Pauta Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda & Sergio Godoy

11/Agosto/2009

P1. a) En coordenadas esféricas:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi}$$

dado que $r = R = cte$, $\phi = N\theta$, y $\dot{\theta} = \omega_0$, se tiene que:

$$\boxed{\vec{v} = R\omega_0\hat{\theta} + R\sin(\theta)N\omega_0\hat{\phi} = R\omega_0(\hat{\theta} + N\sin(\theta)\hat{\phi})}$$

para la aceleración

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta))\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta))\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2(\theta))\hat{\phi}$$

usando los mismos argumentos anteriores sobre las variables, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2(\theta)) = R^2(N\omega_0)\frac{d}{dt}(\sin^2(\theta)) = 2R^2N\omega_0^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

y de aqui se desprende el valor del vector aceleración

$$\boxed{\vec{a} = -R\omega_0^2(1 + N^2\sin 2(\theta))\hat{r} - R\omega_0^2N^2\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{\theta} + 2R\omega_0^2N\cos(\theta)\hat{\phi}}$$

b) para el radio de curvatura, utilizaremos la ecuación

$$\rho_c = \frac{v^3}{||\vec{a}\times\vec{v}||}$$

En $\theta = \pi/2$, se tiene que

$$\vec{v} = R\omega_0(\hat{\theta} + N\hat{\phi}), \vec{a} = -R\omega_0^2(1+N^2)\hat{r}$$

luego, haciendo producto cruz se tiene

$$\vec{a}\times\vec{v} = -R^2\omega_0^3(1+N^2)(\hat{r}\times\hat{\theta} + N(\hat{r}\times\hat{\phi})) = -R^2\omega_0^3(1+N^2)(\hat{\phi} - N\hat{\theta})$$

$$\Rightarrow ||\vec{a}\times\vec{v}|| = R^2\omega_0^3(1+N^2)^{3/2}$$

ahora

$$v = R\omega_0(1+N^2)^{1/2} \Rightarrow v^3 = R^3\omega_0^3(1+N^2)^{3/2}$$

Luego, el radio de curvatura para $\theta = \pi/2$ es

$$\rho_c(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{R^3\omega_0^3(1+N^2)^{3/2}}{R^2\omega_0^3(1+N^2)^{3/2}} = R$$

$$\boxed{\rho_c(\theta = \frac{\pi}{2}) = R}$$

c) para la longitud total de la espira

$$L = \int ||d\vec{r}|| = \int_0^\pi ||\frac{d\vec{r}}{d\theta}||d\theta$$

pero

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\theta} = R\omega_0(\hat{\theta} + N\sin(\theta)\hat{\phi})\frac{1}{\omega_0} = R(\hat{\theta} + N\sin(\theta)\hat{\phi}) \Rightarrow ||\frac{d\vec{r}}{d\theta}|| = R\sqrt{1 + N^2\sin^2(\theta)}$$

y de aquí que el largo de la curva se calcula con la expresión

$$\boxed{L = R\int_0^\pi \sqrt{1 + N^2\sin^2(\theta)}d\theta}$$

donde el tiempo que tarda en recorrerla será

$$T = \int dt = \int \frac{dt}{d\theta}d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{\omega_0}d\theta = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$\boxed{T = \frac{\pi}{\omega_0}}$$