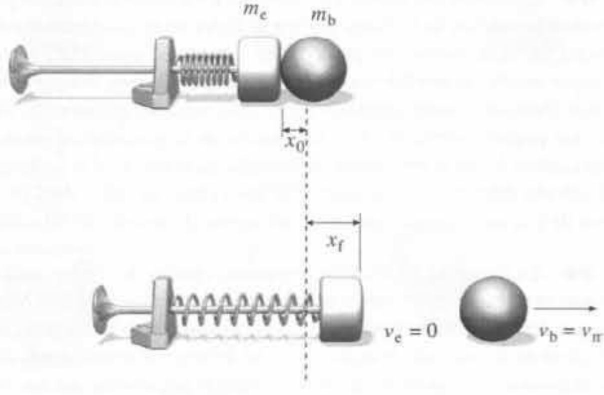


Figura 14.41 Problema 113

114 ●● Una plataforma nivelada vibra horizontalmente con movimiento armónico simple con un periodo de 0,8 s. (*a*) Una caja sobre la plataforma comienza a deslizar cuando la amplitud de vibración alcanza los 40 cm; ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y la plataforma? (*b*) Si el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y la plataforma fuera 0,40, ¿cuál sería la amplitud máxima de vibración antes de que la caja deslizase?

115 ●●● La energía potencial de una masa m en función de la posición viene expresada por $U(x) = U_0(\alpha + 1/\alpha)$, en donde $\alpha = x/a$ y a es una constante. (*a*) Representar $U(x)$ en función de x para $0{,}1a < x < 3a$. (*b*) Determinar el valor de $x = x_0$ en el equilibrio estable. (*c*) Expresar la energía potencial $U(x)$ para $x = x_0 + \varepsilon$, siendo ε un pequeño desplazamiento de la posición de equilibrio x_0. (*d*) Aproximar el término $1/x$ utilizando el desarrollo binómico

$$(1+r)^n = 1 + nr + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}r^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}r^3 + \ldots$$

con $r = \varepsilon/x_0 << 1$ y despreciar los términos de potencia superior a r^2. (*e*) Comparar el resultado obtenido con el potencial de un oscilador armónico simple. Demostrar que la masa experimentará un movimiento armónico simple para pequeños desplazamientos del equilibrio y determinar la frecuencia de este movimiento.

116 ●●● Un tambor cilíndrico sólido de masa 6,0 kg y diámetro 0,06 m rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal (figura 14.42). El eje del tambor está atado a un muelle de constante $k = 4000$ N/m como se indica. (*a*) Determinar la frecuencia de oscilación de este sistema para pequeños desplazamientos del equilibrio. (*b*) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que el tambor no deslice cuando la energía de vibración es de 5,0 J?

Figura 14.42 Problema 116

117 ●●● SSM Si atamos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 a los dos extremos de un muelle de constante k y los hacemos oscilar, demostrar que la frecuencia de oscilación es $\omega = (k/\mu)^{1/2}$, donde $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema.

118 ●● Uno de los modos vibracionales de la molécula de HCl tiene una frecuencia de $8{,}969 \times 10^{13}$ s^{-1}. Usando la relación deducida en el problema 117, determinar la constante k de la molécula de HCl.

119 ●● En el problema 118, si se reemplaza el átomo de hidrógeno de la molécula de HCl por un átomo de deuterio, ¿cuál será la nueva frecuencia de vibración de la molécula? (El átomo de deuterio está formado por un protón y un neutrón.)

120 ●●● Un bloque de masa m situado sobre una mesa horizontal está unido a un muelle de constante k como se muestra en la figura 14.43. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la masa es μ_c. Se estira el muelle una longitud A y luego se le deja libre. (*a*) Aplicar la segunda ley de Newton al bloque para obtener una ecuación para su aceleración d^2x/dt^2 durante el primer medio ciclo, durante el cual el bloque se está moviendo hacia la izquierda. Demostrar que la ecuación resultante puede escribirse como $d^2x'/dt^2 = -\omega^2x'$, en donde $\omega = \sqrt{k/m}$ y $x' = x - x_0$ con $x_0 = \mu_c mg/k = \mu_c g/\omega^2$. (*b*) Repetir el apartado (*a*) para el segundo semiciclo, cuando el bloque se mueve hacia la derecha y demostrar que $d^2x''/dt^2 = -\omega^2x''$, siendo $x'' = x + x_0$ y teniendo x_0 el mismo valor. (*c*) Utilizar una hoja de cálculo para hacer un gráfico de los primeros 5 semiciclos para $A = 10x_0$. Describir el movimiento, si lo hay, después del quinto semiciclo.

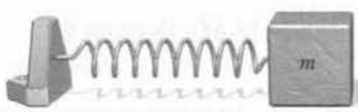


Figura 14.43 Problema 120

121 ●●● La figura 14.44 muestra un semicilindro de masa M y radio R que descansa sobre una superficie horizontal. Si un lado del semicilindro se empuja ligeramente y luego se libera, el objeto oscilará alrededor de su posición de equilibrio. Determinar el periodo de esta oscilación.

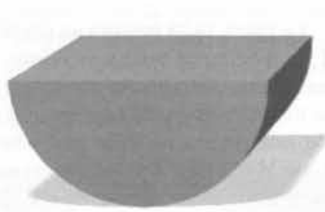


Figura 14.44 Problema 121

122 ●●● SSM Se perfora un túnel pequeño a través de la Tierra como se indica en la figura 14.45. Suponer que las paredes carecen de rozamiento. (*a*) La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre una partícula de masa m a una distancia r del centro de la misma cuando $r < R_T$ es $F_r = -(GmM_T/R_T^3)r$, en donde M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra respectivamente. Demostrar que la fuerza neta sobre una partícula de masa m situada a una distancia x del centro del túnel viene dada por $F_x = -(GmM_T/R_T^3)x$, y que el movimiento de la partícula es, por consiguiente, armónico. (*b*) Demostrar que el periodo del movimiento viene dado por $T = 2\pi\sqrt{R_T/g}$ y hallar su valor en minutos. (Resulta ser el mismo periodo que el de un satélite que orbite la Tierra cerca de su superficie y es independiente de la longitud del túnel.)

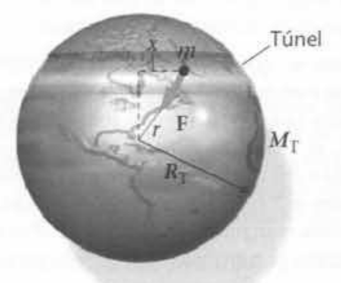


Figura 14.45 Problema 122

123 ●●● Un oscilador amortiguado tiene una frecuencia ω' que es un 10 por ciento menor que su frecuencia sin amortiguamiento. (*a*) ¿En qué factor disminuye su amplitud en cada oscilación? (*b*) ¿En qué factor se reduce su energía durante cada oscilación?

124 ●●● Demostrar mediante sustitución directa que la ecuación 14.52 es una solución de la ecuación 14.51.

125 ●●● SSM En este problema hay que obtener la expresión correspondiente a la potencia media cedida por una fuerza impulsora a un oscilador forzado (figura 14.24).

(*a*) Demostrar que la potencia instantánea cedida por la fuerza impulsora es

$$P = Fv = -A\omega F_0 \cos \omega t \text{ sen } (\omega t - \delta)$$

(*b*) Utilizar la identidad trigonométrica sen $(\theta_1 - \theta_2)$ = sen $\theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1$ sen θ_2 para demostrar que esta última expresión puede escribirse

$$P = A\omega F_0 \text{ sen } \delta \cos^2 \omega t - A\omega F_0 \cos \delta \cos \omega t \text{ sen } \omega t$$

(*c*) Demostrar que el valor medio del segundo término del resultado del apartado (*b*) calculado en uno o más periodos es cero y que, por lo tanto,

$$P_m = \tfrac{1}{2} A\omega F_0 \text{ sen } \delta$$

(*d*) A partir de la ecuación 14.54 para tg δ, construir un triángulo rectángulo en el que el cateto opuesto al ángulo δ sea $b\omega$ y el adyacente sea $m(\omega_0^2 - \omega^2)$ y utilizar este triángulo para demostrar que

$$\text{sen } \delta = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{b\omega A}{F_0}$$

(*e*) Utilizar este resultado de (*d*) para eliminar ωA de forma que la potencia media cedida pueda escribirse

$$P_m = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{b} \text{ sen}^2 \delta = \frac{1}{2}\left[\frac{b\omega^2 F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}\right] \qquad (14.55)$$

126 ●●● En este problema debe de utilizarse el resultado del problema 125 para deducir la ecuación 14.49, que relaciona la anchura de la curva de resonancia con el valor de Q cuando la resonancia es aguda. En la resonancia el denominador de la fracción entre corchetes de la ecuación 14.55 es $b^2\omega_0^2$ y P_m tiene un valor máximo. (La ecuación 14.55 se encontrará en el problema 125.) En el caso de una resonancia aguda, la variación de ω del numerador de la ecuación 14.55 puede despreciarse. Entonces la potencia cedida será la mitad de su valor máximo en los valores de ω para los cuales el denominador sea $2b^2\omega_0^2$.

(*a*) Demostrar entonces que ω satisface $m^2(\omega - \omega_0)^2(\omega - \omega_0)^2 \approx b^2\omega_0^2$.

(*b*) Utilizando la aproximación $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, demostrar que $\omega - \omega_0 \approx \pm b/2m$.

(*c*) Expresar b en función de Q.

(*d*) Combinar los resultados de (*b*) y (*c*) para demostrar que existen dos valores de ω para los que la potencia cedida es la mitad de la correspondiente en la resonancia y que vienen dados por

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}$$

Por consiguiente, $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_0/Q$, que es equivalente a la ecuación 14.49.

127 ●●● El potencial de Morse, que frecuentemente se usa para representar las fuerzas interatómicas, puede escribirse de la forma $U(r) = D(1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2$, donde r es la distancia entre los dos núcleos atómicos. (*a*) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, representar gráficamente el potencial de Morse usando D = 5 eV, β = 0,2 nm^{-1} y r_0 = 0,75 nm. (*b*) Determinar a partir del potencial de Morse la separación de equilibrio y la constante k para pequeños desplazamientos del equilibrio. (*c*) Determinar una fórmula para la frecuencia de oscilación de una molécula diatómica homonuclear (es decir, con los dos átomos iguales) si los átomos tienen una masa m.