Pauta Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda & Sergio Godoy

20/Agosto/2009

P1.

a) hacemos un D.C.L. (diagrama de cuerpo libre) sobre la partícula. Las únicas fuerzas que actuan sobre la partícula son el peso y la normal. Descompiendo la gravedad en coordenadas esféricas se tiene

$$\vec{g} = -g\cos\theta\hat{r} + g\sin\theta\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = -N\hat{\theta} + m(-g\cos\theta\hat{r} + g\sin\theta\hat{\theta})$$

Veamos ahora la aceleración. Por geometría se tiene que $\theta = cte \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Usando la ecuación $\vec{F} = m\vec{a}$ y separando por componentes se tiene

$$\hat{r})\ m(\ddot{r} - r\sin\theta\dot{\phi}^2) = -mg\cos\theta$$

$$\hat{\theta})\ m(-r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) = mg\sin\theta - N$$

$$\hat{\phi})\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$$

tomando la ecuación de $\hat{\phi}$

$$r^2\dot{\phi} = cte = r_0^2\dot{\phi}_0$$

la condición inicial es

$$\vec{v}(t=0) = v_0\hat{\phi} = \dot{r}_0\hat{r} + r_0\sin\theta\dot{\phi}_0\hat{\phi} \Rightarrow \dot{\phi}_0 = \frac{v_0}{r_0\sin\theta}$$

por lo tanto se tiene que

$$\dot{\phi}(r) = \left(\frac{r_0 v_0}{\sin\theta}\right)\frac{1}{r^2}$$

y usando esto último en la ecuacion de $\hat{\theta}$ se tiene que la normal es

$$N = mg\sin\theta + mr\sin\theta\cos\theta\left(\left(\frac{r_0v_0}{\sin\theta}\right)\frac{1}{r^2}\right)^2$$

$$\boxed{N = m\left(g\sin\theta + \frac{(r_0v_0)^2}{\tan\theta}\frac{1}{r^3}\right)}$$

Ahora, usando $\dot{\phi}(r)$ en la ecuación de $\hat{r}$

$$\ddot{r} = (r_0v_0)^2\frac{1}{r^3} - g\cos\theta$$

haciendo $\ddot{r} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$ e integrando se tiene

$$\int_0^{\dot{r}} \dot{r} d\dot{r} = (r_0 v_0)^2 \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^3} - g\cos\theta \int_{r_0}^{r} dr$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{v_0^2}{2}(1 - (\frac{r_0}{r})^2) - g\cos\theta(r - r_0)$$

$$\Rightarrow \dot{r}(r) = \sqrt{v_0^2(1 - (\frac{r_0}{r})^2) - 2g\cos\theta(r - r_0)}$$

y ya con esto podemos escribir, tomando la expresión de $\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \sqrt{v_0^2(1 - (\frac{r_0}{r})^2) - 2g\cos\theta(r - r_0)}\hat{r} + v_0\frac{r_0}{r}\hat{\phi}}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = -g\cos\theta\hat{r} - \frac{(r_0 v_0)^2}{\tan\theta}\frac{1}{r^3}\hat{\theta}}$$

P2.

a) La fuerza neta que siente la partícula es:

$$\sum \vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = -N\hat{\rho} - mg\hat{k}$$

la aceleración en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

usando $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, y separando por componentes escalares se obtiene:

$$\hat{\rho}) -N = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)$$

$$\hat{\theta})\ 0 = m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})$$

$$\hat{k}) -mg = m\ddot{z}$$

como $\rho = R = cte \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, por lo tanto, usando la segunda ecuación, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}_0$$

Ahora, veamos que de a condición inicial:

$$\vec{v}(t=0) = R\dot{\theta}_0\hat{\theta} + \dot{z}_0\hat{k} = V_0\cos\alpha\hat{\theta} + V_0\sin\alpha\hat{k}$$

por lo que se encuentra que

$$R\dot{\theta}_0 = V_0\cos\alpha \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{V_0}{R}\cos\alpha$$

$$\dot{z}_0 = V_0\sin\alpha$$

Reemplazando en la primera ecuación de movimiento

$$-N = -mR(\frac{V_0}{R}\cos\alpha)^2 \Rightarrow \boxed{N = m\frac{V_0^2}{R}\cos^2\alpha}$$

b) dado que $\dot{\theta} = \dfrac{V_0}{R}\cos\alpha$, se encuentra facilmente que

$$\theta(t) = \frac{V_0}{R}\cos\alpha t$$

veamos cuanto tiempo tarda la particula en subir y bajar. De la tercera ecuación de movimiento:

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

sea T el tiempo que tarda en ir y volver a z_0, entonces:

$$z(t = T) = -\frac{1}{2}gT^2 + \dot{z}_0 T + z_0 = z_0$$

pero $\dot{z}_0 = V_0 \sin\alpha$, por lo que el tiempo T es:

$$T = \frac{2V_0\sin\alpha}{g}$$

imponiendo que $\theta(t = T) = 2n\pi$ se tendrá

$$\theta(T) = \frac{V_0}{R}\cos\alpha(\frac{2V_0\sin\alpha}{g}) = 2n\pi$$

despejando, se encuentra que el valor de V_0 es

$$\boxed{V_0^2 = \frac{ng\pi R}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$