Pauta P1 Control 1 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

a) El vector posición, en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\vec{r} = R\hat{\rho} + z\hat{k}$$

por geometría, se tiene que

$$z = \frac{-h}{2\pi}\phi$$

por lo que nuestro vector aceleración es

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{h}{2\pi}\ddot{\phi}\hat{k}$$

Las fuerzas que actuán sobre la lentejuela son

$$\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = N_\rho\hat{\rho} + N_\phi\hat{\phi} + N_z\hat{k} - mg\hat{k}$$

por lo tanto las ecuaciones de movimiento respectivas son

$$-mR\dot{\phi}^2 = N_\rho \tag{1}$$

$$mR\ddot{\phi} = N_\phi \tag{2}$$

$$-m\frac{h}{2\pi}\ddot{\phi} = N_z - mg \tag{3}$$

Para encontrar $\dot{\phi}$ necesitamos integrar alguna de estas tres ecuaciones, por lo que necesitamos conocer algo de la componentes de la fuerza normal. Para esto, hacemos $\vec{N}\cdot\hat{t} = 0$, donde

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{R\dot{\phi}\hat{\phi} - \frac{h}{2\pi}\dot{\phi}\hat{k}}{\sqrt{(R\dot{\phi})^2 + (\frac{h}{2\pi}\dot{\phi})^2}} = \frac{R\hat{\phi} - \frac{h}{2\pi}\hat{k}}{\sqrt{R^2 + (\frac{h}{2\pi})^2}}$$

Luego, haciendo el producto interno e igualando a cero, se tiene que

$$N_\phi = N_z\frac{h}{2\pi R}$$

y reemplazando esto ultimo en (2) obtenemos

$$mR\ddot{\phi} = N_z\frac{h}{2\pi R}$$

de (3) se despeja N_z, y reemplazando

$$mR\ddot{\phi} = (-m\frac{h}{2\pi}\ddot{\phi} + mg)\frac{h}{2\pi R}$$

$$R\ddot{\phi} = -\frac{h^2}{(2\pi)^2 R}\ddot{\phi} + g\frac{h}{2\pi R}$$

$$\ddot{\phi}(\frac{h^2+(2\pi R)^2}{2\pi h}) = g$$

por lo tanto

$$\ddot{\phi} = g\frac{2\pi h}{h^2+(2\pi R)^2} = cte$$

integrando se tiene

$$\dot{\phi}(t) = g\frac{2\pi h}{h^2+(2\pi R)^2}t$$

Ahora tenemos los elementos necesarios para encontrar el vector normal

$$N_z = \frac{m2\pi R^2}{h}g\frac{2\pi h}{h^2+(2\pi R)^2} = \frac{mg(2\pi R)^2}{h^2+(2\pi R)^2}$$

$$N_\phi = \frac{mg(2\pi R)^2}{h^2+(2\pi R)^2}\frac{h}{2\pi R} = \frac{mgh(2\pi R)}{h^2+(2\pi R)^2}$$

$$N_\rho = -mR\{g\frac{2\pi h}{h^2+(2\pi R)^2}t\}^2 = \frac{-mg^2(2\pi R)(2\pi h^2)t^2}{[h^2+(2\pi R)^2]^2}$$

por lo que el vector normal es

$$\vec{N} = \frac{mg(2\pi R)}{h^2+(2\pi R)^2}\{\frac{-2g\pi h^2t^2}{h^2+(2\pi R)^2}\hat{\rho} + h\hat{\phi} + 2\pi R\hat{k}\}$$