Pauta Ejercicio #7 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

a) Notemos que el momento de inercia desde el centro de masas del sistema (que coincide con el centro geometrico del aro) es

$$I_{CM} = mR^2 + mR^2 + mR^2 + mR^2 = 4mR^2$$

y aplicando el teorema de los ejes paralelos para obtener el momento de inercia desde el punto P se tiene que

$$I_P = I_{CM} + (4m)R^2 = 8mR^2$$

Veamos ahora el torque neto que actua sobre el sistema. La unica fuerza que hace torque sobre el sistema es la gravitacional y que actua en el centro geometrico del sistema (considerando el sistema como un todo). Ergo:

$$\vec{\tau}_P^{tot} = 4mgR\sin\theta\hat{k}$$

Donde $\hat{k}$ es un vector que apunta hacia adentro del plano de la figura. La velocidad angular es

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\hat{k}$$

y usando la ecuación $\vec{\tau}_P^{tot} = I_p\dot{\vec{\omega}}$ se tiene

$$4mgR\sin\theta = 8mR^2\ddot{\theta}$$

de donde se obtiene

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{g}{R}\sin\theta$$

haciendo $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ y integrando

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{g}{2R}\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{2R}(-\cos\theta + 1)$$

finalmente, despejando se tiene

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(1-\cos\theta)}$$