Pauta Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda & Sergio Godoy

9/Septiembre/2009

P1. a) Usando un D.C.L. se puede determinar que la segunda ley de Newton en cada coordenada entregan las ecuaciones:

$$\hat{i} : -\mu N - k(\sqrt{x^2 + L_0^2} - L_0)\frac{x}{\sqrt{x^2 + L_0^2}} = m\ddot{x}$$

$$\hat{j} : k(\sqrt{x^2 + L_0^2} - L_0)\frac{L_0}{\sqrt{x^2 + L_0^2}} + N - mg = m\ddot{y}$$

inicialmente el movimiento es horizontal, i.e., $\ddot{y} = 0$. Luego, de las ecuaciones de Newton se desprende que:

$$kL_0(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + L_0^2}}) + N - mg = 0$$

$$\Rightarrow N = -kL_0(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + L_0^2}}) + mg$$

usando la relacion $kL_0 = mg$, se tiene que

$$N = \frac{kL_0^2}{\sqrt{x^2 + L_0^2}} > 0 \Rightarrow N > 0$$

por lo que se tiene que, efectivamente, la partícula se mantiene en la superficie.

b) La expresión de la energía esta dada por

$$E = \frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}\delta^2$$

energía inicial

$$E_i = \frac{m}{2}v_0^2$$

para la energía final, recordemos que $\theta = \pi/4$, por lo que se tiene que

$$\cos(\theta = \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L_0}{(L_0 + \delta)}$$

$$\Rightarrow \delta = L_0(\sqrt{2} - 1)$$

por lo tanto se tiene para la energía final

$$E_f = \frac{k}{2}\delta^2 = \frac{k}{2}L_0^2(\sqrt{2} - 1)^2$$

luego, el cambio de energía mecánica es

$$\triangle E = \frac{k}{2}L_0^2(\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{m}{2}v_0^2$$

c)para calcular μ, se usa el teorema del trabajo y la energía.
El trabajo reaizado por la fuerza de roce es

$$W_{roce} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{x(\theta=\pi/4)} (-\mu N) dx$$

de las ecuaciones de Newton:

$$N = -kL_0(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + L_0^2}}) + mg$$

ademas

$$\tan(\pi/4) = 1 = \frac{x}{L_0} \Rightarrow x(\theta = \pi/4) = L_0$$

por lo tanto el trabajo realizado por la uerza de roce es

$$W_{roce} = -\mu \int_0^{L_0} (\frac{kL_0^2}{\sqrt{x^2 + L_0^2}}) dx = -\mu k L_0 \int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{L_0})^2}}$$

por lo tanto, la expresión para el coeficiente de roce μ es

$$\mu = \frac{\frac{m}{2} v_0^2 - \frac{k}{2} L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2}{kL_0 \int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{L_0})^2}}}$$

para esta integral se hace el cambio de variable $x = L_0 u$

$$\int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{L_0})^2}} = L_0 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = L_0 \sinh^{-1}(u)|_0^1 = L_0 \sinh^{-1}(1)$$

por lo que se tiene

$$W_{roce} = -\mu k L_0 \int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{L_0})^2}} = -\mu k L_0^2 \sinh^{-1}(1)$$

usando el teorema del trabajo y la energía

$$-\mu k L_0^2 \sinh^{-1}(1) = \frac{k}{2} L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{m}{2} v_0^2$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{kL_0^2 \sinh^{-1}(1)} [\frac{m}{2} v_0^2 - \frac{k}{2} L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2] = \frac{m v_0^2 - k L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2}{2kL_0^2 \sinh^{-1}(1)}$$

P2. a) para la fuerza de reacción normal, hacemos un D.C.L., donde se obtienen las ecuaciones

$$\hat{j} : mg - F_{r,y} - \mu N = m\ddot{y}$$

$$\hat{i} : N - F_{r,x} = m\ddot{x}$$

usando la geometría del problema, se puede apreciar que

$$F_{r,y} = k\delta_y = k\sqrt{D^2 + y^2}\frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}} = ky$$

$$F_{r,x} = k\delta_x = k\sqrt{D^2 + y^2}\frac{D}{\sqrt{D^2 + y^2}} = kD$$

reemplazando estos términos, y reconociendo que $\ddot{x} = 0$, se tiene que:

$$\hat{i} : N = F_{r,x} = kD = cte$$

b) Se debe recordar la definición de trabajo y el teorema del trabajo y la energía:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{fuerzas\ no\ conservativas} = \triangle E$$

Notemos que la fuerza no conservativa del problema es la fuerza de roce, y su trabajo es:

$$W_{roce} = \int (-\mu N dy) = -\int_{y_0=0}^{y=y_{max}} aykDdy = -\frac{akD}{2}y_{max}^2$$

$$E_i = \frac{1}{2}kD^2 \wedge E_f = \frac{1}{2}k(D^2 + y_{max}^2) - mgy_{max}$$

$$\Rightarrow \triangle E = \frac{1}{2}ky_{max}^2 - mgy_{max} = -\frac{akD}{2}y_{max}^2$$

$$y_{max}(\frac{1}{2}k + \frac{akD}{2}) = mg \Rightarrow y_{max} = \frac{2mg}{k(1 + aD)}$$

c) De todas las fuerzas, la normal no realiza trabajo por ser perpendicular al movimiento. Luego, para el resto de las fuerzas se tiene:

$$W_{resorte} = \int (-ky)dy = -\int_{y_0=0}^{y=y_{max}} kydy = -\frac{k}{2}(\frac{2gm}{k(1 + aD)})^2$$

$$W_{resorte} = -\frac{2(mg)^2}{k(1 + aD)^2}$$

$$W_{roce} = \int (-\mu N dy) = -\int_{y_0=0}^{y=y_{max}} aykDdy = -\frac{akD}{2}(\frac{2gm}{k(1 + aD)})^2$$

$$W_{roce} = -\frac{2aD(mg)^2}{k(1 + aD)^2}$$

$$W_{peso} = \int mgdy = mg(\frac{2gm}{k(1 + aD)}) = \frac{2(mg)^2}{k(1 + aD)}$$