1. ¿Por qué usamos notación compleja para voltajes y corrientes sinusoidales?

Sabemos que una onda sinusoidal (por ejemplo un voltaje) en función del tiempo se puede representar como:

$$V(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

A = Amplitud
ω = Frecuencia angular (en rad/s)
φ = Fase (en rad)

Esto es equivalente a expresar el voltaje en función del tiempo como

$$V(t) = \Re e(A[cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)])$$

($\Re e$ = Parte Real)

lo que en notación exponencial compleja es equivalente a

$$V(t) = \Re e\left(Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right) = \Re e\left(Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}\right)$$

Para analizar circuitos de corriente alterna se suele utilizar la representación denominada **fasor** del voltaje y la corriente, que es una transformación definida como:

$$\hat{V} = Ae^{i\varphi}$$

(otra notación usada es: $\hat{V} = A\angle\varphi$)

con la cual se cumple la relación:

$$V(t) = \Re e\left(\hat{V}e^{i\omega t}\right)$$

La gracia de usar esta transformación es que (se puede demostrar) cumple las siguientes propiedades:

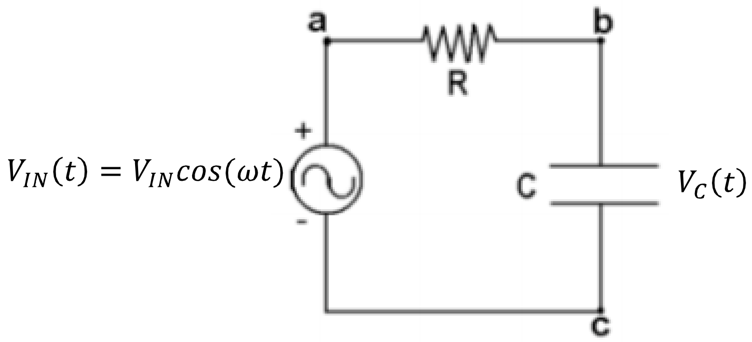
$$[a\widehat{V_1(t) + b}V_2(t)] = a\widehat{V_1} + b\widehat{V_2}$$

$$\left[\widehat{\frac{d^n}{dt^n}V(t)}\right] = (i\omega)^n\hat{V}$$

$$\left[\widehat{\int V(t)dt}\right] = \frac{1}{i\omega}\hat{V}$$

Esto permite convertir una ecuación diferencial ordinaria en una ecuación algebraica, si se sabe que la solución de dicha ecuación es una función puramente sinusoidal (como el voltaje o la corriente en un circuito de corriente alterna, después que ha transcurrido un tiempo suficientemente largo) y obtener fácilmente la magnitud y fase de dicha solución sin necesidad de integrar o derivar.

Ejemplo: Voltaje en un circuito RC



Para una entrada cualquiera, la ecuación diferencial que define el voltaje sobre el condensador en función del tiempo es:

$$RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_{IN}(t)$$

Si suponemos una entrada sinusoidal y nos interesa conocer el voltaje sobre el condensador en régimen permanente (cuando ha pasado un tiempo suficientemente largo), podemos aplicar la transformación fasorial, lo que resulta:

$$i\omega RC\widehat{V_C} + \widehat{V_C} = \widehat{V_{IN}}$$

$$\Rightarrow \widehat{V_C} = \frac{1}{1 + i\omega RC}\widehat{V_{IN}}$$

Para convertir el resultado anterior a una función con sentido físico -que dependa del tiempo y no tenga valores complejos- debemos definir la amplitud y la fase del voltaje calculado, que en este caso depende de la frecuencia de la señal de entrada. En general tendremos:

$$\widehat{V_C} = \left|\widehat{V_C}\right|\angle\delta$$

En este ejemplo (queda pendiente el desarrollo matemático):

$$\left|\widehat{V_C}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\left|\widehat{V_{IN}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}V_{IN}$$

$$\tan(\delta) = \frac{\Im m\left(\widehat{V_C}\right)}{\Re e\left(\widehat{V_C}\right)} = -\omega RC$$

Por lo tanto, para una frecuencia arbitraria,

$$\boxed{V_C(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}V_{IN} \cdot \cos{(\omega t + \delta)}}$$

2. ¿De dónde viene y para qué sirve el concepto de impedancia?

Con el fin de hacer un símil a la ley de Ohm en elementos resistivos, se define para elementos de un circuito de corriente alterna el concepto de impedancia, dada por

$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}$$

en que $\hat{V}$ e $\hat{I}$ son, respectivamente, los fasores asociados al voltaje y la corriente sobre algún elemento del circuito.

El concepto de impedancia permite analizar un circuito en corriente alterna como si tuviera sólo elementos óhmicos, lo que simplifica la obtención de la función transferencia de un circuito <u>sin necesidad de plantear la ecuación diferencial asociada</u>.

Para una resistencia:

$$V_R(t) = RI_R(t)$$

$$\Rightarrow \widehat{V_R} = R\widehat{I_R}$$

$$\Rightarrow Z_R = R$$

Para un condensador:

$$I_C(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \widehat{I_C} = i\omega C\widehat{V_C}$$

$$\Rightarrow Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Para una inductancia:

$$V_L(t) = L\frac{dI_L(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \widehat{V_L} = i\omega L\widehat{I_L}$$

$$\Rightarrow Z_L = i\omega L$$

Una vez obtenida la función transferencia utilizando sólo relaciones algebraicas entre voltajes y corrientes, la conversión a una magnitud con sentido físico se realiza del mismo modo explicado en el ejemplo del circuito RC.

Autor:
Rodrigo Alarcón Reyes

Referencia:
http://es.wikipedia.org/wiki/Fasor